Available online at www.sciencedirect.com
ScienceDirect
C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 347 (2009) 589–594
Comptes Rendus Mathematique

Théorie des nombres/Géométrie algébrique

Hauteur des sous-schémas toriques et dualité de Legendre–Fenchel

José Ignacio Burgos Gil [a,1], Patrice Philippon [b], Martín Sombra [c,1]

[a] *Departament d'Àlgebra i Geometria, Universitat de Barcelona, Gran Via 585, 08007 Barcelone, Espagne*
[b] *Institut de mathématiques de Jussieu, UMR 7586 du CNRS, 175, rue du Chevaleret, 75013 Paris, France*
[c] *Institut de mathématiques de Bordeaux, Université de Bordeaux 1, 351, cours de la Libération, 33405 Talence, France*

Reçu le 27 janvier 2009 ; accepté après révision le 2 avril 2009

Présenté par Christophe Soulé

Résumé

Nous présentons dans cette Note une formule pour la hauteur d'une variété torique complète définie sur un corps de nombres. L'expression exacte repose sur des outils d'analyse convexe et en particulier, sur le dual de Legendre–Fenchel du logarithme des normes locales d'une section naturelle du fibré en droites métrisé correspondant. Nous appliquons cette formule au calcul de la hauteur des courbes toriques projectives et des fibrés toriques. ***Pour citer cet article : J.I. Burgos Gil et al., C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 347 (2009).***

Abstract

Height of toric subschemes and Legendre–Fenchel duality. We announce a formula for the height of a complete toric variety defined over a number field. The exact expression rests on tools from convex analysis and in particular, on the Legendre–Fenchel dual of the logarithm of the local norms of a natural section of the relevant metrized line bundle. We apply this formula to the computation of the height of projective toric curves and of toric bundles. ***To cite this article: J.I. Burgos Gil et al., C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 347 (2009).***

Abridged English version

Let N be a lattice of rank n and $M := \mathrm{Hom}(N, \mathbf{Z})$ its dual lattice. Set $N_{\mathbf{R}} := N \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{R}$ and $M_{\mathbf{R}} := M \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{R}$. To a *lattice fan* Σ on $N_{\mathbf{R}}$ and any base scheme S there is associated a *toric scheme* $X_{\Sigma,S} \to S$, *see* [6, § 1.3 and 1.4]. If $S = \mathrm{Spec}(R)$ for some ring R, we set for short $X_{\Sigma,R} := X_{\Sigma,S}$ and in the particular case $R = \mathbf{Z}$ we set $X_\Sigma := X_{\Sigma,\mathbf{Z}}$.

The scheme $X_{\Sigma,S}$ is flat over the basis S and of relative dimension n. It is proper whenever the fan Σ covers the whole of $N_{\mathbf{R}}$ and it is smooth over S whenever each cone of Σ is generated by a subset of a basis of N, *see* [6, § 2.4 and 2.1]. We will assume both properties from now on.

This scheme is equipped with an action $*$ of an algebraic torus $\mathbf{T}_{N,S} \simeq (\mathbf{G}_{m,S})^n$ which extends the natural action of $\mathbf{T}_{N,S}$ on itself. This action has a dense orbit, denoted $X^\circ_{\Sigma,S}$. In particular, the complex torus $\mathbf{T}_N(\mathbf{C}) \simeq (\mathbf{C}^*)^n$ acts

Adresses e-mail : burgos@ub.edu (J.I. Burgos Gil), pph@math.jussieu.fr (P. Philippon), martin.sombra@math.u-bordeaux1.fr (M. Sombra).
[1] Burgos Gil et Sombra ont été partiellement financés par le projet DGI MTM2006-14234-C02-01 du ministère espagnol de la recherche.

