Available online at www.sciencedirect.com

ScienceDirect

C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 346 (2008) 357–362

COMPTES RENDUS MATHEMATIQUE

http://france.elsevier.com/direct/CRASS1/

Analyse numérique

Un algorithme de type Robin pour des problèmes de contact unilatéral

Mohamed Ipopa, Taoufik Sassi

Laboratoire de mathématiques Nicolas-Oresme, LMNO, université de Caen, bâtiment science, 3, avenue du Maréchal-Juin, 14032 Caen cedex, France

Reçu le 3 juin 2007 ; accepté après révision le 23 janvier 2008

Présenté par Olivier Pironneau

Résumé

Dans cette Note, nous proposons un algorithme de décomposition de domaine de type Robin pour résoudre numériquement un problème de contact unilatéral sans frottement entre deux corps élastiques. Cet algorithme combine sur l'interface Γ_c des conditions aux limites de type Dirichlet et de Neumann (condition de Robin). L'originalité de cet algorithme est la résolution de la même inéquation variationnelle sur chaque sous-domaine. ***Pour citer cet article : M. Ipopa, T. Sassi, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 346 (2008).***

Abstract

A Robin algorithm for unilateral contact problems. In this Note, we propose a Robin domain decomposition algorithm to approximate a frictionless unilateral problem between two elastic bodies. Indeed, this algorithm combines on the contact zone the Dirichlet and Neumann boundaries conditions (Robin boundary condition). The primary feature of this algorithm is the resolution of the same variational inequality on each sub-domain. ***To cite this article: M. Ipopa, T. Sassi, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 346 (2008).***

Abridged English version

We consider a Signorini problem between two elastic bodies Ω^α, $\alpha = 1, 2$, where the contact interface is Γ_c. Assuming linear elasticity behavior and classical boundary conditions, the problem is given by (1)–(4).

The aim of this Note is to present and study a efficient iterative schemes based on domain decomposition techniques for a non-linear problem modeling the frictionless contact of linear elastic bodies. A key point in this algorithm is the choice of α_S in (6):

– α_S is non-negative constant. It is the simplest choice but leads to an h-independent algorithm which is very sensitive to boundary conditions.

Adresses e-mail : ipopa.mohamed@math.unicaen.fr (M. Ipopa), taoufik.sassi@math.unicaen.fr (T. Sassi).

1631-073X/$ – see front matter
doi:10.1016/j.crma.2008.02.003

– α_S is the Steklov–Poincaré operator defined on the interface Γ_c^α of Ω^α, introduced in [1]. This operator is not practical if the domains Ω^α are too large, but it has interesting features. Mainly, it can be defined for any geometry and for any elliptic operator, including three-dimensional anisotropic heterogeneous elasticity, and it is a coercive positive selfadjoint operator. For our problem, this choice leads to the following three-step algorithm (Q_m) in which δ is a non-negative parameter that will be determined in order to ensure the convergence of the algorithm, and P^α is an extension of traces which is defined by (14).

Given $g_0^\alpha \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_c), \alpha = 1, 2$, for $m \geqslant 1$, we build the sequence of functions $(u_m^1)_{m\geqslant 0} \in V^1$ and $(\boldsymbol{u}_m^2)_{m\geqslant 0} \in V^2$, by solving the following problems:

