Available online at www.sciencedirect.com
ScienceDirect
C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 346 (2008) 807–812
Comptes Rendus Mathematique
http://france.elsevier.com/direct/CRASS1/

Problèmes mathématiques de la mécanique

Vibrations d'un composite élastique comportant des inclusions granulaires très lourdes : effets de mémoire

Michel Bellieud

UFR Science, Université de Perpignan, 52, avenue de Villeneuve, 66860 Perpignan cedex, France

Reçu le 20 septembre 2007 ; accepté après révision le 5 mars 2008

Disponible sur Internet le 24 juin 2008

Présenté par Philippe G. Ciarlet

Résumé

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^3$ et soient (ρ_ε), (μ_ε), (λ_ε) des suites de fonctions périodiques sur Ω, de période ε, la fonction ρ_ε prenant des valeurs très grandes sur un ensemble de boules de rayon r_ε périodiquement distribuées de période ε ($r_\varepsilon \ll \varepsilon$). Nous étudions le comportement asymptotique ($\varepsilon \to 0$) de l'équation :

$$\begin{cases} \rho_\varepsilon \dfrac{\partial^2 \boldsymbol{u}_\varepsilon}{\partial t^2} - \operatorname{div}\big(\boldsymbol{\sigma}_\varepsilon(\boldsymbol{u}_\varepsilon)\big) = \rho_\varepsilon \boldsymbol{f} \quad \text{dans } \Omega \times (0,T) \quad + \quad \text{conditions aux limites,} \\ \boldsymbol{\sigma}_\varepsilon(\boldsymbol{u}_\varepsilon) = \lambda_\varepsilon \operatorname{tr}\big(\boldsymbol{e}(\boldsymbol{u}_\varepsilon)\big)\boldsymbol{I} + 2\mu_\varepsilon \boldsymbol{e}(\boldsymbol{u}_\varepsilon), \quad \boldsymbol{e}(\boldsymbol{u}_\varepsilon) = \frac{1}{2}(\nabla \boldsymbol{u}_\varepsilon + \nabla^T \boldsymbol{u}_\varepsilon), \end{cases}$$

et nous trouvons une loi effective non locale déduite d'un système couplé d'équations hyperboliques. ***Pour citer cet article : M. Bellieud, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 346 (2008).***

Abstract

Vibrations of an elastic composite with very heavy inclusions: memory effects. Let Ω be a bounded open set of $\mathbb{R}^3$ and (ρ_ε), (μ_ε), (λ_ε) be sequences of ε-periodic functions on Ω, the function ρ_ε taking very large values on a set of ε-periodically distributed balls of radius r_ε ($r_\varepsilon \ll \varepsilon$). We study the asymptotic behaviour as $\varepsilon \to 0$ of the equation:

$$\begin{cases} \rho_\varepsilon \dfrac{\partial^2 \boldsymbol{u}_\varepsilon}{\partial t^2} - \operatorname{div}\big(\boldsymbol{\sigma}_\varepsilon(\boldsymbol{u}_\varepsilon)\big) = \rho_\varepsilon \boldsymbol{f} \quad \text{in } \Omega \times (0,T) \quad + \quad \text{boundary conditions,} \\ \boldsymbol{\sigma}_\varepsilon(\boldsymbol{u}_\varepsilon) = \lambda_\varepsilon \operatorname{tr}\big(\boldsymbol{e}(\boldsymbol{u}_\varepsilon)\big)\boldsymbol{I} + 2\mu_\varepsilon \boldsymbol{e}(\boldsymbol{u}_\varepsilon), \quad \boldsymbol{e}(\boldsymbol{u}_\varepsilon) = \frac{1}{2}(\nabla \boldsymbol{u}_\varepsilon + \nabla^T \boldsymbol{u}_\varepsilon), \end{cases}$$

and finally we find a non-local effective equation deduced from a homogenized system of hyperbolic equations. ***To cite this article: M. Bellieud, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 346 (2008).***

Adresse e-mail : bellieud@univ-perp.fr.

