Available online at www.sciencedirect.com
ScienceDirect
C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 346 (2008) 1155–1158
Comptes Rendus Mathematique
http://france.elsevier.com/direct/CRASS1/

Géométrie algébrique/Équations différentielles

Sur l'équivalence des théories de Galois différentielles générales

Hiroshi Umemura

Nagoya University, Graduate School of Mathematics, Chikusa-ku Nagoya, 464-8602 Japan

Reçu le 9 septembre 2008 ; accepté le 23 septembre 2008

Disponible sur Internet le 23 octobre 2008

Présenté par Bernard Malgrange

Résumé

Nous montrons que la théorie de Galois différentielle générale de Malgrange (2001) et la nôtre (1996) sont équivalentes. ***Pour citer cet article : H. Umemura, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 346 (2008).***

Abstract

On the equivalence of general differential Galois theories. We show that general differential Galois theory of Malgrange (2001) and ours (1996) are equivalent. ***To cite this article: H. Umemura, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 346 (2008).***

1. Soient L un corps de type fini sur le corps des nombres complexes $\mathbb{C}$ et $\delta : L \to L$ une $\mathbb{C}$-dérivation. Donc pour $a, b \in L$ on a (1) $\delta(a+b) = \delta(a) + \delta(b)$, (2) $\delta(ab) = \delta(a)b + a\delta(b)$ et $\delta(\mathbb{C}) = 0$.

Il existe une $\mathbb{C}$-sous algèbre A de L telle que l'algèbre A soit de type fini sur $\mathbb{C}$, fermée par la dérivation δ, i.e. $\delta(A) \subset A$ et que le corps $\mathbb{C}(A)$ engendré par A sur $\mathbb{C}$ coincide avec le corps L. Autrement dit une variété algébrique affine $V = \operatorname{Spec} A$ est un modèle de l'extension $L/\mathbb{C}$ de corps. En plus, la dérivation δ agit sur le faisceaux structural O_V définissant un champ de vecteurs $F(\delta)$ algébrique sur le modèle V qui est une variété algébrique.

Un couple (W, G) formé d'une variété algébrique W, éventuellement ouverte sur $\mathbb{C}$ et un champ de vecteurs G qui est birationnellement équivalent à $(V, F(\delta))$ s'appelle un modèle de l'extension différentielle de corps $L/\mathbb{C}$. Le modèle de l'extension différentielle $L/\mathbb{C}$ est déterminée, par définition, à l'équivalence birationnelle près.

L'argument de [4] nous permet de démontrer la proposition suivante.

Proposition 1. *Il existe un modèle de l'extension différentielle $L/\mathbb{C}$ lisse sur $\mathbb{C}$.*

2. Un groupoïde $\mathcal{C}$ est une petite catégorie dont tout morphisme est isomorphisme. Soit S l'ensemble des morphismes de $\mathcal{C}$ et T l'ensemble $ob\,\mathcal{C}$ des objets de $\mathcal{C}$.

Pour un morphisme $\varphi \in \operatorname{Hom}(A, B)$ de $\mathcal{C}$, en associant sa source $A := s(\varphi)$ et son but $B := t(\varphi)$, on obtient deux applications $s : S \to T$ et $t : S \to T$ de l'ensemble S dans l'ensemble T.

Adresse e-mail : umemura@math.nagoya-u.ac.jp.

1631-073X/$ – see front matter
doi:10.1016/j.crma.2008.09.025

Soient maintenant $\varphi \in \mathrm{Hom}(A, B)$ et $\psi \in \mathrm{Hom}(C, D)$ deux éléments de S. Si $B = t(\varphi) = C = s(\psi)$, alors on peut composer les morphismes φ et ψ pour obtenir $\psi \circ \varphi \in \mathrm{Hom}(A, D)$. Autrement dit la loi de composition de morphismes dans la catégorie $\mathcal{C}$ nous donne une application

$$S_t \times_T {}_s S \to S, \tag{1}$$

où le produit fibré est pris par rapport aux deux applications $t : S \to T$ et $s : S \to T$.

