Available online at www.sciencedirect.com
ScienceDirect
C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 346 (2008) 919–924
COMPTES RENDUS MATHEMATIQUE
http://france.elsevier.com/direct/CRASS1/

Logique/Combinatoire

Les tournois ($\leqslant k$)-demi-reconstructibles pour $k \leqslant 6$

Youssef Boudabbous [a], Abderrahim Boussaïri [b], Abdelhak Chaïchaâ [b], Nadia El Amri [a]

[a] *Faculté des sciences de Sfax, BP 802, 3018 Sfax, Tunisie*
[b] *Faculté des sciences Aïn-Chock, département de mathématiques et informatique, Km 8 route d'El Jadida, BP 5366, Maarif, Casablanca, Maroc*

Reçu le 1er juillet 2008 ; accepté après révision le 28 juillet 2008

Disponible sur Internet le 27 août 2008

Présenté par Jean-Yves Girard

Résumé

Soit $T = (S, A)$ un tournoi. Pour toute partie non vide X de S, on note $T[X]$ le sous-tournoi de T induit par X. Par ailleurs, le dual de T est le tournoi $T^\star$ obtenu à partir de T en inversant tous ses arcs. Un tournoi T' est demi-isomorphe à T s'il est isomorphe à T ou à $T^\star$. Étant donné un entier $k \geqslant 1$, deux tournois T et T', ayant le même ensemble de sommets S, sont ($\leqslant k$)-demi-isomorphes lorsque pour toute partie non vide X de S ayant au plus k éléments, les sous-tournois $T[X]$ et $T'[X]$ sont demi-isomorphes. Un tournoi T est ($\leqslant k$)-demi-reconstructible lorsque tout tournoi ($\leqslant k$)-demi-isomorphe à T lui est demi-isomorphe. En 1995, Y. Boudabbous et G. Lopez ont montré que les tournois sont ($\leqslant 7$)-demi-reconstructibles. Dans cette Note, nous caractérisons les tournois ($\leqslant k$)-demi-reconstructibles pour $3 \leqslant k \leqslant 6$. ***Pour citer cet article : Y. Boudabbous et al., C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 346 (2008).***

Abstract

($\leqslant k$)-half-reconstructible tournaments for $k \leqslant 6$. Let $T = (V, A)$ be a tournament. For a non-empty subset X of V, we denote by $T[X]$ the sub-tournament of T induced by X. The dual of T is the tournament $T^\star$ obtained from T by reversing all its arcs. A tournament T' is half-isomorphic to T if it is isomorphic to T or $T^\star$. Given an integer $k \geqslant 1$, two tournaments T, T' defined on the same set V are ($\leqslant k$)-half-isomorphic if for every non-empty subset X of V with at most k elements, the sub-tournaments $T[X]$ and $T'[X]$ are half-isomorphic. A tournament T is ($\leqslant k$)-half-reconstructible provided that every tournament T' which is ($\leqslant k$)-half-isomorphic to T is half-isomorphic to it. In 1995, Y. Boudabbous and G. Lopez showed that the tournaments are ($\leqslant 7$)-half-reconstructible. In this Note, we characterize the ($\leqslant k$)-half-reconstructible tournameents for $3 \leqslant k \leqslant 6$. ***To cite this article: Y. Boudabbous et al., C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 346 (2008).***

Abridged English version

A *tournament* T consists of a non-empty finite set V of *vertices* with a prescribed collection A of ordered pairs of distinct vertices, called the set of *arcs* of T, which satisfies: for $x, y \in V$ with $x \neq y$, $(x, y) \in A$ if and only if $(y, x) \notin A$. Such a tournament is denoted by (V, A). If (x, y) is an arc of T, then we say that x *dominates* y.

Adresses e-mail : youssef-boudabbous@yahoo.fr (Y. Boudabbous), aboussairi@hotmail.com (A. Boussaïri), chaichaa@hotmail.com (A. Chaïchaâ), nadia.math@yahoo.fr (N. El Amri).

1631-073X/$ – see front matter
doi:10.1016/j.crma.2008.07.024

Given a tournament $T=(V,A)$, with each non-empty subset X of S is associated the *sub-tournament* $T[X]=(X, A\cap(X\times X))$ of T induced by X. A tournament $T=(V,A)$ is *transitive* or a *total order* provided that for any $x,y,z\in V$, if $(x,y)\in A$ and $(y,z)\in A$, then $(x,z)\in A$.