1631-073X/$ – see front matter
doi:10.1016/j.crma.2008.03.030

Abridged English version

We are concerned with the homogenization of the vibration problem:

$$\begin{cases} \rho_\varepsilon \dfrac{\partial^2 \boldsymbol{u}_\varepsilon}{\partial t^2} - \operatorname{div}\big(\boldsymbol{\sigma}_\varepsilon(\boldsymbol{u}_\varepsilon)\big) = \rho_\varepsilon \boldsymbol{f} \quad \text{in } \Omega \times (0,T), \quad (\boldsymbol{f} \in C(\overline{\Omega \times (0,T)}; \mathbb{R}^3)), \\ \boldsymbol{\sigma}_\varepsilon(\boldsymbol{u}_\varepsilon) = \lambda_\varepsilon \operatorname{tr}\big(\boldsymbol{e}(\boldsymbol{u}_\varepsilon)\big)\boldsymbol{I} + 2\mu_\varepsilon \boldsymbol{e}(\boldsymbol{u}_\varepsilon), \quad \boldsymbol{e}(\boldsymbol{u}_\varepsilon) = \dfrac{1}{2}(\nabla \boldsymbol{u}_\varepsilon + \nabla^T \boldsymbol{u}_\varepsilon), \\ \boldsymbol{u}_\varepsilon \in C\big([0,T];\ H_0^1(\Omega,\mathbb{R}^3)\big) \cap C^1\big([0,T]; L^2(\Omega,\mathbb{R}^3)\big), \\ \boldsymbol{u}_\varepsilon(0) = \boldsymbol{a}_0, \quad \dfrac{\partial \boldsymbol{u}_\varepsilon}{\partial t}(0) = \boldsymbol{b}_0, \quad (\boldsymbol{a}_0, \boldsymbol{b}_0) \in \big(C(\overline{\Omega};\mathbb{R}^3) \cap H_0^1(\Omega;\mathbb{R}^3)\big) \times C(\overline{\Omega};\mathbb{R}^3), \end{cases} \tag{1}$$

when the mass density ρ_ε takes possibly larges values in an ε-periodic subset of grain-like inclusions of vanishing measure. In the case of scalar evolution equations, explicit computations prove memory effects [1]. In this Note, we present the extension of these results in the framework of linear elasticity. Given a sequence of positive real numbers (r_ε) such that $r_\varepsilon \ll \varepsilon$, we consider the ε-periodic distribution B_{r_ε} of balls of radius r_ε defined by (2). We assume (3) and set (4). The limit problem depends on the capacity parameter γ defined by (5). It is expressed in terms of the limit $\boldsymbol{u}$ of the sequence $(\boldsymbol{u}_\varepsilon)$ of the solutions of (1) and of the limits $\boldsymbol{v}$ and $\boldsymbol{\omega}$ of the sequences $(\boldsymbol{v}_\varepsilon)$ and $(\boldsymbol{\omega}_\varepsilon)$ defined by (6). The field $\boldsymbol{v}$ describes the average effective displacement in the inclusions and the field $\boldsymbol{\omega}$ characterizes their average effective rotation vector.

Theorem 0.1. *Assume* (3) *and* $0 < \gamma < +\infty$. *Then the sequence* $(\boldsymbol{u}_\varepsilon)$, *where* $\boldsymbol{u}_\varepsilon$ *is the solution of* (1) *converges weak star in* $L^\infty(0,T; H_0^1(\Omega;\mathbb{R}^3))$ *to* $\boldsymbol{u}$ *and the sequences* $(\boldsymbol{v}_\varepsilon)$ *and* $(\boldsymbol{\omega}_\varepsilon)$ *defined by* (6) *converge weak star in* $L^\infty(0,T; \mathcal{M}(\overline{\Omega};\mathbb{R}^3))$ *respectively to* $\boldsymbol{v}$ *and* $\boldsymbol{\omega}$, *where* $(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{\omega})$ *is the unique solution of* (7).

Corollary 0.2. *Assume* (3).

(i) *If* $\gamma = 0$, *then* $(\boldsymbol{u}_\varepsilon)$ *converges weak star in* $L^\infty(0,T; H_0^1(\Omega;\mathbb{R}^3))$ *to the unique solution of* (10).
(ii) *If* $\gamma = +\infty$ *and* $\varepsilon^3 \gg r_\varepsilon^2$, *then* $(\boldsymbol{u}_\varepsilon)$ *converges weak star in* $L^\infty(0,T; H_0^1(\Omega;\mathbb{R}^3))$ *to the unique solution* $\boldsymbol{u}$ *of* (11). *Besides, the sequences* $(\boldsymbol{v}_\varepsilon)$ *and* $(\boldsymbol{\omega}_\varepsilon)$ *converge weak stars in* $L^\infty(0,T; \mathcal{M}(\overline{\Omega};\mathbb{R}^3))$ *respectively to* $\boldsymbol{u}$ *and to* 0.

Corollary 0.3. *Assume* (3) *and* $\gamma > 0$, *then the sequence* $(\boldsymbol{u}_\varepsilon)$, *where* $\boldsymbol{u}_\varepsilon$ *is the solution of the elliptic problem* (12), *converges weakly in* $H_0^1(\Omega;\mathbb{R}^3)$ *to the unique solution of* (13).