L'associativité de la composition ainsi que la condition que tout morphisme soit un isomorphisme dans la catégorie $\mathcal{C}$, peut s'exprimer aux termes de diagrammes commutatifs (voir [1], pages 212-08 et 09).

L'observation précédente nous permet de généraliser la définition des groupoïdes dans une catégorie $\mathcal{C}$ dans laquelle le produit fibré de deux objets existe (cf. [1], loc. cit.). Plus précisément, un groupoïde dans la catégorie $\mathcal{C}$ consiste en deux objets $S, T \in \mathrm{ob}\,\mathcal{C}$, deux morphismes $s : S \to T$ et $t : S \to T$, cela étant équivalent à la donnée d'un morphisme $(s, t) : S \to T \times T$, et un morphisme

$$S_t \times_T {}_s S \to S, \tag{2}$$

dans $\mathcal{C}$ satisfaisant aux diagrammes commutatifs. Quand il n'existe aucun danger de confusion, on dit que le morphisme $(s, t) : S \to T \times T$ est un groupoïde sans précisér le morphisme (2).

3. Soit $f : V \to \mathrm{Spec}\,\mathbb{C}$ un schéma lisse et de type fini sur le corps des nombres complexes $\mathbb{C}$. D'après [2], Exposé II, il existe un revêtement $V = \bigcup_{\alpha\in I} U_\alpha$, par des ouverts affines $U_\alpha = \mathrm{Spec}\,A_\alpha$, $\alpha \in I$, de V tel que localement sur U_α, le morphisme $f|U_\alpha$ se factorise en $f|U_\alpha = g_\alpha \circ h_\alpha$ où $g_\alpha : U_\alpha \to \mathbb{A}^n_{\mathbb{C}} = \mathrm{Spec}\,\mathbb{C}[t_{\alpha 1}, t_{\alpha 2}, \dots, t_{\alpha n}]$ est un morphisme étale et $g_\alpha : \mathbb{A}^n_{\mathbb{C}} \to \mathrm{Spec}\,\mathbb{C}$ est le morphisme structural de l'espace affine $\mathbb{A}^n_{\mathbb{C}}$.

Nous construisons le schéma des jets sur $V \times_{\mathbb{C}} V$ algébriquement. Notre construction est locale sur $U_\alpha \times_{\mathbb{C}} U_\beta$ et canonique. Ainsi donc elle se recolle, définissant l'espace des jets sur $V \times_{\mathbb{C}} V$. Alors comme algèbre A_α est étale sur l'anneau $\mathbb{C}[\mathbf{t}_\alpha] = \mathbb{C}[t_{\alpha 1}, t_{\alpha 2}, \dots, t_{\alpha n}]$ des polynômes à n-variables. Les dérivations $\partial/\partial t_{\alpha i} : \mathbb{C}[\mathbf{t}_\alpha] \to \mathbb{C}[\mathbf{t}_\alpha]$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ mutuellement commutatives se prolongent uniquement aux dérivations $A_\alpha \to A_\alpha$ notées aussi par $\partial/\partial t_{\alpha i}$ ([1], Exposé I).

Soient $x_1, x_2, \dots, x_n$ des variables sur l'algèbre A_β. Considérons le foncteur

$$F_\beta : (Alg/A_\beta) \to (Ens)$$

de la catégorie (Alg/A_β) des A_β-algèbres dans la catégorie (Ens) des ensembles, obtenu en posant

$$F_\beta(R) := \bigl\{ f \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}\bigl(A_\beta, R[\![x_1, x_2, \dots, x_n]\!]\bigr) \mid f(a) \equiv a \bmod (x_1, x_2, \dots, x_n) \text{ pour tout } a \in A_\beta \bigr\}$$

pour une A_β-algèbre R, où on note par $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V, W)$ l'ensemble des morphismes de $\mathbb{C}$-algèbres.