Consider a tournament $T=(V,A)$, a subset I of V is an *interval* [5] of T if for every $x\in V\setminus I$, x dominates or is dominated by all elements of I. For instance, $\emptyset$, V and $\{x\}$, where $x\in V$, are intervals of T called *trivial* intervals. A tournament is *indecomposable* if all its intervals are trivial; otherwise, it is *decomposable*. For example, a non transitive tournament with 3 vertices, called 3-cycle, is indecomposable.

Given an integer $m>0$. Let R be a tournament on the set $\{1,\dots,m\}$ and $T_1=(S_1,A_1),\dots,T_m=(S_m,A_m)$ be a family of tournaments such that $S_1,\dots,S_m$ are mutually disjoint. The *dilatation* of R by $T_1,\dots,T_m$ is the tournament, denoted by $R(T_1,\dots,T_m)$, and defined on the set $S_1\cup\dots\cup S_m$ as follows: given $x\neq y\in S_1\cup\dots\cup S_m$, (x,y) is an arc of $R(T_1,\dots,T_m)$ if (x,y) is an arc of T_i for some $i\in\{1,\dots,m\}$ or there are $i\neq j\in\{1,\dots,m\}$ such that $x\in S_i$, $y\in S_j$ and (i,j) is an arc of R.

Given tournaments $T=(V,A)$ and $T'=(V',A')$, a bijection f from V onto V' is an *isomorphism* from T onto T' provided that for any $x,y\in V$, $(x,y)\in A$ if and only if $(f(x),f(y))\in A'$. Two tournaments are then *isomorphic* if there exists an isomorphism from one onto the other.

The *dual* of T is the tournament $T^\star$ obtained from T by reversing all its arcs. A tournament T is then said to be *self-dual* if T and $T^\star$ are isomorphic. For example, a tournament with 4 vertices, which has exactly one 3-cycle is not self-dual. Such a tournament is called *diamond*. An interval I of a tournament T is self-dual (resp. without diamond) if the sub-tournament $T[I]$ is self-dual (resp. each sub-tournament of $T[I]$ is not isomorphic to a diamond). Two tournaments T and T' are *half-isomorphic* if there exists an isomorphism from T onto T' or from $T^\star$ onto T'.

Given an integer $k>0$, two tournaments T and T' with the same set V of vertices are $(\leqslant k)$*-isomorphic* (resp. $(\leqslant k)$*-half-isomorphic*) if for every non-empty subset X of V, with $|X|\leqslant k$, the sub-tournaments $T[X]$ and $T'[X]$ are isomorphic (resp. half-isomorphic). A tournament T is $(\leqslant k)$*-reconstructible* (resp. $(\leqslant k)$*-half-reconstructible*) if any tournament $(\leqslant k)$-isomorphic (resp. $(\leqslant k)$-half-isomorphic) to T is isomorphic (resp. half-isomorphic) to it.

G. Lopez [9] established that the tournaments are $(\leqslant 6)$-reconstructible and showed that the value 6 is the best possible. The $(\leqslant k)$-reconstructibility problem for $k\in\{3,4,5\}$ was studied in [1,3]. In particular, for $k=3$, Y. Boudabbous and G. Lopez [3] showed that a tournament is $(\leqslant 3)$-reconstructible if and only if all its intervals are self-dual.

Concerning the half-reconstructibility problem, Y. Boudabbous and G. Lopez [2] established that the tournaments are $(\leqslant 7)$-half-reconstructible and showed that the value 7 is the best possible. In this Note, we characterize the $(\leqslant k)$-half-reconstructible tournaments for $k\in\{3,4,5,6\}$. For $k=1$ or 2, there is no possible characterization because every tournament is $(\leqslant 2)$-half-isomorphic to a total order. It is easy to verify that two $(\leqslant 3)$-half-isomorphic tournaments are $(\leqslant 4)$-half-isomorphic. We will further see that two $(\leqslant 5)$-half-isomorphic tournaments are $(\leqslant 6)$-half-isomorphic. It follows that a tournament is $(\leqslant 5)$-half-reconstructible if and only if it is $(\leqslant 6)$-half-reconstructible. In the same way, a tournament is $(\leqslant 3)$-half-reconstructible if and only if it is $(\leqslant 4)$-half-reconstructible. For $k\in\{3,5\}$, we establish the following:

Theorem 0.1. *A tournament T is $(\leqslant 5)$-half-reconstructible if and only if one of the following conditions is verified.*

(i) *Each interval of T without diamond is self-dual.*
(ii) *The tournament T has exactly one non self-dual interval X without diamond and there exists an isomorphism f from T onto T_X such that $f(X)=X$ where T_X is the tournament obtained from T by reversing the arcs (x,y) of T such that $x\notin X$ or $y\notin X$.*

Theorem 0.2. *For every integer $n\geqslant 0$, let H_n be the class of $(\leqslant 3)$-half-reconstructible tournaments with exactly n non self-dual intervals.*

(i) *A tournament belongs to H_0 if and only if all its intervals are self-dual.*
(ii) *A tournament belongs to H_1 if and only if it is not self-dual and all its proper intervals are self-dual.*
(iii) *For $n\geqslant 2$, a tournament T belongs to H_n if and only if $T=R(T_1,\dots,T_m)$ where:*
 (a) *R is an indecomposable self-dual tournament on the set $\{1,\dots,m\}$ with $m\geqslant 3$.*
 (b) *T_1 belongs to H_{n-1} and for $i=2\dots,m$, T_i belongs to H_0.*

(c) *there exists an isomorphism f from R onto $R^\star$ such that $f(1) = 1$ and for $i = 2\dots, m$, the tournaments T_i and $T_{f(i)}$ are isomorphic.*

1. Introduction

Un *tournoi* T est un couple (S, A) où S est un ensemble fini non vide appelé ensemble des *sommets* de T, et A est un ensemble de couples d'éléments distincts de S, appelé ensemble des *arcs* de T, vérifiant : pour tous $x, y \in S$ avec $x \neq y$, $(x, y) \in A$ si et seulement si $(y, x) \notin A$. Si (x, y) est un arc de T, nous disons que x *domine* y.

Soit $T = (S, A)$ un tournoi. À chaque partie non vide X de S est associé le *sous-tournoi* $T[X] = (X, A \cap (X \times X))$ de T induit par X. Un tournoi $T = (S, A)$ est *transitif* ou est un *ordre total* lorsque pour tous $x, y, z \in S$, si $(x, y) \in A$ et $(y, z) \in A$, alors $(x, z) \in A$.

Considérons un tournoi $T = (S, A)$, une partie I de S est un *intervalle* [5] de T si pour tout $x \in S \setminus I$, x domine ou il est dominé par tous les éléments de I. Par exemple, $\emptyset$, S et les singletons $\{x\}$, où $x \in S$, sont des intervalles T appelés intervalles *triviaux*. Un tournoi est *indécomposable* si tous ses intervalles sont triviaux ; dans le cas contraire, il est *décomposable*. Par exemple, un tournoi non transitif à 3 sommets, appelé 3-cycle, est indécomposable.

Soient $T_1, \dots, T_m$ des tournois définis sur des ensembles $S_1, \dots, S_m$ deux à deux disjoints et R un tournoi défini sur l'ensemble $\{1, \dots, m\}$. La *dilatation* de R par les tournois $T_1, \dots, T_m$ est le tournoi $R(T_1, \dots, T_m)$ défini sur $S = S_1 \cup \dots \cup S_m$ par : (x, y) est un arc de $R(T_1, \dots, T_m)$ si et seulement si (x, y) est un arc de l'un des tournois $T_1, \dots, T_m$ ou il existe $i \neq j \in \{1, \dots, m\}$ tels que $x \in S_i$, $y \in S_j$ et (i, j) est un arc de R.

Soient $T = (S, A)$ et $T' = (S', A')$ deux tournois. Une bijection f de S sur S' est un *isomorphisme* de T sur T' lorsque pour $x, y \in S$, $(x, y) \in A$ si et seulement si $(f(x), f(y)) \in A'$. Lorsqu'un tel isomorphisme existe, on dit que T et T' sont isomorphes.

Le *dual* d'un tournoi T est le tournoi $T^\star$ obtenu à partir de T en inversant tous ses arcs. Un tournoi est *auto-dual* s'il est isomorphe à son dual. Par exemple, un tournoi à 4 sommets contenant un seul 3-cycle n'est pas auto-dual, un tel tournoi est appelé un *diamant*. Un intervalle I d'un tournoi T est auto-dual (resp. sans diamant) si le sous-tournoi $T[I]$ est auto-dual (resp. n'admet aucun sous-tournoi isomorphe à un diamant).