Remark 1. Under the assumptions of Theorem 0.1 and if (for simplicity) ρ is constant, the field $\boldsymbol{v}$ can be expressed in terms of $\boldsymbol{u}$ and $\boldsymbol{f}$. We find (8) and after substitution in the first line of (7), obtain Eq. (9) with a memory term.

Remark 2. The sequence of the solutions of the Dirichlet problem with holes (14) converges weakly in $H_0^1(\Omega;\mathbb{R}^3)$ to the unique solution of the problem (15) where a so-called strange term is present if $0 < \gamma < +\infty$ (see [3]).

1. Introduction et énoncé du résultat

Nous nous intéressons à l'homogénéisation du problème de vibration (1) lorsque la densité ρ_ε prend des valeurs très grandes sur un ensemble de boules réparties périodiquement suivant une période ε et dont la mesure tend vers 0. Dans le cas d'équations d'évolution scalaires, le calcul explicite des équations limites figure dans [1]. Nous présentons l'extension de ces résultats à l'élasticité linéaire. Étant donnée une suite (r_ε) de réels positifs tels que $r_\varepsilon \ll \varepsilon$, on considère la distribution ε-périodique B_{r_ε} de boules de rayon r_ε définies par

$$\begin{aligned} &Y := \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)^3; \quad Y_\varepsilon^i := \varepsilon\big(\{\boldsymbol{i}\} + Y\big); \quad I_\varepsilon := \{i \in \mathbb{Z}^3,\ Y_\varepsilon^i \subset \Omega\}; \\ &B := \big\{\boldsymbol{x}, \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} < 1\big\}; \quad B^r := rB; \quad B_{r_\varepsilon}^i := \varepsilon \boldsymbol{i} + B^{r_\varepsilon}; \quad B_{r_\varepsilon} := \bigcup_{i \in I_\varepsilon} B_{r_\varepsilon}^i. \end{aligned} \tag{2}$$

On fait les hypothèses suivantes :

$$
\begin{aligned}
&\mu_\varepsilon(x)=\mu_0>0, \quad \lambda_\varepsilon(x)=\lambda_0 \quad \text{si } x\in\Omega\setminus B_{r_\varepsilon},\\
&\mu_\varepsilon(x)=\mu_{1\varepsilon}\to+\infty, \quad \lambda_\varepsilon(x)=\lambda_{1\varepsilon}, \quad \text{si } x\in B_{r_\varepsilon},\\
&\int_\Omega \mu_\varepsilon\big|\boldsymbol{e}(\boldsymbol{a}_0)\big|^2\,\mathrm{d}x<C<+\infty, \quad \lambda_{1\varepsilon}=l_\varepsilon\mu_{1\varepsilon}, \quad l_\varepsilon\to l\in[0,+\infty[,\\
&\rho_\varepsilon(x)=\rho_0>0 \quad \text{si } x\in\Omega\setminus B_{r_\varepsilon}, \qquad \rho_\varepsilon(x):=\frac{|\Omega|}{|B_{r_\varepsilon}|}\rho\left(\frac{y_\varepsilon(x)}{r_\varepsilon}\right) \quad \text{si } x\in B_{r_\varepsilon},\\
&\rho\in C(\overline{B}),\ \rho>c>0, \quad \boldsymbol{y}_\varepsilon(x):=\sum_{i\in\mathbb{Z}^3}1_{Y_\varepsilon^i}(x)(\boldsymbol{x}-\varepsilon\boldsymbol{i}).
\end{aligned}
\tag{3}
$$

On pose :

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{\sigma}_0(\boldsymbol{w}):=\lambda_0\operatorname{tr}\big(\boldsymbol{e}(\boldsymbol{w})\big)\boldsymbol{I}+2\mu_0\boldsymbol{e}(\boldsymbol{w}), \quad \forall\boldsymbol{w}\in H^1(\Omega,\mathbb{R}^3); \quad \chi:=\frac{12\pi\mu_0(\lambda_0+2\mu_0)}{2\lambda_0+5\mu_0},\\
&\bar\rho:=\fint_B\rho\,\mathrm{d}y, \quad \bar\rho\boldsymbol{y}_G:=\fint_B\rho\boldsymbol{y}\,\mathrm{d}y, \quad J_{ij}^\rho:=-\int_B\rho y_iy_j\,\mathrm{d}y \quad \text{if } i\neq j, \quad J_{ii}^\rho:=\sum_{j\neq i}\int_B\rho|y_j|^2\,\mathrm{d}y.
\end{aligned}
\tag{4}
$$