1631-073X/$ – see front matter
doi:10.1016/j.crma.2009.04.002

on the set of complex points $X_\Sigma(\mathbf{C})$. The quotient of $X_\Sigma(\mathbf{C})$ by the compact subtorus $\{t \in \mathbf{T}_N(\mathbf{C})\colon |t| = 1\}$ is the associated *variety with corners*, denoted $X_\Sigma(\mathbf{R}_{\geqslant 0})$. The dense open subset $X_\Sigma^\circ(\mathbf{R}_{\geqslant 0})$ of this variety with corners can be identified with $\mathrm{Hom}(M, \mathbf{R}_{>0})$ [6, § 4.1] and, since $N_\mathbf{R} \simeq \mathrm{Hom}(M, \mathbf{R})$, the usual exponential map gives by composition the parameterization:

$$N_\mathbf{R} \to X_\Sigma^\circ(\mathbf{R}_{\geqslant 0}), \quad u \mapsto \exp(-u).$$

A *virtual support function* is a continuous function $\Psi : N_\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ whose restriction to each of the cones of Σ is an element of M. Such a function defines an invariant Cartier divisor D_Ψ of $X_{\Sigma,S}$ or equivalently, an equivariant line bundle $L_{\Psi,S}$ together with an equivariant rational section $s_\Psi : X_{\Sigma,S} \dashrightarrow L_{\Psi,S}$ such that $\mathrm{div}(s_\Psi) = D_\Psi$, *see* [6, § 3.3 and 3.4]. The divisor D_Ψ is relatively ample if and only if Ψ is concave and restricts to different elements of M on each of the maximal cones of Σ. We will suppose this from now on. Under this assumption, the polyhedron

$$\Delta_\Psi := \big\{x \in M_\mathbf{R}\colon \langle x, y\rangle \geqslant \Psi(y) \text{ for all } y \in N_\mathbf{R}\big\} \subset M_\mathbf{R}$$

is a n-dimensional polytope. The elements of $\Delta_\Psi \cap M$ are a basis of the $\mathbf{Z}$-module $\Gamma(X_\Sigma, L_\Psi)$ of global sections of L_Ψ.

Now let K be a number field, $\mathcal{O}_K$ its ring of integers and $\mathcal{M}_K$ the set of places of K. For each place $v \in \mathcal{M}_K$ we let $\mathbf{C}_v$ denote the completion with respect to v of an algebraic closure of K. The schemes $X_{\Sigma,\mathcal{O}_K}$ and $L_{\Psi,\mathcal{O}_K}$ are $\mathcal{O}_K$-models of $X_{\Sigma,K}$ and $L_{\Psi,K}$, respectively. For each $v \in \mathcal{M}_K$, we will consider a metric $\|\cdot\|_v$ on $L_\Psi(\mathbf{C}_v)$, invariant under the action of the subtorus $\{t \in \mathbf{T}_N(\mathbf{C}_v)\colon |t|_v = 1\}$. For an Archimedean place v, the metric will be any equivariant *admissible metric*, that is, the uniform limit of a sequence of smooth and positive Hermitian metrics on $L_\Psi(\mathbf{C})$. For a finite place v, the metric will be canonically given by the integral model $L_{\Psi,\mathcal{O}_K}$. We denote by $\bar{L}_\Psi$ the line bundle metrized in this way and by $h_{\bar{L}_\Psi}$ the corresponding height function for subschemes of $X_{\Sigma,\mathcal{O}_K}$, as defined through arithmetic intersection theory [2,7,11].

We now turn to toric subschemes of $X_{\Sigma,\mathcal{O}_K}$. Let Q be a saturated sublattice of N of rank d and let $P := M/Q^\perp$ be its dual lattice. Set $Q_\mathbf{R} := Q \otimes_\mathbf{Z} \mathbf{R}$ and $P_\mathbf{R} := P \otimes_\mathbf{Z} \mathbf{R}$ and let $\mathrm{dVol}_{P_\mathbf{R}}$ be the Haar measure of $P_\mathbf{R}$ which gives volume 1 to any fundamental domain of P. The fan Σ induces a lattice fan $\Sigma_Q := \Sigma \cap Q_\mathbf{R}$ on $Q_\mathbf{R}$ and the toric scheme X_{Σ_Q} is naturally included into X_Σ. For a given K-point $\alpha \in X_\Sigma^\circ(K)$, we then consider the *toric subscheme* $Y_{Q,\alpha}$ defined as the Zariski closure in $X_{\Sigma,\mathcal{O}_K}$ of the translate $\alpha * X_{\Sigma_Q,K} \subset X_{\Sigma,K}$. The restriction of the virtual support function Ψ to Σ_Q defines the restriction of the line bundle L_Ψ to $Y_{Q,\alpha}$ together with the associated polytope