$$(Q_m)\quad \begin{cases} \underline{1st\ step}\text{: Find } \boldsymbol{u}_m^\alpha \in V_-^\alpha(-g_{m-1}^\alpha), \\ a^\alpha(\boldsymbol{u}_m^\alpha, \boldsymbol{w}^\alpha + P^\alpha(g_{m-1}^\alpha) - \boldsymbol{u}_m^\alpha) \geqslant (\boldsymbol{f}^\alpha, \boldsymbol{w}^\alpha + P^\alpha(g_{m-1}^\alpha) - \boldsymbol{u}_m^\alpha) \quad \forall \boldsymbol{w}^\alpha \in V_-^\alpha(0). \\ \underline{2nd\ step}\text{: Find } \boldsymbol{w}_m^1 \in V^1, \\ a^1(\boldsymbol{w}_m^1, \boldsymbol{v}) = -a^2(\boldsymbol{u}_m^2, P^2(\gamma \boldsymbol{v})) + (\boldsymbol{f}^2, P^2(\gamma \boldsymbol{v})) + a^1(\boldsymbol{u}_m^1, \boldsymbol{v}) - (\boldsymbol{f}^1, \boldsymbol{v}) \quad \forall \boldsymbol{v} \in V^1. \\ \text{Find } \boldsymbol{w}_m^2 \in V^2, \\ a^2(\boldsymbol{w}_m^2, \boldsymbol{v}) = -a^1(\boldsymbol{u}_m^1, P^1(\gamma \boldsymbol{v})) + (\boldsymbol{f}^1, P^1(\gamma \boldsymbol{v})) + a^2(\boldsymbol{u}_m^2, \boldsymbol{v}) - (\boldsymbol{f}^2, \boldsymbol{v}) \quad \forall \boldsymbol{v} \in V^2. \\ \underline{3rd\ step}\text{:} \\ \boldsymbol{g}_m^1 = (1-\delta)\boldsymbol{g}_{m-1}^1 + \delta(\boldsymbol{w}_m^2 \boldsymbol{n}^2 - \boldsymbol{u}_m^2 \boldsymbol{n}^2) \quad \text{on } \Gamma_c, \\ \boldsymbol{g}_m^2 = (1-\delta)\boldsymbol{g}_{m-1}^2 + \delta(\boldsymbol{w}_m^1 \boldsymbol{n}^1 - \boldsymbol{u}_m^1 \boldsymbol{n}^1) \quad \text{on } \Gamma_c. \end{cases}$$

In this paper, we prove the equivalence between the multibody formulation (Q_m) and (1)–(4) by showing that the solution of (Q_m) is the solution of (1)–(4).

1. Introduction

Les problèmes de contact et d'impact, du fait de leurs fortes présences dans les phénomènes physiques qui nous entourent, occupent une part non négligeable en calcul de structures. Ils conduisent souvent à la résolution des systèmes non linéaires de grandes tailles. Nous proposons une nouvelle méthode de décomposition de domaine sans recouvrement qui consiste à adapter les conditions de raccord de type Robin au cadre du contact sans frottement. Comme dans le cas de [2,6,3], l'interface numérique de résolution correspond à la décomposition physique du problème avec cependant l'avantage de résoudre le même type de problème dans chaque sous-domaine.

Dans ce qui suit, nous allons donner la formulation multidomaine dont découle notre algorithme et son écriture sous forme variationnelle. La dernière partie du travail sera consacrer à prouver l'équivalence entre la solution obtenue par l'algorithme (Q_m) et la solution du problème initial (1)–(4).

On considère deux matériaux élastiques, occupant deux domaines $\overline{\Omega}^\alpha$, $\alpha = 1, 2$, de $\mathbb{R}^2$, susceptibles d'entrer en contact unilatéral sans frottement à travers une zone $\Gamma_c = \Gamma_c^1 = \Gamma_c^2$. Le problème étudié consiste à trouver le déplacement $\boldsymbol{u} = (\boldsymbol{u}^1, \boldsymbol{u}^2)$ et la contrainte $\sigma(\boldsymbol{u}) = (\sigma(\boldsymbol{u}^1), \sigma(\boldsymbol{u}^2))$ tels que :

$$\begin{cases} \operatorname{div}\sigma(\boldsymbol{u}^\alpha) + \boldsymbol{f}^\alpha = 0 & \text{dans } \Omega^\alpha, \\ \sigma(\boldsymbol{u}^\alpha)\boldsymbol{n}^\alpha = \varphi_\ell^\alpha & \text{sur } \Gamma_\ell^\alpha, \\ \boldsymbol{u}^\alpha = 0 & \text{sur } \Gamma_{\boldsymbol{u}}^\alpha, \end{cases} \tag{1}$$

où $\Gamma_{\boldsymbol{u}}^\alpha, \Gamma_\ell^\alpha, \Gamma_c^\alpha$ forment une partition de la frontière $\Gamma^\alpha = \partial\Omega^\alpha$, avec $\operatorname{mes}(\Gamma_{\boldsymbol{u}}^\alpha) > 0$. Les forces $\boldsymbol{f} = (\boldsymbol{f}^1, \boldsymbol{f}^2)$ et $\varphi_\ell = (\varphi_\ell^1, \varphi_\ell^2)$ sont des données régulières. La loi de comportement élastique, sous les hypothèses habituelles de coercivité, est :

$$\sigma_{ij}(\boldsymbol{u}^\alpha) = A_{ijkh}^\alpha e_{kh}(\boldsymbol{u}^\alpha), \quad \text{avec } e(\boldsymbol{u}) = \frac{1}{2}(\nabla \boldsymbol{u} + \nabla \boldsymbol{u}^T), \tag{2}$$

où A^α est la matrice de rigidité du corps élastique occupant le domaine $\overline{\Omega}^\alpha$.