Le problème limite dépend du paramètre :

$$
\gamma:=\lim_{\varepsilon\to0}\frac{r_\varepsilon}{\varepsilon^3}\in[0,+\infty], \tag{5}
$$

lequel s'exprime en fonction de la limite $\boldsymbol{u}$ de la suite $(\boldsymbol{u}_\varepsilon)$ des solutions de (1) et des limites $\boldsymbol{v}$ et $\boldsymbol{\omega}$ des suites $(\boldsymbol{v}_\varepsilon)$ et $(\boldsymbol{\omega}_\varepsilon)$ définies par

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{v}_\varepsilon:=\frac{|\Omega|}{|B_{r_\varepsilon}|}\boldsymbol{u}_\varepsilon 1_{B_{r_\varepsilon}\times(0,T)},\\
&\boldsymbol{\omega}_\varepsilon(x,t):=\sum_{i\in I_\varepsilon}\left(\fint_{\partial B_{r_\varepsilon}^i}\frac{3}{2}\left(\frac{\boldsymbol{y}_\varepsilon(s)}{r_\varepsilon}\wedge\boldsymbol{u}_\varepsilon(s,t)\right)\mathrm{d}\mathcal{H}^2(s)\right)1_{Y_\varepsilon^i}(x).
\end{aligned}
\tag{6}
$$

Les champs $\boldsymbol{v}$ et $\boldsymbol{\omega}$ caractérisent respectivement le déplacement effectif moyen et le vecteur rotation effectif moyen dans les inclusions.

Théorème 1.1. *Supposons* (3) *et* $0<\gamma<+\infty$*, alors la suite* $(\boldsymbol{u}_\varepsilon)$ *des solutions de* (1) *converge étoile-faiblement dans* $L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega;\mathbb{R}^3))$ *vers* $\boldsymbol{u}$ *et les suites* $(\boldsymbol{v}_\varepsilon)$ *et* $(\tilde{\boldsymbol{\omega}}_\varepsilon)$ *définies par* (6) *convergent étoile-faiblement dans* $L^\infty(0,T;\mathcal{M}(\overline{\Omega};\mathbb{R}^3))$ *respectivement vers* $\boldsymbol{v}$ *et* $\boldsymbol{\omega}$*, où* $(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{\omega})$ *est l'unique solution du problème* :

$$
\begin{cases}
\rho_0\dfrac{\partial^2\boldsymbol{u}}{\partial t^2}-\operatorname{div}\big(\boldsymbol{\sigma}_0(\boldsymbol{u})\big)+\chi\gamma(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v})=\rho_0\boldsymbol{f} \quad \textit{dans } \Omega\times(0,T),\\[2mm]
\bar\rho\dfrac{\partial^2\boldsymbol{v}}{\partial t^2}+\dfrac{\partial^2\boldsymbol{\omega}}{\partial t^2}\wedge\bar\rho\boldsymbol{y}_G+\chi\gamma(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{u})=\bar\rho\boldsymbol{f} \quad \textit{dans } \Omega\times(0,T),\\[2mm]
\boldsymbol{J}^\rho\dfrac{\partial^2\boldsymbol{\omega}}{\partial t^2}+\bar\rho\boldsymbol{y}_G\wedge\dfrac{\partial^2\boldsymbol{v}}{\partial t^2}+8\pi\mu_0\gamma\boldsymbol{\omega}=\bar\rho\boldsymbol{y}_G\wedge\boldsymbol{f} \quad \textit{dans } \Omega\times(0,T),\\[2mm]
(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{\omega})\in\big(L^2\big(0,T;H_0^1(\Omega;\mathbb{R}^3)\big)\times L^2\big(0,T;L^2(\Omega;\mathbb{R}^3)\big)^2\big)\cap\big(C^1\big([0,T];L^2(\Omega;\mathbb{R}^3)\big)\big)^3,\\[2mm]
\boldsymbol{u}(0)=\boldsymbol{v}(0)=\boldsymbol{a}_0, \quad \dfrac{\partial\boldsymbol{u}}{\partial t}(0)=\dfrac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial t}(0)=\boldsymbol{b}_0, \quad \boldsymbol{\omega}(0)=\dfrac{\partial\boldsymbol{\omega}}{\partial t}(0)=0.
\end{cases}
\tag{7}
$$

Remarque 1. Supposons pour simplifier que la fonction ρ soit constante (i.e. $\rho = \bar{\rho}$). On déduit de (4) et de (7) que $\boldsymbol{y}_G = 0$ et que $\boldsymbol{\omega} = 0$. Dans ce cas, le champ $\boldsymbol{v}$ s'exprime facilement en fonction de $\boldsymbol{u}$ et de $\boldsymbol{f}$ en résolvant la seconde équation dans (7). Posant $\delta := \sqrt{\chi \frac{\gamma}{\bar{\rho}}}$, on trouve :

$$\boldsymbol{v}(x,t) = \int_0^t \frac{\sin \delta(t-\tau)}{\delta} \big(\boldsymbol{f}(x,\tau) + \delta^2 \boldsymbol{u}(x,\tau)\big)\, \mathrm{d}\tau + \boldsymbol{b}_0(x) \frac{\sin \delta t}{\delta} + \boldsymbol{a}_0(x) \cos \delta t. \tag{8}$$