Proposition 2. *Le foncteur F_β est représentable par une A_β-algèbre J_β.*

Voici la construction explicite de l'algèbre J_β. Comme le cas général est traité de la même manière, supposons $n = 1$ et désignons $t_{\beta 1}$ simplement par t_β pour $\beta \in I$. Posons $R_\beta = \mathbb{C}[t_\beta(i)]_{i\in\mathbb{N}}$ où les $t_\beta(i)$, $i \in \mathbb{N}$ sont des variables sur $\mathbb{C}$ et nous supposons $t_\beta = t_\beta(0)$. Donc nous avons un morphisme

$$\mathbb{C}[t_\beta] \to R_\beta[\![x]\!], \qquad t_\beta \mapsto \sum_{i\in\mathbb{N}} t_\beta(i) x^i \tag{3}$$

de $\mathbb{C}$-algèbres. Alors $J_\beta = A_\beta \otimes_{\mathbb{C}[t_\beta]} R_\beta$ satisfait à la condition. En effet, comme A_β est étale sur $\mathbb{C}[t_\beta]$ le morphisme (3) s'etend en un morphisme $A_\beta \to (A_\beta \otimes_{\mathbb{C}[\beta]} R_\beta)[[x]]$ par [2], Exposé I.

Soit $f : A_\beta \to J_\beta[\![x]\!]$ le morphisme universel qui représente le foncteur F_β. L'application $\partial_i(\beta) : A_\beta \to J_\beta$ qui envoie $a \in A_\beta$ sur le coefficient en x_i de la série formelle $f(a)$ est une $\mathbb{C}$-dérivation pour $\leqslant i \leqslant n$.

Proposition 3. *Les dérivation $\partial_i(\beta) : A_\beta \to J_\beta$ s'etend naturellement en des dérivations $\partial_i(\beta) : J_\beta \to J_\beta$ mutuellement commutatives. L'algèbre différentielle partielle $(J_\beta, \{\partial_i(\beta)\}_{i\leqslant i\leqslant n})$ est différen-tiellement engendrée par la sous-algèbre A_β.*

Revenons sur $U_\alpha \times_{\mathbb{C}} U_\beta$. L'algèbre $J_{\alpha\beta} := A_\alpha \otimes_{\mathbb{C}} J_\beta$ représente un autre foncteur. Les $\mathbb{C}$-dérivation $\partial/\partial t_{\alpha i}: A_\alpha \to A_\alpha$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ s'etendend en des dérivations

$$\partial_{\alpha\beta i} := \partial_{\alpha i} \otimes_{\mathbb{C}} 1 + 1 \otimes_{\mathbb{C}} \partial_i(\beta) : A_\alpha \otimes_{\mathbb{C}} J_\beta = J_{\alpha\beta} \to A_\alpha \otimes_{\mathbb{C}} J_\beta = J_{\alpha\beta}.$$

Théorème 1. *Soit $(R, \{\delta_i\}_{i \leqslant i \leqslant n})$ une algèbre différentielle partielle telle que, en tant qu'algèbre abstraite, l'algèbre R soit une $A_\alpha \otimes_{\mathbb{C}} A_\beta$-algèbre et que la dérivation $\delta_i : R \to R$ soit une extension de la dérivation $\partial/\partial t_{\alpha i} : A_\alpha \to A_\alpha$, i.e. $\delta_i | A_\alpha = \partial/\partial t_{\alpha i}$. Alors il existe un et un seul morphime*

$$\varphi : J_{\alpha\beta} \to R$$

de $A_\alpha \otimes_{\mathbb{C}} A_\beta$-algèbres abstraites tel que on ait $\delta_i(\varphi(z)) = \varphi(\partial_{\alpha\beta i}(z))$, pour tout élément $z \in J_{\alpha\beta}$.