On définit la composante normale du déplacement $\boldsymbol{u}^\alpha$ et le déplacement normal relatif d'un solide par rapport à l'autre sur la zone de contact Γ_c par : $\boldsymbol{u}_N^\alpha = u_i^\alpha n_i^\alpha et [\boldsymbol{u}_N] = \boldsymbol{u}^1\boldsymbol{n}^1 + \boldsymbol{u}^2\boldsymbol{n}^2$, où $\boldsymbol{n}^\alpha$ est la normale unitaire extérieure à Ω^α. Les composantes normales et tangentielles du tenseur de contraintes σ^α sont définies, avec la convention des indices répétés, par :

$$\sigma_N^\alpha = \sigma_{ij}(\boldsymbol{u}^\alpha) n_i^\alpha n_j^\alpha \quad \text{et} \quad \sigma_T^\alpha = \sigma_{ij}(\boldsymbol{u}^\alpha) n_j^\alpha - \sigma_N^\alpha n_i^\alpha.$$

Les conditions sur Γ_c pour un contact unilatéral sans frottement sont :

$$\sigma_N^1 = \sigma_N^2 = \sigma_N, \qquad \sigma_T^1 = \sigma_T^2 = 0, \tag{3}$$

$$[\boldsymbol{u}_N] \leqslant 0, \quad \sigma_N \leqslant 0, \quad \sigma_N \cdot [\boldsymbol{u}_N] = 0. \tag{4}$$

Les relations (1)–(4) constituent le problème de Signorini.

Soit $V^\alpha = \{\boldsymbol{v}^\alpha \in (H^1(\Omega^\alpha))^2, \boldsymbol{v}^\alpha = 0 \text{ sur } \Gamma_u^\alpha\}$, l'ensemble des déplacements admissibles, l'écriture variationnelle du problème global (1)–(4) est alors :

$$\begin{cases} \text{Trouver } \boldsymbol{u} \in K \text{ tel que :} \\ a(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} - \boldsymbol{u}) \geqslant L(\boldsymbol{v} - \boldsymbol{u}), \quad \forall \boldsymbol{v} \in K, \end{cases} \tag{5}$$

où K est le convexe fermé de V défini par $\{\boldsymbol{v} \in V = V^1 \times V^2, [\boldsymbol{v}_N] \leqslant 0 \ p.p. \text{ sur } \Gamma_c\}$,

$$a^\alpha(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = \int_{\Omega^\alpha} A_{ijkl}^\alpha e_{ij}(\boldsymbol{u}) e_{kl}(\boldsymbol{v}) \, \mathrm{d}x, \qquad a(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = \sum_{\alpha=1}^{2} a^\alpha(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}),$$

les formes bilinéaires continues et coercives,

$$L(\boldsymbol{v}) = \int_{\Omega^\alpha} \boldsymbol{f} \boldsymbol{v} \, \mathrm{d}x + \int_{\Gamma_l^\alpha} \varphi_\ell \boldsymbol{v} \, \mathrm{d}\gamma,$$

la forme linéaire continue.

Le problème (5) admet une solution unique (voir par exemple [8]).

2. Formulation multidomaine et algorithme

Les méthodes proposées dans [2,3,6] utilsent pour la résolution de (1)–(4), un processus non intuitif. En effet, on résout dans chacun des sous-domaines, des problèmes de type différents. L'idée de cette méthode est de résoudre un problème de même type dans chaque sous-domaines, plus précisément, un problème de type contact.