Après substitution dans la première ligne de (7), on obtient l'équation :

$$\begin{aligned} &\rho_0 \frac{\partial^2 \boldsymbol{u}}{\partial t^2} - \operatorname{div}\big(\boldsymbol{\sigma}_0(\boldsymbol{u})\big) + \bar{\rho}\delta^2 \left(\boldsymbol{u} - \delta \int_0^t \sin\big(\delta(t-\tau)\big) \boldsymbol{u}(\tau)\, \mathrm{d}\tau \right) \\ &\quad = \rho_0 \boldsymbol{f} + \bar{\rho}\delta \int_0^t \sin\big(\delta(t-\tau)\big) \boldsymbol{f}(\tau)\, \mathrm{d}\tau + \bar{\rho}\delta \boldsymbol{b}_0 \sin(\delta t) + \bar{\rho}\delta^2 \boldsymbol{a}_0 \cos(\delta t), \end{aligned} \tag{9}$$

où apparaît un terme de mémoire.

Corollaire 1.2. *Supposons* (3). *Alors*

(i) *si $\gamma = 0$, la suite $(\boldsymbol{u}_\varepsilon)$ converge étoile-faiblement dans $L^\infty(0,T; H_0^1(\Omega;\mathbb{R}^3))$ vers l'unique solution $\boldsymbol{u}$ du problème* :

$$\begin{cases} \rho_0 \dfrac{\partial^2 \boldsymbol{u}}{\partial t^2} - \operatorname{div}\big(\boldsymbol{\sigma}_0(\boldsymbol{u})\big) = \rho_0 \boldsymbol{f} \quad \textit{dans } \Omega \times (0,T), \\ \boldsymbol{u} \in L^2\big(0,T; H_0^1(\Omega;\mathbb{R}^3)\big) \cap C^1\big([0,T]; L^2(\Omega;\mathbb{R}^3)\big), \quad \boldsymbol{u}(0) = \boldsymbol{a}_0, \quad \dfrac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t}(0) = \boldsymbol{b}_0. \end{cases} \tag{10}$$

(ii) *Si $\gamma = +\infty$ et $\varepsilon^3 \gg r_\varepsilon^2$, alors la suite $(\boldsymbol{u}_\varepsilon)$ converge étoile-faiblement dans $L^\infty(0,T; H_0^1(\Omega;\mathbb{R}^3))$ vers l'unique solution $\boldsymbol{u}$ du problème :*

$$\begin{cases} (\rho_0 + \bar{\rho}) \dfrac{\partial^2 \boldsymbol{u}}{\partial t^2} - \operatorname{div}\big(\boldsymbol{\sigma}_0(\boldsymbol{u})\big) = (\rho_0 + \bar{\rho}) \boldsymbol{f} \quad \textit{dans } \Omega \times (0,T), \\ \boldsymbol{u} \in L^2\big(0,T; H_0^1(\Omega;\mathbb{R}^3)\big) \cap C^1\big([0,T]; L^2(\Omega;\mathbb{R}^3)\big), \quad \boldsymbol{u}(0) = \boldsymbol{a}_0, \quad \dfrac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t}(0) = \boldsymbol{b}_0. \end{cases} \tag{11}$$

De plus les suites $(\boldsymbol{v}_\varepsilon)$ et $(\boldsymbol{\omega}_\varepsilon)$ convergent étoile-faiblement dans $L^\infty(0,T; \mathcal{M}(\overline{\Omega};\mathbb{R}^3))$ respectivement vers $\boldsymbol{u}$ et vers 0.

Corollaire 1.3. *Supposons* (3) *et $\gamma > 0$. Soit $\boldsymbol{u}_\varepsilon$ la solution du problème* :

$$-\operatorname{div}\big(\boldsymbol{\sigma}_\varepsilon(\boldsymbol{u}_\varepsilon)\big) = \rho_\varepsilon \boldsymbol{f} \quad \textit{dans } \Omega, \quad \boldsymbol{u}_\varepsilon \in H_0^1(\Omega;\mathbb{R}^3), \ \big(\boldsymbol{f} \in C(\overline{\Omega};\mathbb{R}^3)\big). \tag{12}$$