Deux tournois T et T' sont *demi-isomorphes* s'il existe un isomorphisme de T sur T' ou un isomorphisme de $T^\star$ sur T'.

Considérons un entier $k \geqslant 1$. Deux tournois T et T', ayant le même ensemble de sommets S, sont $(\leqslant k)$*-isomorphes* (resp. $(\leqslant k)$*-demi-isomorphes)* si pour toute partie non vide X de S ayant au plus k sommets, les sous-tournois $T[X]$ et $T'[X]$ sont isomorphes (resp. demi-isomorphes). Un tournoi T est $(\leqslant k)$*-reconstructible* (resp. $(\leqslant k)$*-demi-reconstructible*) lorsque tout tournoi $(\leqslant k)$-isomorphe (resp. $(\leqslant k)$-demi-isomorphe) à T lui est isomorphe (resp. demi-isomorphe).

G. Lopez [9] a établi la $(\leqslant 6)$-reconstruction des tournois, de plus il a montré que la valeur 6 est optimale. Ensuite, le problème de la $(\leqslant k)$-reconstructibilité pour $k \in \{3, 4, 5\}$ a été étudié dans [1,3]. En particulier, pour $k = 3$, Y. Boudabbous et G. Lopez [3] ont obtenu le résultat suivant :

Proposition 1.1. *Un tournoi est $(\leqslant 3)$-reconstructible si et seulement si tous ses intervalles sont auto-duaux.*

Concernant la demi-reconstruction [7], Y. Boudabbous et G. Lopez [2] ont établi la $(\leqslant 7)$-demi-reconstruction des tournois, de plus la valeur 7 est optimale. Dans cette Note, nous caractérisons les tournois $(\leqslant k)$-demi-reconstructibles pour $3 \leqslant k \leqslant 6$. Pour $k = 1$ ou 2, il n'y a pas de caractérisation possible car tout tournoi est $(\leqslant 2)$-demi-isomorphe à un ordre total. Il est facile de voir que deux tournois $(\leqslant 3)$-demi-isomorphes sont $(\leqslant 4)$-demi-isomorphes. Par ailleurs, nous verrons plus loin que deux tournois $(\leqslant 5)$-demi-isomorphes sont $(\leqslant 6)$-demi-isomorphes. Il en résulte qu'un tournoi est $(\leqslant 3)$-demi-reconstructible si et seulement s'il est $(\leqslant 4)$-demi-reconstructible, de même un tournoi est $(\leqslant 5)$-demi-reconstructible si et seulement s'il est $(\leqslant 6)$-demi-reconstructible. Pour $k = 3$ et $k = 5$, nous établissons les résultats suivants :

Théorème 1.2. *Un tournoi T est $(\leqslant 5)$-demi-reconstructible si et seulement si l'une des conditions suivantes est vérifiée.*

(i) *Tout intervalle sans diamant de T est auto-dual.*

(ii) *T admet un seul intervalle sans diamant non auto-dual X et il existe un isomorphisme f de T sur T_X tel que $f(X) = X$ où T_X est le tournoi obtenu à partir de T en inversant les arcs (x, y) de T tels que $x \notin X$ ou $y \notin X$.*

Théorème 1.3. *Pour tout entier naturel n, désignons par H_n la classe des tournois $(\leqslant 3)$-demi-reconstructibles ayant exactement n intervalles non auto-duaux.*

(i) *Un tournoi T appartient à H_0 si et seulement si tous ses intervalles sont auto-duaux.*
(ii) *Un tournoi T appartient à H_1 si et seulement si T est non auto-dual et tous ses intervalles propres sont auto-duaux.*
(iii) *Pour $n \geqslant 2$, un tournoi T appartient à H_n si et seulement si $T = R(T_1, \dots, T_m)$ où :*
   (a) *R est un tournoi indécomposable auto-dual défini sur $\{1, \dots, m\}$ avec $m \geqslant 3$.*
   (b) *T_1 appartient à H_{n-1} et pour $i = 2 \dots, m$, T_i appartient à H_0.*
   (c) *il existe un isomorphisme f de R sur $R^\star$ tel que $f(1) = 1$ et pour $i = 2 \dots, m$, le tournoi T_i est isomorphe à $T_{f(i)}$.*

2. Décomposition de Gallai, partitions *k*-compatibles

Un tournoi $T = (S, A)$ ayant au moins deux sommets est *réductible* s'il admet un intervalle non vide I tel que $S \setminus I$ est également un intervalle non vide. Dans le cas contraire, on dit que T est *irréductible*.