Sur l'interface Γ_c on combine, les efforts normaux et les déplacements de la façon suivante :

$$\begin{cases} g^1 = \alpha_S(\sigma_N^2 - \sigma_N^1) - \boldsymbol{u}^2\boldsymbol{n}^2 & \text{sur } \Gamma_c, \\ g^2 = \alpha_S(\sigma_N^1 - \sigma_N^2) - \boldsymbol{u}^1\boldsymbol{n}^1 & \text{sur } \Gamma_c. \end{cases} \tag{6}$$

On en déduit une relation entre g^1 et g^2 :

$$\begin{cases} g^1 = -g^2 - \boldsymbol{u}^1\boldsymbol{n}^1 - \boldsymbol{u}^2\boldsymbol{n}^2, \\ g^2 = -g^1 - \boldsymbol{u}^2\boldsymbol{n}^2 - \boldsymbol{u}^1\boldsymbol{n}^1. \end{cases} \tag{7}$$

On cherche alors à résoudre (1)–(4) en résolvant dans chaque sous-domaine le problème :

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(\sigma(\boldsymbol{u}^\alpha)) = \boldsymbol{f}^\alpha & \text{dans } \Omega^\alpha, \\ \sigma(\boldsymbol{u}^\alpha)\boldsymbol{n}^\alpha = \varphi_\ell^\alpha & \text{sur } \Gamma_\ell^\alpha, \\ \boldsymbol{u}^\alpha = 0 & \text{sur } \Gamma_{\boldsymbol{u}}^\alpha, \\ \boldsymbol{u}^\alpha\boldsymbol{n}^\alpha \leqslant g^\alpha, \quad \sigma_N^\alpha \leqslant 0, \quad \sigma_T^\alpha = 0 & \text{sur } \Gamma_c, \\ \sigma_N^\alpha(\boldsymbol{u}^\alpha\boldsymbol{n}^\alpha - g^\alpha) = 0 & \text{sur } \Gamma_c, \end{cases} \tag{8}$$

dont la formulation variationnelle est :

$$\begin{cases} \text{Trouver } \boldsymbol{u}^\alpha \in K^\alpha \text{ tel que :} \\ a^\alpha(\boldsymbol{u}^\alpha, \boldsymbol{v} - \boldsymbol{u}^\alpha) \geqslant (\boldsymbol{f}^\alpha, \boldsymbol{v} - \boldsymbol{u}^\alpha) \quad \forall \boldsymbol{v} \in K^\alpha, \end{cases} \tag{9}$$

avec $K^\alpha = \{\boldsymbol{v} \in V^\alpha, \boldsymbol{v}\boldsymbol{n}^\alpha \leqslant g^\alpha\, p.p. \text{ sur } \Gamma_c\}$.

Nous proposons d'appliquer l'algorithme suivant : $\forall m \in \mathbb{N}^*$, $g_0^\alpha \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_c)$, $\alpha = 1, 2$, donné, on résout

étape 1

$$\begin{cases} \text{Trouver } \boldsymbol{u}_m^\alpha \in V_-^\alpha(-\boldsymbol{g}_{m-1}^\alpha) \text{ tel que :} \\ a^\alpha(\boldsymbol{u}_m^\alpha, \boldsymbol{v}^\alpha + P^\alpha(\boldsymbol{g}_{m-1}^\alpha) - \boldsymbol{u}_m^\alpha) \geqslant (\boldsymbol{f}^\alpha, \boldsymbol{v}^\alpha + P^\alpha(\boldsymbol{g}_{m-1}^\alpha) - \boldsymbol{u}_m^\alpha) \quad \forall \boldsymbol{v}^\alpha \in V_-^\alpha(0). \end{cases} \tag{10}$$

étape 2

$$\begin{cases} \text{Trouver } \boldsymbol{w}_m^1 \in V^1, \\ a^1(\boldsymbol{w}_m^1, \boldsymbol{v}) = -a^2(\boldsymbol{u}_m^2, P^2(\gamma \boldsymbol{v})) + (\boldsymbol{f}^2, P^2(\gamma \boldsymbol{v})) + a^1(\boldsymbol{u}_m^1, \boldsymbol{v}) - (\boldsymbol{f}^1, \boldsymbol{v}) \quad \forall \boldsymbol{v} \in V^1. \end{cases} \tag{11}$$

$$\begin{cases} \text{Trouver } \boldsymbol{w}_m^2 \in V^2, \\ a^2(\boldsymbol{w}_m^2, \boldsymbol{v}) = -a^1(\boldsymbol{u}_m^1, P^1(\gamma \boldsymbol{v})) + (\boldsymbol{f}^1, P^1(\gamma \boldsymbol{v})) + a^2(\boldsymbol{u}_m^2, \boldsymbol{v}) - (\boldsymbol{f}^2, \boldsymbol{v}) \quad \forall \boldsymbol{v} \in V^2. \end{cases} \tag{12}$$