Alors la suite $(\boldsymbol{u}_\varepsilon)$ converge faiblement dans $H_0^1(\Omega;\mathbb{R}^3)$ vers l'unique solution du problème :

$$-\operatorname{div}\big(\boldsymbol{\sigma}_0(\boldsymbol{u})\big) = (\rho_0 + \bar{\rho}) \boldsymbol{f} \quad \textit{dans } \Omega, \quad \boldsymbol{u} \in H_0^1(\Omega;\mathbb{R}^3). \tag{13}$$

Remarque 2. On peut montrer aussi que la suite $(\boldsymbol{u}_\varepsilon)$, où $\boldsymbol{u}_\varepsilon$ est la solution du problème de Dirichlet dans l'ouvert perforé $\Omega \setminus B_{r_\varepsilon}$:

$$-\operatorname{div}\big(\boldsymbol{\sigma}_\varepsilon(\boldsymbol{u}_\varepsilon)\big) = \boldsymbol{f} \quad \text{dans } \Omega \setminus B_{r_\varepsilon}, \quad \boldsymbol{u}_\varepsilon \in H_0^1(\Omega;\mathbb{R}^3), \quad \boldsymbol{u}_\varepsilon = 0 \text{ dans } B_{r_\varepsilon}, \tag{14}$$

converge faiblement dans $H_0^1(\Omega;\mathbb{R}^3)$ vers l'unique solution du problème :

$$\begin{cases} -\operatorname{div}\big(\boldsymbol{\sigma}_0(\boldsymbol{u})\big) + \chi\gamma\boldsymbol{u} = \boldsymbol{f} \quad \text{dans } \Omega, \quad \boldsymbol{u} \in H_0^1(\Omega;\mathbb{R}^3) & \text{si } 0 < \gamma < +\infty, \\ -\operatorname{div}\big(\boldsymbol{\sigma}_0(\boldsymbol{u})\big) = \boldsymbol{f} \quad \text{dans } \Omega, \quad \boldsymbol{u} \in H_0^1(\Omega;\mathbb{R}^3) & \text{si } \gamma = 0, \\ \boldsymbol{u} = 0 & \text{si } \gamma = +\infty, \end{cases} \tag{15}$$

où apparaît, lorsque $0 < \gamma < +\infty$, un terme dit « étrange » (voir [3]).

2. Ébauche de la démonstration

Sous les hypothèses du Théorème 1.1, on établit l'estimation suivante :

$$\int_\Omega \left(|\boldsymbol{u}_\varepsilon|^2 + |\boldsymbol{\omega}_\varepsilon|^2 + |\nabla \boldsymbol{u}_\varepsilon|^2 + \left|\frac{\partial \boldsymbol{u}_\varepsilon}{\partial t}\right|^2 \right)(\tau)\,\mathrm{d}x + \int_{B_{r_\varepsilon}} \left[\frac{\varepsilon^3}{r_\varepsilon^3} \left(|\boldsymbol{u}_\varepsilon|^2 + \left|\frac{\partial \boldsymbol{u}_\varepsilon}{\partial t}\right|^2 \right)(\tau) + \mu_{1\varepsilon} \big|\boldsymbol{e}(\boldsymbol{u}_\varepsilon)\big|^2(\tau) \right] \mathrm{d}x \leqslant C,$$

puis l'existence de champs $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{\omega}$ vérifiant, à des suites extraites près :

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{u}_\varepsilon \overset{\star}{\rightharpoonup} \boldsymbol{u}, \quad \text{étoile-faiblement dans } L^\infty\big(0,T;\, H_0^1(\Omega;\mathbb{R}^3)\big), \\ &\boldsymbol{v}_\varepsilon \overset{\star}{\rightharpoonup} \boldsymbol{v}, \quad \boldsymbol{\omega}_\varepsilon \overset{\star}{\rightharpoonup} \boldsymbol{\omega}, \quad \text{étoile-faiblement dans } L^\infty\big(0,T,\mathcal{M}(\overline{\Omega},\mathbb{R}^3)\big). \end{aligned} \tag{16}$$

Fixant une suite (R_ε) telle que $r_\varepsilon \ll R_\varepsilon \ll \varepsilon$ et des champs arbitraires, $\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\psi}, \boldsymbol{\xi} \in C^\infty(\Omega \times (0,T);\mathbb{R}^3)$ tels que $\boldsymbol{\varphi} = \boldsymbol{\psi} = \boldsymbol{\xi} = \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial t} = \frac{\partial \boldsymbol{\psi}}{\partial t} = \frac{\partial \boldsymbol{\xi}}{\partial t} = 0$ sur $\partial\Omega \times]0,T] \cup \Omega \times \{T\}$, on pose :