Une partition P de S est une *partition intervallaire* de T si X est un intervalle de T pour tout $X \in P$. À chaque partition intervallaire P de T est associé le *tournoi quotient* $T/P = (P, A/P)$ de T par P défini comme suit : pour tous $X, Y \in P$ avec $X \neq Y$, $(X, Y) \in A/P$ si pour tous $x \in X$ et $y \in Y$, on a $(x, y) \in A$.

Étant donné un tournoi $T = (S, A)$, une partie X de S est un *intervalle élémentaire* de T si X est un intervalle de T et si pour tout intervalle Y de T tel que $X \cap Y \neq \emptyset$ on a $X \subseteq Y$ ou $Y \subseteq X$.

Soit $T = (S, A)$ un tournoi à au moins deux sommets. Notons $P(T)$ la famille des intervalles élémentaires de T distincts de S et maximaux pour l'inclusion. $P(T)$ est une partition intervallaire de T, dite *partition de Gallai* de T.

Le théorème de décomposition de Gallai pour les tournois s'énonce comme suit :

Théorème 2.1. *(See [4,6].) Soit T un tournoi d'au moins deux sommets. Nous avons alors les assertions suivantes* :

(i) *Le tournoi T est réductible si et seulement si $T/P(T)$ est un ordre total.*
(ii) *Le tournoi T est irréductible si et seulement si $|P(T)| \geqslant 3$ et $T/P(T)$ est indécomposable.*

Le résultat suivant fournit un exemple de tournois 3-demi-reconstructibles :

Proposition 2.2. *(See [4].) Soient T et T' deux tournois $(\leqslant 3)$-demi-isomorphes. Si T est indécomposable alors $T' = T$ ou $T' = T^\star$.*

Le resultat suivant est une conséquence du Théorème 2.1 :

Corollaire 2.3. *(See [4].) Soient T et T' deux tournois $(\leqslant 3)$-demi-isomorphes.*

(i) *Si T est irréductible, alors $P(T) = P(T')$ et $T'/P(T) = T/P(T)$ ou $T'/P(T) = T^\star/P(T)$.*
(ii) *Si T est réductible, alors $P(T) = P(T')$.*

Soient un entier $k \geqslant 3$ et un tournoi T $(\leqslant k)$-demi-reconstructible. Nous disons qu'une partition intervallaire $\mathcal{F}$ de T est *k-compatible* si les deux conditions suivantes sont vérifiées.

(i) Pour tout $I \in \mathcal{F}$, $T[I]$ est $(\leqslant k - 1)$-isomorphe à $T^\star[I]$.
(ii) Pour tout tournoi T' $(\leqslant k)$-demi-isomorphe à T et pour tout demi-isomorphisme f de T sur T', on a $f(I) \in \mathcal{F}$ pour tout $I \in \mathcal{F}$.

Par exemple, d'après le Corollaire 2.3, la partition de Gallai d'un tournoi irréductible est 3-compatible.

Lemme 2.4. *Étant donné un entier $k \geqslant 3$, si $T = (S, A)$ est un tournoi $(\leqslant k)$-demi-reconstructible et $\mathcal{F}$ est une partition intervallaire k-compatible de T, alors* :

(i) *pour tout $I \in \mathcal{F}$, le tournoi $T[I]$ est $(\leqslant k)$-demi-reconstructible.*
(ii) *$\mathcal{F}$ contient au plus un intervalle X non auto-dual et lorsqu'un tel intervalle existe, il existe un isomorphisme f de T sur T_X tel que $f(X) = X$.*

3. Preuve du Théorème 1.2

On peut montrer facilement qu'un tournoi sans diamant est $(\leqslant 5)$-demi-reconstructible. Dans le cas des tournois contenant des diamants, nous utilisons le résultat suivant :

Lemme 3.1. *Soient $T = (S, A)$ et $T' = (S, B)$ deux tournois $(\leqslant 5)$-demi-isomorphes. On suppose que T contient au moins un diamant. Il existe alors une partition intervallaire commune $\mathcal{F}$ de T et T' telle que* :

(i) *Pour tout $F \in \mathcal{F}$, $T[F]$ est sans diamant et $T[F]$ est demi-isomorphe à $T'[F]$.*
(ii) *$T'/\mathcal{F} = T/\mathcal{F}$ ou $T'/\mathcal{F} = T^\star/\mathcal{F}$.*

La preuve de ce résultat utilise la notion de *classe de différence* introduite par G. Lopez [8].