$$\Delta_Q := \big\{x \in P_\mathbf{R}\colon \langle x, y\rangle \geqslant \Psi(y) \text{ for all } y \in Q_\mathbf{R}\big\} \subset P_\mathbf{R}.$$

For each $v \in \mathcal{M}_K$, the restriction of the exponential map to the affine subspace $Q_\mathbf{R} - \log|\alpha|_v$ of $N_\mathbf{R}$ gives a parameterization of the associated variety with corners $Y_{Q,|\alpha|_v}$:

$$Q_\mathbf{R} \xrightarrow{\cdot - \log|\alpha|_v} Q_\mathbf{R} - \log|\alpha|_v \subset \mathbf{N}_\mathbf{R} \xrightarrow{\exp(-\cdot)} Y^\circ_{Q,|\alpha|_v}(\mathbf{R}_{\geqslant 0}) \subset X_\Sigma^\circ(\mathbf{R}_{\geqslant 0}).$$

The relevant function for our main result (Theorem 1.1 below) is then

$$f_{Q,\alpha,v} : Q_\mathbf{R} \to \mathbf{R}\,, \quad u \mapsto \log\big\|s_\Psi \circ \exp\big(-u + \log|\alpha|_v\big)\big\|_v,$$

which is a concave function. It actually also depends on Σ and Ψ but these parameters are supposed fixed and they are omitted from the notation. For the particular case $Y_{Q,\alpha} = X_\Sigma$, we set for short $f_v := f_{Q,\alpha,v}$. We consider its *Legendre–Fenchel dual* (*see* [10], translated to concave functions)

$$\check{f}_{Q,\alpha,v} : M_\mathbf{R} \to \mathbf{R} \cup \{-\infty\}, \quad x \mapsto \min\big\{\langle x, y\rangle - f_{Q,\alpha,v}(y)\colon y \in Q_\mathbf{R}\big\}.$$

The *stability set* of a concave function is the set of points where its Legendre–Fenchel dual is $> -\infty$. It turns out that the stability set of $f_{Q,\alpha,v}$ is the polytope Δ_Q and that $\check{f}_{Q,\alpha,v}$ is continuous and concave on Δ_Q.

Theorem 0.1. *In the above setting and notations, we have*:

$$h_{\bar{L}_\Psi}(Y_{Q,\alpha}) = (d+1)! \sum_{v \in \mathcal{M}_K} \frac{[K_v : \mathbf{Q}_v]}{[K : \mathbf{Q}]} \int_{\Delta_Q} \check{f}_{Q,\alpha,v}\, \mathrm{d\,Vol}_{P_\mathbf{R}}\,.$$

1. Introduction

L'étude des hauteurs des variétés toriques a fait l'objet de plusieurs travaux. Les premiers calculs concernent des familles d'hypersurfaces projectives pour la hauteur associée à la métrique de Fubini–Study [1,4,5]. Puis, C. Mourougane a déterminé la torsion analytique et la hauteur des surfaces de Hirzebruch [8], *voir* aussi § 3 ci-dessous. Dans une autre direction, R. Berman et S. Boucksom ont récemment déterminé la capacité analytique d'un fibré en droites hermitien sur une variété torique lisse (résultat non publié) : dans ce cadre ils montrent que « l'énergie » du fibré métrisé est égale à l'intégrale du dual de Legendre–Fenchel du logarithme de la norme d'une section, qui intervient aux places archimédiennes de notre Théorème 1.1.