Désignons par $\mathbb{J}_{\alpha\beta}$ le schéma Spec $J_{\alpha\beta}$ sur le schéma $U_\alpha \times_{\mathbb{C}} U_\beta$. Les schémas $\mathbb{J}_{\alpha\beta}$ se recollent et définissent le schéma $\mathbb{J} \to V \times_{\mathbb{C}} V$ des jets de V. Le système de déterminants $\det(\alpha, \beta) = |\partial_{\alpha\beta i} t_{\beta j}|_{1 \leqslant i,\, j \leqslant n}$ est un diviseur de Cartier D sur le schéma $\mathbb{J}$ et par consequent les localisations $(J_{\alpha,\beta})_{\det(\alpha\beta)}$ se recollent aussi et nous donnent un sous-schéma ouvert $\mathbb{J}^0 := \mathbb{J} \setminus D$ de $\mathbb{J}$.

Proposition 4. *Le shéma $\mathbb{J}^0 \to V \times_{\mathbb{C}} V$ est un groupoïde dans la catégorie des schémas sur $\mathbb{C}$.*

Voici la définition du morphisme de composition du groupoïde $\mathbb{J}^0$. Il provient d'un morphisme $\mathbb{J}_t \otimes_{V\ s} \mathbb{J} \to \mathbb{J}$ défini ci-dessous en termes d'algèbres. Il suffit de définir pour $\alpha, \beta, \gamma \in I$, un morphisme

$$J_{\alpha,\gamma} \to J_{\alpha,\beta} \otimes_{A_\beta} J_{\beta,\gamma} \tag{4}$$

d'algèbres. Le cas général étant traité de la même manière, supposons $n = 1$. Les formules de calcul des dérivées supérieures des fonctions composées nous donnent un morphisme

$$R_\gamma \to R_\beta \otimes_{\mathbb{C}} R_\gamma \tag{5}$$

d'algèbres tel que $t_\gamma \mapsto 1 \otimes t_\gamma$, $t_\gamma(1) \mapsto t_\beta(1) \otimes t_\gamma(1)$, $t_\gamma(2) \mapsto t_\beta(1)^2 \otimes t_\gamma(2) + t_\beta(2) \otimes t_\gamma(1), \ldots$. On peut étendre le morphisme (5) dans le morphisme (4).

Définition 1. Un D-groupoïde algébrique sur le schéma $V \times_{\mathbb{C}} V$ est un sous groupoïde du groupoïde $\mathbb{J}^0$ défini par un faiseuax d'ideaux fermés par les dérivations.

4. Gardons la notation de 1 et adoptons, d'après Malgrange [3], la définition suivante dans le cadre algébrique.

Définition 2. Le groupoïde de Galois $\mathrm{Gal}(L/\mathbb{C})$ de $L/\mathbb{C}$ est le plus petit D-groupoïde sur $M \times_{\mathbb{C}} M$ dont l'algèbre de Lie contient le champs de vecteurs $F(\delta)$.

Notre définition [4] du groupe de Galois infinitesimal nous fournit une construction explicite du groupoïde $\mathrm{Gal}(L/\mathbb{C})$.

On peut trouver un modèle $(\mathrm{Spec}\, A, F(\delta)) = (M, F(\delta))$ du corps différentiel $L/\mathbb{C}$ donné, tel que A soit lisse sur $\mathbb{C}$. Donc il existe des éléments $t_1, t_2, \ldots, t_n \in A$ qui soient algébriquement indépendents sur $\mathbb{C}$ et tels que l'algèbre A soit étale sur $\mathbb{C}[\mathbf{t}] = C[t_1, t_2, \ldots, t_n]$. Les dérivations $\partial/\partial t_i$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ de $\mathbb{C}[\mathbf{t}]$ s'étendent à A que nous dénotons par ∂_i. Alors le A-module $\mathrm{Der}(A/\mathbb{C})$ des $\mathbb{C}$ dérivations de A est libre sur les ∂_I $(1 \leqslant i \leqslant n)$

Soit

$$\iota : A \to A[\![X]\!], \qquad a \mapsto \sum_{n=o}^{\infty} \frac{1}{n!} \delta^n(a) X^n$$

le morphisme taylorien universel, où X est une variable. C'est un morphisme d'algèbres compatible avec les dérivations δ et $\mathrm{d}/\mathrm{d}X$.