étape 3

$$\begin{cases} g_m^1 = (1-\delta) g_{m-1}^1 + \delta(\boldsymbol{w}_m^2 \boldsymbol{n}^2 - \boldsymbol{u}_m^2 \boldsymbol{n}^2) \quad \text{sur } \Gamma_c, \\ g_m^2 = (1-\delta) g_{m-1}^2 + \delta(\boldsymbol{w}_m^1 \boldsymbol{n}^1 - \boldsymbol{u}_m^1 \boldsymbol{n}^1) \quad \text{sur } \Gamma_c, \end{cases} \tag{13}$$

où γ est l'application trace usuelle , $V_-^\alpha(\psi) = \{\boldsymbol{v} \in V^\alpha \mid \boldsymbol{v}\boldsymbol{n}^\alpha \leqslant -\psi \text{ sur } \Gamma_c^\alpha\}$, P^α est le relèvement normal :

$$\begin{aligned} P^\alpha : H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_c) &\longrightarrow V^\alpha, \\ \psi &\longrightarrow P^\alpha \psi = \boldsymbol{v}^\alpha, \end{aligned} \tag{14}$$

avec $\boldsymbol{v}^\alpha$ solution de

$$\begin{cases} a^\alpha(\boldsymbol{v}^\alpha, \boldsymbol{w}) = 0 & \forall \boldsymbol{w} \in V^\alpha \text{ tel que } \boldsymbol{w}_N = 0 \text{ sur } \Gamma_c \cup \Gamma_{\boldsymbol{u}}^\alpha, \\ \boldsymbol{v}^\alpha \boldsymbol{n}^\alpha = \psi & \text{sur } \Gamma_c, \end{cases}$$

et $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_c) = \{\varphi \in L^2(\Gamma_c);\ \exists v \in H^1(\Omega^\alpha);\ \gamma v_{|\Gamma_c} = \varphi\}$.

Remarque 1. Dans l'expression (6), $\boldsymbol{u}^\alpha$ est une trace appartenant à l'espace $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_c)$ et $(\sigma_N^1 - \sigma_N^2)$ est un effort appartenant au dual de $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_c)$. D'où la nécessité de considérer α_S comme un opérateur de Steklov–Poincaré [1]. Ceci améliore et stabilise la convergence de la méthode (voir [7]). En effet, si α_S est une constante positive, on constate que l'algorithme n'est pas stable et en particulier que sa convergence dépend du pas de discrétisation h [7].

Remarque 2. Pour simplifier, on prend $\varphi_\ell = 0$ dans (10)–(12).

3. Equivalence

Dans cette partie, nous allons démontrer que la solution obtenue par (10)–(13) est bien solution du problème initial (1)–(4). A cet effet, on démontre la proposition suivante :

Proposition 3.1. *Le problème* (5) *est équivalent aux problèmes* :

$$\begin{cases} \textit{Trouver } \boldsymbol{u}^2 \in V^2 \textit{ tel que} \\ a^2(\boldsymbol{u}^2, \boldsymbol{v}) = (\boldsymbol{f}^2, \boldsymbol{v}) + a^1(\boldsymbol{u}^1, P^1\gamma \boldsymbol{v}) - (\boldsymbol{f}^1, P^1 \gamma \boldsymbol{v}), \quad \forall \boldsymbol{v} \in V^2, \end{cases} \tag{15}$$

et

$$\begin{cases} \textit{Trouver } \boldsymbol{u}^1 \in V_-^1(\boldsymbol{u}_N^2) \textit{ tel que :} \\ a^1(\boldsymbol{u}^1, \boldsymbol{v} - \boldsymbol{u}^1) \geqslant (\boldsymbol{f}^1, \boldsymbol{v} - \boldsymbol{u}^1), \quad \forall \boldsymbol{v} \in V_-^1(\boldsymbol{u}_N^2). \end{cases} \tag{16}$$

Démonstration. Cf. [2] ou [3] en remplaçant R_D^2 par P^2 et en prenant comme fonction test $\forall \boldsymbol{v}^2 \in V^2, \tilde{\boldsymbol{v}} = \pm(-P^1\gamma \boldsymbol{v}^2, \boldsymbol{v}^2)$ pour montrer que (5) implique (15). □

Proposition 3.2. *La solution limite* (*point fixe*) *de* (10)–(13) *est solution de* (15)–(16).