D'un autre côté, la hauteur relative à la métrique canonique (ou *hauteur normalisée*) des variétés toriques projectives est exprimée en termes combinatoires dans [9]. Nous annonçons ici une généralisation de ce résultat à des métriques quelconques ; la preuve et les détails paraîtront dans [4].

Dans la suite nous reprenons les définitions et notations introduites dans la version anglaise ci-dessus.

Théorème 1.1. *Avec les notations introduites précédemment, soit Q un sous-réseau saturé de N de rang d et α un point de $X^\circ_\Sigma(K)$. Soit $Y_{Q,\alpha} \subset X_{\Sigma,K}$ le sous-schéma torique et $\Delta_Q \subset P_{\mathbf{R}}$ le polytope associés. Pour chaque place v de K notons $\check{f}_{Q,\alpha,v} : \Delta_Q \to \mathbf{R}$ le dual de Legendre–Fenchel du logarithme de la norme de la section $s_\Psi|_{Y^\circ_{Q,\alpha}}$. Alors :*

$$h_{\bar{L}_\Psi}(Y_{Q,\alpha}) = (d+1)! \sum_{v \in \mathcal{M}_K} \frac{[K_v : \mathbf{Q}_v]}{[K : \mathbf{Q}]} \int_{\Delta_Q} \check{f}_{Q,\alpha,v} \, \mathrm{d}\,\mathrm{Vol}_{P_{\mathbf{R}}}.$$

Ce résultat est un analogue arithmétique de l'identité

$$\deg_{L_\Psi}(Y_{Q,\alpha}) = d!\,\mathrm{Vol}_{P_{\mathbf{R}}}(\Delta_Q). \tag{1}$$

Sa démonstration repose sur une comparaison du comportement des deux membres de l'égalité lors de l'intersection par des diviseurs toriques [3]. L'expression des termes locaux de la hauteur comme intégrale sur un polytope permet, dans certains cas, de les calculer explicitement, *voir* par exemple le Corollaire 2.2 et la formule (2) du § 2 ainsi que la Proposition 3.1, ci-dessous.

Pour chaque place $v \in \mathcal{M}_K$, la fonction $f_{Q,\alpha,v} : N_{\mathbf{R}} \to \mathbf{R}$ encode la géométrie du fibré en droites métrisé $\bar{L}_\Psi$ au dessus du sous-schéma $Y_{Q,\alpha}$. Cette famille adélique de fonctions concaves semble jouer en géométrie arithmétique des schémas toriques, le rôle du polytope dans la géométrie algébrique de ces schémas.

Dans cette direction, nous montrons aussi que pour chaque place v, la fonction duale $\check{f}_{Q,\alpha,v}$ donne la norme du supremum des sections monomiales : $\|s\|_{v,\sup} := \sup_{x \in Y_{Q,\alpha}(\mathbf{C}_v)} \|s(x)\|$. Rappelons que ces sections monomiales entières du fibré en droites $\bar{L}_\Psi|_{Y_{Q,\alpha,v}}$ correspondent aux points de polytope $\Delta_\Psi \cap M$.

Proposition 1.2. *Pour $a \in \Delta_\Psi \cap M$, s_a la section monomiale associée et v une place de K on a $\log \|s_a\|_{v,\sup} = \check{f}_{Q,\alpha,v}(a)$.*

2. Hauteurs des courbes toriques projectives

Dans ce paragraphe, nous explicitons et précisons les résultats précédents pour les sous-schémas toriques de l'espace projectif. Pour $n \geqslant 1$ on désigne par $e_1, \dots, e_n$ la base standard de $\mathbf{R}^n$. Considérons l'éventail $\Sigma_n \subset N_{\mathbf{R}} = \mathbf{R}^n$ engendré par les vecteurs $e_1, \dots, e_n$ et $-(e_1 + \cdots + e_n)$, ainsi que la fonction support virtuelle $\Psi_n : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}, u \mapsto \min\{0, u_0, \dots, u_n\}$. Ces données définissent l'espace projectif $\mathbf{P}^n$ comme une variété torique munie du diviseur correspondant à l'hyperplan à l'infini. Le polytope associé est le simplexe standard $S_n := \Delta_{\Psi_n} = \mathrm{Conv}(0, e_1, \dots, e_n) \subset \mathbf{R}^n$.