Désignons par $A^\sharp[\![X]\!]$ l'anneau $A[\![X]\!]$ des séries formelles à coefficients dans A munie des dérivations $\{\partial_i\}_{i=1}^n$ qui agissent sur les coefficients. Soit $\mathcal{A}$ la sous-algèbre différentielle de

$$\left(A^\sharp[\![X]\!], \{\partial_i\}_{i=1}^n\right)$$

engendrée par l'algèbre $A^\sharp$ des series formelles constantes et $\iota(A)$. Donc $A^\sharp[\iota(A)]$ est une sous-algèbre abstraite de $\mathcal{A}$.

Lemme 1. *On a un isomorphisme canonique d'algèbres $A \otimes_{C_A} A \simeq A^\sharp[\iota(A)]$, où C_A est la sous-algèbre de A formée de ses constantes.*

Cela résulte, par exemple, de [4], Lemma (1.1).

D'après le lemme, nous avons un morphisme $\operatorname{Spec} \mathcal{A} \to M \otimes_{\mathbb{C}} M$, en composant les morphisme de schémas :

$$\operatorname{Spec} \mathcal{A} \to \operatorname{Spec} A^\sharp\big[\iota(A)\big] \simeq \operatorname{Spec}(A \otimes_{C_A} A) \to \operatorname{Spec}(A \otimes_{\mathbb{C}} A) = M \otimes_{\mathbb{C}} M.$$

Proposition 5. *Il existe une $M \otimes_C M$-immersion fermée* $\operatorname{Spec} \mathcal{A} \to \mathbb{J}$.

En effet par définition, les dérivations $\{\partial_l\}_{1 \leqslant i \leqslant n}$ de $A^\sharp$ sont prolongées à $\mathcal{A}$ qui est une $A \otimes_{C_A} A = A^\sharp[\iota(A)]$-algèbre, à fortiori une $A \otimes_{\mathbb{C}} A$-algèbre, et par consequent, il existe un morphisme $J \to \mathcal{A}$ de $A \otimes_{\mathbb{C}} A$-algèbres d'après le théorème. Comme l'algèbre $\mathcal{A}$ est engendrée sur $A^\sharp$ par $\iota(A)$ et les dérivées de ses éléments, le morphisme est surjectif.

Théorème 2. $\operatorname{Spec} \mathcal{A} \cap \mathbb{J}^0 \to M \times_{\mathbb{C}} M$ *est le groupoïde* $\operatorname{Gal}(L/\mathbb{C})$ *de Galois de l'extension* $L/\mathbb{C}$.

Références

[1] A. Grothendieck, Techniques de construction en géométrie algébrique III, Préschemas quotients, Exposé 212 Séminaire Bourbaki 1960/61, Société mathématique de France, 1995.

[2] A. Grothendieck, Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois Marie 1960/61 SGA I, Revêtements étales et groupe fondamental, Lecture Notes in Mathematics, vol. 224, Springer-Verlag, Berlin, 1971.

[3] B. Malgrange, Le groupoïde de Galois d'un feuilletage, in: Essays on Geometry and Related Topics, vols. 1, 2, in: Monogr. Enseignement Math., vol. 38, Enseignement Math., Geneva, 2001, pp. 461–501.

[4] H. Umemura, Differential Galois theory of infinite dimension, Nagoya Math. J. 144 (1996) 59–134.