Comme conséquence du lemme précédent, deux tournois $(\leqslant 5)$-demi-isomorphes sont $(\leqslant 6)$-demi-isomorphes et par suite un tournoi est $(\leqslant 6)$-demi-reconstructible si et seulement s'il est $(\leqslant 5)$-demi-reconstructible.

Démonstration du Théorème 1.2. Soit $T = (S, A)$ un tournoi $(\leqslant 5)$-demi-reconstructible contenant au moins un diamant. Si la condition (i) n'est pas vérifiée, on montre que la famille $\mathcal{F} = \{F_1, \dots, F_r\} \cup \{\{x\}\colon x \in S \setminus \bigcup F_i\}$ où $F_1, \dots, F_r$ sont les intervalles non triviaux de T qui sont irréductibles et sans diamant, est une partition 5-compatible de T. On applique ensuite le Lemme 2.4 pour prouver que T vérifie la condition (ii).

Pour la réciproque, on applique le Lemme 3.1. $\square$

4. Preuve du Théorème 1.3

Dans le cas des tournois réductibles, la caractérisation est donnée par le résultat suivant :

Proposition 4.1. *Soit $T = (S, A)$ un tournoi réductible. Les assertions suivantes sont équivalentes.*

(i) *Le tournoi T est $(\leqslant 3)$-demi-reconstructible et non $(\leqslant 3)$-reconstructible.*
(ii) *La partition $P(T)$ contient exactement deux éléments U, U' et les tournois $T[U]$, $T[U']$ sont $(\leqslant 3)$-reconstructibles non isomorphes.*
(iii) *Le tournoi T est non auto-dual et tous ses intervalles propres sont auto-duaux.*

Démonstration du Théorème 1.3. Les assertions (i) et (ii) découlent des Propositions 1.1 et 4.1 et du Corollaire 2.3.

Pour le sens direct de l'assertion (iii), on remarque d'abord d'après la Proposition 4.1 qu'un tournoi T appartenant à H_n avec $n \geqslant 2$ est irréductible. On applique ensuite le Lemme 2.4 à la partition $P(T)$. Pour la réciproque, on vérifie directement que T contient exactement n intervalles non auto-duaux. Ensuite en appliquant le Corollaire 2.3, on montre que T est $(\leqslant 3)$-demi-reconstructible. $\square$

Références

[1] Y. Boudabbous, La 5-reconstructibilité et l'indécomposabilité des relations binaires, Eur. J. Combinatorics 23 (2002) 507–522.
[2] Y. Boudabbous, G. Lopez, La relation différence et l'anti-isomorphie, Math. Logic Quart. 41 (1995) 268–280.
[3] Y. Boudabbous, G. Lopez, The minimal non-$(\leqslant k)$-reconstructible relations, in: G. Hahn, P. Ille, S. Thomassé (Eds.), En l'honneur des 80 ans de Reland Fraïssé, Discrete Math. 291 (2005) 19–40.

[4] A. Boussaïri, P. Ille, G. Lopez, S. Thomassé, The C_3-structure of tournaments, Discrete Math. 277 (2004) 29–43.
[5] R. Fraïssé, Abritement entre relations et spécialement entre chaînes, Symposi. Math., Instituto Nazionale di Alta Matematica 5 (1970) 203–251.
[6] T. Gallai, Transitiv orientierbare graphen, Acta Math. Acad. Sci. Hungar. 18 (1967) 25–66.
[7] J.G. Hagendorf, G. Lopez, La demi-reconstructibilité des relations binaires d'au moins 13 éléments, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 317 (1993) 7–12.
[8] G. Lopez, Deux résultats concernant la détermination d'une relation par les types d'isomorphie de ses restrictions, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. A 274 (1972) 1525–1528.
[9] G. Lopez, L'indéformabilité des relations et multirelations binaires, Z. Math. Logik Grundlag. Math. 24 (1978) 303–317.