Considérons à présent une matrice $A = (a_{i,j})_{i,j} \in \mathbf{Z}^{n \times d}$ telle que $Q := A \cdot \mathbf{Z}^d \subset N = \mathbf{Z}^n$ soit un sous-module saturé de rang d ($0 \leqslant d \leqslant n$). La surjection $\pi_Q : M_{\mathbf{R}} \to P_{\mathbf{R}} \simeq M_{\mathbf{R}}/Q^\perp_{\mathbf{R}}$ s'écrit donc :

$$\pi_Q(x_1, \dots, x_n) = \left(\sum_{i=1}^n a_{i,1} x_i, \dots, \sum_{i=1}^n a_{i,d} x_i \right).$$

Pour un corps de nombres K et un point $\alpha \in (\mathbf{P}^n)^\circ(K)$ on considère le sous-schéma torique associé $Y_{Q,\alpha} \subset \mathbf{P}^n_{\mathbf{Z}}$. Pour $y \in Q_{\mathbf{R}}$ on a $f_{Q,\alpha,v}(y) = f_v(y - \log|\alpha|_v)$ et l'ensemble de stabilité de $f_{Q,\alpha,v}$ est le polytope $\Delta_Q = \pi_Q(S_n)$, image par π_Q du simplexe standard. La fonction $\check{f}_{Q,\alpha,v}$ s'évalue *via* $\check{f}_v$ de la manière suivante :

Proposition 2.1. *Avec les notations introduites, pour chaque $v \in \mathcal{M}_K$ et $x \in \Delta_Q$ on a :*

$$\check{f}_{Q,\alpha,v}(x) = \max\bigl\{\check{f}_v(x') + \langle x', \log|\alpha|_v\rangle \colon\ x' \in \pi_Q^{-1}(x)\bigr\}.$$

Munissons le fibré en droites universel $O(1)$ de la métrique de Fubini–Study. Notons $a_1, \dots, a_n \in \mathbf{Z}^d$ (*resp.* $b_1, \dots, b_d \in \mathbf{Z}^n$) les vecteurs lignes (*resp.* colonnes) de la matrice A associée à Q. On a $Q = A \cdot \mathbf{Z}^d = \mathbf{Z}b_1 + \dots + \mathbf{Z}b_d$ et on identifie $P_{\mathbf{R}}$ à $\mathbf{R}^d$ *via* la base $(\check{b}_1, \dots, \check{b}_d)$ duale de $(b_1, \dots, b_d)$. Pour tout $v \in \mathcal{M}_K$, la fonction $f_{Q,\alpha,v}$ s'écrit comme $f_{Q,\alpha,v}(A \cdot z) = F_v(z)$ pour $z \in \mathbf{R}^d$, où :

$$F_v(z) := \begin{cases} -\frac{1}{2}\log(1 + \sum_{i=1}^n |\alpha_i|_v^2 \mathrm{e}^{-2\langle a_i, z\rangle}) & \text{si } v \text{ est archimédienne,} \\ \min_{i=1,\dots,n}(0, \langle a_i, z\rangle + \log|\alpha_i|_v) & \text{si } v \text{ est finie.} \end{cases}$$