Démonstration. Soient $\boldsymbol{u}^{\alpha*}$, $\boldsymbol{w}^{\alpha*}$, $\alpha = 1, 2$, les solutions limites respectives de (10) et (11), (12). Ils vérifient donc les relations suivantes :

$$\begin{cases} \text{Trouver } \boldsymbol{u}^{\alpha*} \in V_-^\alpha(-\boldsymbol{g}^{\alpha*}) \text{ tel que :} \\ a^\alpha(\boldsymbol{u}^{\alpha*}, \boldsymbol{v}^\alpha + P^\alpha(\boldsymbol{g}^{\alpha*}) - \boldsymbol{u}^{\alpha*}) \geqslant (\boldsymbol{f}^\alpha, \boldsymbol{v}^\alpha + P^\alpha(\boldsymbol{g}^{\alpha*}) - \boldsymbol{u}^{\alpha*}) \quad \forall \boldsymbol{v}^\alpha \in V_-^\alpha(0). \end{cases} \tag{17}$$

$$\begin{cases} \text{Trouver } \boldsymbol{w}^{1*} \in V^1, \\ a^1(\boldsymbol{w}^{1*}, \boldsymbol{v}) = -a^2(\boldsymbol{u}^{2*}, P^2(\gamma \boldsymbol{v})) + (\boldsymbol{f}^2, P^2(\gamma \boldsymbol{v})) + a^1(\boldsymbol{u}^{1*}, \boldsymbol{v}) - (\boldsymbol{f}^1, \boldsymbol{v}) \quad \forall \boldsymbol{v} \in V^1. \end{cases} \tag{18}$$

$$\begin{cases} \text{Trouver } \boldsymbol{w}^{2*} \in V^2, \\ a^2(\boldsymbol{w}^{2*}, \boldsymbol{v}) = -a^1(\boldsymbol{u}^{1*}, P^1(\gamma \boldsymbol{v})) + (\boldsymbol{f}^1, P^1(\gamma \boldsymbol{v})) + a^2(\boldsymbol{u}^{2*}, \boldsymbol{v}) - (\boldsymbol{f}^2, \boldsymbol{v}) \quad \forall \boldsymbol{v} \in V^2. \end{cases} \tag{19}$$

$$\begin{cases} g^{1*} = \boldsymbol{w}^{2*}\boldsymbol{n}^2 - \boldsymbol{u}^{2*}\boldsymbol{n}^2 \quad \text{sur } \Gamma_c, \\ g^{2*} = \boldsymbol{w}^{1*}\boldsymbol{n}^1 - \boldsymbol{u}^{1*}\boldsymbol{n}^1 \quad \text{sur } \Gamma_c. \end{cases} \tag{20}$$

Or, d'après (7), on as :

$$g^{1*} = -g^{2*} - \boldsymbol{u}^{1*}\boldsymbol{n}^1 - \boldsymbol{u}^{2*}\boldsymbol{n}^2 \quad \text{et} \quad g^{2*} = -g^{1*} - \boldsymbol{u}^{2*}\boldsymbol{n}^2 - \boldsymbol{u}^{1*}\boldsymbol{n}^1. \tag{21}$$

En reportant (20) dans (21), on obtient :

$$g^{1*} = -\boldsymbol{w}^{1*}\boldsymbol{n}^1 - \boldsymbol{u}^{2*}\boldsymbol{n}^2 \quad \text{et} \quad g^{2*} = -\boldsymbol{w}^{2*}\boldsymbol{n}^2 - \boldsymbol{u}^{1*}\boldsymbol{n}^1. \tag{22}$$

D'où, par identification de (22) et (20), on a finalement sur Γ_c :

$$-\boldsymbol{w}^{1*}\boldsymbol{n}^1 = \boldsymbol{w}^{2*}\boldsymbol{n}^2. \tag{23}$$

En outre, en prenant comme fonction test $\pm\boldsymbol{v}^\alpha - P^\alpha \boldsymbol{g}^\alpha + \boldsymbol{u}^\alpha, \alpha = 1, 2$, dans (17) avec $\boldsymbol{v}_N^\alpha = 0$ sur $\Gamma_c \cup \Gamma_{\boldsymbol{u}}^\alpha$, on a $a^\alpha(\boldsymbol{u}^{\alpha*}, \boldsymbol{v}^\alpha) = (\boldsymbol{f}^\alpha, \boldsymbol{v}^\alpha)$. D'où de (18) et (19), on en déduit que $a^\alpha(\boldsymbol{w}^{\alpha*}, \boldsymbol{v}^\alpha) = 0\ \forall \boldsymbol{v}^\alpha \in V^\alpha$ avec $\boldsymbol{v}_N^\alpha = 0$ sur $\Gamma_c \cup \Gamma_{\boldsymbol{u}}^\alpha$. En sommant le résultat qui précède et en tenant compte de (23), on obtient un problème de contact bilatéral