$$\boldsymbol{\phi}_\varepsilon = \boldsymbol{\varphi} + (\psi_{\varepsilon 1} - \varphi_1)\boldsymbol{\theta}_\varepsilon^{(1)} + (\psi_{\varepsilon 2} - \varphi_2)\boldsymbol{\theta}_\varepsilon^{(2)} + (\psi_{\varepsilon 3} - \varphi_3)\boldsymbol{\theta}_\varepsilon^{(3)} + \xi_{\varepsilon 1}\boldsymbol{\eta}_\varepsilon^{(1)} + \xi_{\varepsilon 2}\boldsymbol{\eta}_\varepsilon^{(2)} + \xi_{\varepsilon 3}\boldsymbol{\eta}_\varepsilon^{(3)}, \tag{17}$$

où $\boldsymbol{\psi}_\varepsilon(x,t) := \sum_{i\in I_\varepsilon} (\fint_{B^i_{r_\varepsilon}} \boldsymbol{\psi}(y,t)\,\mathrm{d}y) 1_{Y^i_\varepsilon}(x)$, $\boldsymbol{\xi}_\varepsilon(x,t) := \sum_{i\in I_\varepsilon} (\fint_{B^i_{r_\varepsilon}} \boldsymbol{\xi}(y,t)\,\mathrm{d}y) 1_{Y^i_\varepsilon}(x)$, et, notant $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$, $\boldsymbol{\eta}_\varepsilon^{(p)}$, $\boldsymbol{\theta}_\varepsilon^{(p)}$ sont les solutions respectives des problèmes :

$$\inf_{\boldsymbol{\eta}\in H^1(\Omega,\mathbb{R}^3)} \left\{ \int_\Omega \frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}_0(\boldsymbol{\eta}) : \boldsymbol{e}(\boldsymbol{\eta})\,\mathrm{d}x \;\middle|\; \boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{e}_p \wedge \frac{\boldsymbol{y}_\varepsilon(x)}{r_\varepsilon} \text{ dans } B_{r_\varepsilon},\ \boldsymbol{\eta} = 0 \text{ dans } \Omega \setminus B_{R_\varepsilon} \right\},$$

$$\inf_{\boldsymbol{\theta}\in H^1(\Omega,\mathbb{R}^3)} \left\{ \int_\Omega \frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}_0(\boldsymbol{\theta}) : \boldsymbol{e}(\boldsymbol{\theta})\,\mathrm{d}x \;\middle|\; \boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{e}_p \text{ dans } B_{r_\varepsilon},\ \boldsymbol{\theta} = 0 \text{ dans } \Omega \setminus B_{R_\varepsilon} \right\}.$$

Multiplions (1) par $\boldsymbol{\phi}_\varepsilon$ et intégrons par parties :

$$\begin{aligned} &\int_{\Omega\times(0,T)} \rho_\varepsilon \boldsymbol{u}_\varepsilon \cdot \frac{\partial^2 \boldsymbol{\phi}_\varepsilon}{\partial t^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t + \int_\Omega \rho_\varepsilon \boldsymbol{a}_0 \frac{\partial \boldsymbol{\phi}_\varepsilon(0)}{\partial t}\,\mathrm{d}x \\ &\quad - \int_\Omega \rho_\varepsilon \boldsymbol{b}_0 \boldsymbol{\phi}_\varepsilon(0)\,\mathrm{d}x + \int_{\Omega\times(0,T)} \boldsymbol{\sigma}_\varepsilon(\boldsymbol{u}_\varepsilon) : \boldsymbol{e}(\boldsymbol{\phi}_\varepsilon)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t = \int_{\Omega\times(0,T)} \rho_\varepsilon \boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{\phi}_\varepsilon\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t. \end{aligned} \tag{18}$$

On déduit de (3), de (16) et de (17) :