Pour $1 \leqslant j \leqslant d$, posons

$$H_{j,v}(z) := \frac{\partial F_v}{\partial z_j}(z), \qquad G_v(z) := F_v(z) - \sum_{j=1}^d z_j H_{j,v}(z),$$

de sorte que lorsque v est archimédienne, $H_{1,v}(z)\check{b}_1 + \dots + H_{d,v}(z)\check{b}_d$ paramètre $\Delta_Q \subset P_{\mathbf{R}}$, tandis que lorsque v est finie c'est une fonction en escalier sur $\mathbf{R}^d$ à valeurs dans Δ_Q. Dans ce dernier cas, le point $H_{1,v}(z)\check{b}_1 + \dots + H_{d,v}(z)\check{b}_d$ est le barycentre du sous-polytope de Δ_Q associé à l'angle du graphe de $f_{Q,\alpha,v}$ en $z_1 b_1 + \dots + z_d b_d$. Dans tous les cas, on a $G_v(z) = \check{f}_{Q,\alpha,v}(H_{1,v}(z), \dots, H_{d,v}(z))$ et on notera $\mathrm{d}H_{j,v}$ les courants dérivés. Le corollaire suivant est une reformulation équivalente du Théorème 1.1 pour la hauteur relative à la métrique de Fubini–Study des schémas toriques projectifs :

Corollaire 2.2. *La hauteur de $Y_{Q,\alpha}$ relative à la métrique de Fubini–Study est*

$$h_{\bar{L}_\Psi}(Y_{Q,\alpha}) = (d+1)! \sum_{v \in \mathcal{M}_K} \frac{[K_v : \mathbf{Q}_v]}{[K : \mathbf{Q}]} \int_{\mathbf{R}^d} G_v \,\mathrm{d}H_{1,v} \wedge \dots \wedge \mathrm{d}H_{d,v}.$$

Dans le cas des courbes ($d = 1$), les intégrales du Corollaire 2.2 ci-dessus s'explicitent. Notons $E_v \subset \overline{\mathbf{Q}}_v$ l'ensemble des racines (répétées autant de fois que leur multiplicité) du polynôme $1 + \alpha_1 x + \dots + \alpha_n x^{a_n}$ si v est finie et de celles du polynôme $1 + |\alpha_1|_v^2 x + \dots + |\alpha_n|_v^2 x^{a_n}$ si v est archimédienne. Alors, posant pour $(\xi, \xi') \in E_v^2$:

$$\eta_v(\xi, \xi') := \begin{cases} \max(0, \log|\xi/\xi'|_v) & \text{si } v \text{ est finie,} \\ \frac{1}{4} \cdot \frac{\xi+\xi'}{\xi-\xi'} \cdot \log(\xi/\xi') & \text{si } v \text{ est archimédienne et } \xi \neq \xi', \\ \frac{1}{2} & \text{si } v \text{ est archimédienne et } \xi = \xi', \end{cases}$$

on obtient

$$h_{\bar{L}_\Psi}(Y_{Q,\alpha}) = \sum_v \frac{[K_v : \mathbf{Q}_v]}{[K : \mathbf{Q}]} \sum_{(\xi,\xi') \in E_v^2} \eta_v(\xi, \xi'). \tag{2}$$

Par exemple, on peut considérer la droite $Q_{\mathbf{R}} \subset \mathbf{R}^n$ engendrée par le vecteur $e_1 + 2e_2 + \dots + ne_n$. La sous-variété torique associée est la *courbe normale rationnelle* $C_n \subset \mathbf{P}^n$ de degré n pour laquelle on a, dans les notations précédentes, $(a_1, \dots, a_n) = (1, 2, \dots, n)$ et $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = (1, \dots, 1)$. On déduit de la formule (2) l'expression :

$$h(C_n) = \frac{n}{2} + \pi \cdot \sum_{j=1}^{\lfloor n/2 \rfloor} \left(1 - \frac{2j}{n+1}\right) \cot\left(\frac{\pi j}{n+1}\right) \in \frac{n}{2} + \pi \cdot \overline{\mathbf{Q}}. \tag{3}$$