$$\begin{cases} a(\boldsymbol{w}^*, \boldsymbol{v}) = 0, \quad \forall \boldsymbol{v} \in V^1 \times V^2, \\ \boldsymbol{w}^{1*}\boldsymbol{n}^1 + \boldsymbol{w}^{2*}\boldsymbol{n}^2 = 0, \quad \text{sur } \Gamma_c. \end{cases} \tag{24}$$

On prend $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{w}^*$ dans (24) et la coercivité de $a(\cdot,\cdot)$, nous permet de conclure que :

$$\boldsymbol{w}^{1*} = 0 \quad \text{dans } V^1 \quad \text{et} \quad \boldsymbol{w}^{2*} = 0 \quad \text{dans} V^2. \tag{25}$$

D'où de (19), $\boldsymbol{u}^{2*}$ vérifie $a^2(\boldsymbol{u}^{2*}, \boldsymbol{v}) = (\boldsymbol{f}^2, \boldsymbol{v}) + a^1(\boldsymbol{u}^{1*}, P^1(\gamma \boldsymbol{v})) - (\boldsymbol{f}^1, P^1(\gamma \boldsymbol{v}))\ \forall \boldsymbol{v} \in V^2$. En outre, on a $g^{1*} = -\boldsymbol{u}^{2*}\boldsymbol{n}^2$ (d'après (22) et (25)) soit que $\boldsymbol{u}^{1*}$ vérifie

$$a^1\big(\boldsymbol{u}^{1*}, \boldsymbol{v}^1 + P^1(-\boldsymbol{u}^{2*}\boldsymbol{n}^2) - \boldsymbol{u}^{1*}\big) \geqslant \big(\boldsymbol{f}^1, \boldsymbol{v}^1 + P^1(-\boldsymbol{u}^{2*}\boldsymbol{n}^2) - \boldsymbol{u}^{1*}\big) \quad \forall \boldsymbol{v}^1 \in V_-^1(0)$$

qui est la formulation translaté de (16). □

Remarque 3. Pour la résolution de (10), nous adoptons la méthode de programmation quadratique QPPGP (Quadratic Programming with Proportioning and Gradient Projections) [5,4].

Remarque 4. Dans le cas de sous-domaines flottants, on peut appliquer les mêmes techniques mises en œuvre pour la méthode de Neumann–Neumann (voir [9]).

Références

[1] V.I. Agoshkov, Poincaré–Steklov's operators and domain decomposition methods in finite dimensional spaces, in: Proceeding of the first International Symposium on Domain Decomposition Methods, Paris, France, January, 1987, SIAM, Philadelphia, 1988.

[2] G. Bayada, J. Sabil, T. Sassi, Algorithme de Neumann–Dirichlet pour des problèmes de Contact Unilatéral : Résultat de convergence, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 335 (2002) 381–386.

[3] G. Bayada, J. Sabil, T. Sassi, A Neumann–Neumann domain decomposition algorithm for the Signorini problem, Appl. Math. Lett. 17 (2004) 1153–1159.

[4] Z. Dostál, Box constrained quadratic programming with proportioning and projections, SIAM J. Optim. 7 (3) (August 1997) 871–887.

[5] Z. Dostál, J. Schöberl, Minimizing quadratic functions over non-negative cone with the rate of convergence and finite termination, Comput. Optim. Appl. 30 (1) (2005) 23–44.
[6] C. Eck, B. Wohlmuth, Convergence of a contact-Neumann iteration for the solution of two-body contact problem, Math. Models Methods Appl. Sci. 13 (8) (2003) 1103–1118.
[7] M.A. Ipopa, Algorithmes de décomposition de domaine pour les problèmes de contact : convergence et simulations numériques, Thèse, Université de Caen, soutenance prévue en 2008.
[8] N. Kikuchi, J.T. Oden, Contact Problems in Elasticity: A Study Of Variational Inequalities and Finite Element Methods, SIAM, Philadelphia, 1988.
[9] J. Mandel, Balancing domain decomposition, Comm. Numer. Methods Engrg. 9 (1993) 233–241.