$$\begin{aligned} &\lim_{\varepsilon\to 0} \int_\Omega \rho_\varepsilon \boldsymbol{a}_0 \frac{\partial \boldsymbol{\phi}_\varepsilon}{\partial t}(0) - \rho_\varepsilon \boldsymbol{b}_0 \boldsymbol{\phi}_\varepsilon(0)\,\mathrm{d}x - \int_{\Omega\times(0,T)} \rho_\varepsilon \boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{\phi}_\varepsilon\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \\ &\quad = \int_\Omega \boldsymbol{a}_0 \left(\rho_0 \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial t}(0) + \bar\rho \frac{\partial \boldsymbol{\psi}}{\partial t}(0) + \frac{\partial \boldsymbol{\xi}}{\partial t}(0) \wedge \bar\rho\,\boldsymbol{y}_G \right) - \boldsymbol{b}_0 \big(\rho_0 \boldsymbol{\varphi}(0) + \bar\rho \boldsymbol{\psi}(0) + \boldsymbol{\xi}(0) \wedge \bar\rho\,\boldsymbol{y}_G \big)\,\mathrm{d}x \\ &\qquad - \int_{\Omega\times(0,T)} \boldsymbol{f}(\rho_0\boldsymbol{\varphi} + \bar\rho\boldsymbol{\psi} + \boldsymbol{\xi} \wedge \bar\rho\,\boldsymbol{y}_G)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t, \\ &\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\Omega\times(0,T)} \rho_\varepsilon \boldsymbol{u}_\varepsilon \cdot \frac{\partial^2 \boldsymbol{\phi}_\varepsilon}{\partial t^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \\ &\quad = \int_{\Omega\times(0,T)} \left(\rho_0 \boldsymbol{u} \cdot \frac{\partial^2 \boldsymbol{\varphi}}{\partial t^2} + \bar\rho \boldsymbol{v} \cdot \frac{\partial^2 \boldsymbol{\psi}}{\partial t^2} + (\bar\rho\,\boldsymbol{y}_G \wedge \boldsymbol{v}) \cdot \frac{\partial^2 \boldsymbol{\xi}}{\partial t^2} + (\boldsymbol{\omega} \wedge \bar\rho\,\boldsymbol{y}_G) \cdot \frac{\partial^2 \boldsymbol{\psi}}{\partial t^2} + \boldsymbol{J}^\rho \boldsymbol{\omega} \cdot \frac{\partial^2 \boldsymbol{\xi}}{\partial t^2} \right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}t. \end{aligned} \tag{19}$$

En ce qui concerne le dernier terme du premier membre de (18), on remarque que

$$\int_{\Omega\times(0,T)} \boldsymbol{\sigma}_\varepsilon(\boldsymbol{u}_\varepsilon):\boldsymbol{e}(\boldsymbol{\phi}_\varepsilon)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t = \int_{(\Omega\setminus B_{R_\varepsilon})\times(0,T)} \boldsymbol{\sigma}_0(\boldsymbol{u}_\varepsilon):\boldsymbol{e}(\boldsymbol{\varphi})\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t + \int_{(B_{R_\varepsilon}\setminus B_{r_\varepsilon})\times(0,T)} \boldsymbol{\sigma}_0(\boldsymbol{u}_\varepsilon):\boldsymbol{e}(\boldsymbol{\phi}_\varepsilon)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t, \tag{20}$$

où B_{R_ε} est définit en remplaçant r_ε par R_ε dans (2). On obtient :

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{(\Omega\setminus B_{R_\varepsilon})\times(0,T)} \boldsymbol{\sigma}_0(\boldsymbol{u}_\varepsilon):\boldsymbol{e}(\boldsymbol{\varphi})\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t = \int_{\Omega\times(0,T)} \boldsymbol{\sigma}_0(\boldsymbol{u}):\boldsymbol{e}(\boldsymbol{\varphi})\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t. \tag{21}$$

Grâce au calcul explicite des champs $\boldsymbol{\eta}_\varepsilon^{(p)}$, $\boldsymbol{\theta}_\varepsilon^{(p)}$ (cf. [4]), on trouve :

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{(B_{R_\varepsilon}\setminus B_{r_\varepsilon})\times(0,T)} \boldsymbol{\sigma}_0(\boldsymbol{u}_\varepsilon):\boldsymbol{e}(\boldsymbol{\phi}_\varepsilon)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t = \gamma \int_{\Omega\times(0,T)} \chi(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{u})(\boldsymbol{\psi}-\boldsymbol{\varphi}) + 8\pi\mu_0\boldsymbol{\omega}\boldsymbol{\xi}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t. \tag{22}$$

Passant à la limite dans (18), compte tenu de (19)–(22), on obtient une formulation variationnelle équivalente au problème limite annoncé dans le cas correspondant du théorème. Pour la démonstration des corollaires (et pour plus de détails) on se référera à [2].

Références

[1] M. Bellieud, Homogenisation of evolution problems for a composite medium with very small and heavy inclusions, Memory effects, ESAIM: COCV 11 (2005) 266–284.

[2] M. Bellieud, Vibrations of an elastic composite with very heavy inclusions, Memory effects, Preprint.

[3] D. Cioranescu, F. Murat, Un terme étrange venu d'ailleurs, I, in : Nonlinear Partial Differential Equations and Their Applications, Collège de France Seminar, Vol. II, in : Res. Notes in Math., vol. 60, Pitman, Boston, 1982, pp. 98–138.

[4] A.I. Lur'e, Three-Dimensional Problems of the Theory of Elasticity, Interscience Publishers, New York, 1964.