3. Hauteurs des fibrés toriques

Il s'agit des schémas du type $\mathbf{P}(E) \to \mathbf{P}^n_{\mathbf{Z}}$, fibré projectif des quotients de rang 1 du fibré vectoriel

$$E := O_{\mathbf{P}^n_{\mathbf{Z}}}(a_0) \oplus O_{\mathbf{P}^n_{\mathbf{Z}}}(a_1) \oplus \cdots \oplus O_{\mathbf{P}^n_{\mathbf{Z}}}(a_r) \longrightarrow \mathbf{P}^n_{\mathbf{Z}}$$

pour $a_0, a_1, \ldots, a_r \in \mathbf{Z}$ donnés. Un tel fibré projectif $\mathbf{P}(E)$ est un schéma torique lisse et propre sur $\mathrm{Spec}(\mathbf{Z})$, de dimension relative $n+r$, *voir* [6, p. 42]. Le cas particulier $n = r = 1$ correspond aux surfaces de Hirzebruch : on a $\mathbf{P}(O_{\mathbf{P}^1_{\mathbf{Z}}}(a_0) \oplus O_{\mathbf{P}^1_{\mathbf{Z}}}(a_1)) \simeq \mathbf{P}(O_{\mathbf{P}^1_{\mathbf{Z}}}(0) \oplus O_{\mathbf{P}^1_{\mathbf{Z}}}(a_1 - a_0)) = \mathcal{H}_{a_1 - a_0}$.

Considérons le diviseur de Cartier $D := a_0 D_0 + D_1$ de $\mathbf{P}(E)$, où D_0 désigne l'image inverse dans $\mathbf{P}(E)$ de l'hyperplan à l'infini de $\mathbf{P}^n_{\mathbf{Z}}$ et $D_1 := \mathbf{P}(0 \oplus O(a_1) \oplus \cdots \oplus O(a_r))$. Le fibré en droites associé est le fibré tautologique de $\mathbf{P}(E)$, noté $O_{\mathbf{P}(\mathbf{E})}(1)$. Ce fibré est naturellement muni d'une métrique équivariante $\|\cdot\|$ qui est induite par la somme orthogonale des métriques de Fubini–Study sur les facteurs $O(a_i)$. La fonction associée à ce diviseur et à cette métrique s'explicite alors comme

$$f_\infty : \mathbf{R}^{n+r} \to \mathbf{R}, \quad (u, v) \mapsto -\frac{1}{2} \log\left(\left(1 + \sum_{i=1}^{n} \mathrm{e}^{-2u_i}\right)^{a_0} + \sum_{j=1}^{r} \mathrm{e}^{-2v_j}\left(1 + \sum_{i=1}^{n} \mathrm{e}^{-2u_i}\right)^{a_j}\right).$$

Supposons maintenant $1 \leqslant a_0 \leqslant a_1 \leqslant \cdots \leqslant a_r$, ce qui entraîne que le diviseur est ample et que la métrique est positive. Le polytope associé est

$$\Delta = \left\{(z, w) \in \mathbf{R}^{n+r}\colon\ w_1, \ldots, w_r \geqslant 0,\ \sum_{i=1}^{r} w_i \leqslant 1,\ z_1, \ldots, z_n \geqslant 0,\ \sum_{j=1}^{n} z_j \leqslant L(w)\right\}$$

où $L(w) := a_0 + \sum_{\ell=1}^{r} (a_\ell - a_0) w_\ell$, et le dual de Legendre–Fenchel de la fonction f_∞ s'explicite comme

$$\check{f}_\infty : \Delta \to \mathbf{R}, \quad (z, w) \mapsto -\frac{1}{2}\left(\varepsilon_r(w_1, \ldots, w_r) + L(w) \cdot \varepsilon_n\left(\frac{z_1}{L(w)}, \ldots, \frac{z_n}{L(w)}\right)\right)$$

où $\varepsilon_p(t_1, \ldots, t_p) := \sum_{j=1}^{p} t_j \log(t_j) + (1 - \sum_{j=1}^{p} t_j) \log(1 - \sum_{j=1}^{p} t_j)$. En outre, les fonctions $\check{f}_v$ correspondant aux places finies sont identiquement nulles. L'identité (1) et le Théorème 1.1 entraînent alors

$$\deg_{O_{\mathbf{P}(E)}(1)}\bigl(\mathbf{P}(E)\bigr) = (n+r)!\,\mathrm{Vol}_{n+r}(\Delta), \qquad h_{(O_{\mathbf{P}(E)}(1), \|\cdot\|)}\bigl(\mathbf{P}(E)\bigr) = (n+r+1)! \int_{\Delta} \check{f}_\infty \,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}w.$$

Après calcul des intégrales on obtient :

Proposition 3.1. *Avec la notation et les hypothèses introduites, on a* :

$$\deg_{O_{\mathbf{P}(E)}(1)}\bigl(\mathbf{P}(E)\bigr) = \sum_{\substack{i_0, \ldots, i_r \in \mathbf{N} \\ i_0 + \cdots + i_r = n}} a_0^{i_0} \cdots a_r^{i_r} \in \mathbf{N}^\times,$$

$$h_{(O_{\mathbf{P}(E)}(1), \|\cdot\|)}\bigl(\mathbf{P}(E)\bigr) = \Biggl(\sum_{\substack{i_0, \ldots, i_r \in \mathbf{N} \\ i_0 + \cdots + i_r = n+1}} a_0^{i_0} \cdots a_r^{i_r}\Biggr) h\bigl(\mathbf{P}^n_{\mathbf{Z}}\bigr) + \sum_{\substack{i_0, \ldots, i_r \in \mathbf{N} \\ i_0 + \cdots + i_r = n}} a_0^{i_0} \cdots a_r^{i_r} A_{n,r}(i_0, \ldots, i_r) \in \mathbf{Q},$$

où $h(\mathbf{P}^n_{\mathbf{Z}}) = \sum_{h=1}^{n} \sum_{j=1}^{h} \frac{1}{2j}$ *est la hauteur de l'espace projectif relative à la métrique de Fubini–Study et* $A_{n,r}(i_0, \ldots, i_r) := \sum_{m=0}^{r} (i_m + 1) \sum_{j=i_m+2}^{n+r+1} \frac{1}{2j}$.

En posant $n = r = 1$, $a_0 = 1$ et $a_1 = b + 1$, on retrouve l'expression pour la hauteur des surfaces de Hirzebruch établie dans [8] : $h(\mathcal{H}_b) = \frac{1}{2}b^2 + \frac{9}{4}b + 3$.

Références

[1] C. Berenstein, A. Yger, Green currents and analytic continuation, J. Anal. Math. 75 (1998) 1–50.
[2] J.-B. Bost, H. Gillet, C. Soulé, Heights of projective varieties and positive Green forms, J. Amer. Math. Soc. 7 (1994) 903–1027.
[3] J.I. Burgos Gil, P. Philippon, M. Sombra, The height of a toric variety, tapuscrit, 2008.
[4] J. Cassaigne, V. Maillot, Hauteur des hypersurfaces et fonctions zêta d'Igusa, J. Number Theory 83 (2000) 226–255.
[5] N. Dan, La hauteur des quadriques, C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. I Math. 324 (1997) 1323–1326.
[6] W. Fulton, Introduction to Toric Varieties, Ann. Math. Studies, vol. 131, Princeton Univ. Press, 1993.
[7] V. Maillot, Géométrie d'Arakelov des variétés toriques et fibrés en droites intégrables, Mém. Soc. Math. France, vol. 80, 2000.
[8] C. Mourougane, Analytic torsion of Hirzebruch surfaces, Math. Ann. 335 (2006) 221–247.
[9] P. Philippon, M. Sombra, Hauteur normalisée des variétés toriques projectives, J. Inst. Math. Jussieu 7 (2008) 327–373.
[10] R.T. Rockafellar, Convex Analysis, Princeton Univ. Press, 1970.
[11] S.-W. Zhang, Small points and adelic metrics, J. Algebraic Geom. 4 (1995) 281–300.