Available online at www.sciencedirect.com
ScienceDirect
C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 345 (2007) 219–224
COMPTES RENDUS MATHEMATIQUE
http://france.elsevier.com/direct/CRASS1/

Géométrie analytique

Courants localement résiduels et cohomologie de Dolbeault des variétés projectives

Bruno Fabre

22, rue Emile Dubois 75014 Paris, France

Reçu le 14 novembre 2005 ; accepté après révision le 12 juin 2007

Disponible sur Internet le 31 juillet 2007

Présenté par Jean-Pierre Demailly

Résumé

Soit X une variété projective irréductible de dimension n, et ω_X^q le faisceau de Barlet des q-formes régulières sur X. Soit $Y_1,\dots,Y_n$ des hypersurfaces principales sur X, dont les diviseurs associés sont amples, et s'intersectant proprement. Pour $p \leqslant n$, le groupe de cohomologie $H^p(X,\omega_X^q)$ peut se calculer comme la cohomologie de degré p d'un complexe de courants localement résiduels. On en déduit que tout élément de $H^p(X,\omega_X^q)$ admet comme représentant dans la classe de cohomologie de Dolbeault des courant $\bar\partial$-fermés de bidegré (q,p) un courant localement résiduel à support dans $Y_1\cap\cdots\cap Y_p$. Pour $q=n$, on obtient un autre théorème en se restreignant aux courants localement résiduels obtenus à partir de formes méromorphes à pôles logarithmiques sur les Y_i ; ce dernier théorème est une variante d'un Théorème 3.1 de Khesin et al. (2004), donnant un calcul de $H^p(X,\omega_X^n)$ par la cohomologie d'un complexe de « chaines polaires ». ***Pour citer cet article : B. Fabre, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 345 (2007).***

Abstract

Locally residual currents and Dolbeault cohomology of projective varieties. Let X be an irreductible projective variety of dimension n, and ω_X^q be the Barlet's sheaf of regular q-forms on X. Let $Y_1,\dots,Y_n$ be n principal hypersurfaces on X, defining ample line bundles, and intersecting properly. We show in this note that the Dolbeault cohomology group $H^p(X,\omega_X^q)$ $(p\leqslant n)$ can be computed as the p-th cohomology group of some complex of locally residual currents on X; we deduce that any element of $H^p(X,\omega_X^q)$ admits as representant in the Dolbeault cohomology class of $\bar\partial$-closed currents of bidegree (q,p) a locally residual current with support in $Y_1\cap\cdots\cap Y_p$. For $q=n$, we get another theorem by restricting to locally residual currents obtained from meromorphic n-forms with logarithmic poles on the Y_i: this second version is a variant of a Theorem 3.1 of Khesin et al. (2004), giving a representation of $H^p(X,\omega_X^n)$ as the cohomology of a complex of 'polar chains'. ***To cite this article: B. Fabre, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 345 (2007).***

Abridged English version

The main objects used in these results are the locally residual currents. For these, the reader can refer to [2]; let us give a brief recall. Let X be a reduced complex analytic space of pure dimension n. First, there is, associated to any

Adresse e-mail : erbaf.onurb@free.fr.

1631-073X/$ – see front matter © 2007 Académie des sciences. Publié par Elsevier Masson SAS. Tous droits réservés.
doi:10.1016/j.crma.2007.06.013

meromorphic q-form ω on X a principal value current $[\omega]$. We say that ω is *regular* if this current is $\bar\partial$-closed. We denote ω_X^q the sheaf of regular q-forms on X. If Z is an analytic subset of pure dimension on X, and ω a meromorphic form on Z, we define: $\omega \wedge [Z](\phi) := [\omega](\phi_{|Y})$. Let Y be an hypersurface of X intersecting Z properly; we say that ω has a *logarithmic pole* on Y (we denote $\mathrm{Pol}(\omega) \subset Y$) if the current $\bar\partial\omega \wedge [Z]$ can still be written $\omega' \wedge [Y \cap Z]$, with a regular form ω'.

Secondly, let $Y_1, \dots, Y_{p+1}$ be $p+1$ principal hypersurfaces on X, such that $Y_1 \cap \dots \cap Y_k$ is an analytic subset of pure codimension k for $k \leqslant p+1$. Let Ψ a meromorphic q-forms on X such that $\mathrm{Pol}(\Psi) \subset Y_1 \cup \dots \cup Y_{p+1}$. On a Stein domain $U \subset X$, let us choose holomorphic functions $f_1, \dots, f_{p+1}$ such that $Y_i \cap U = \{f_i = 0\}$ $(1 \leqslant i \leqslant p+1)$. Then, for ϕ a smooth differential form with compact support in U, we define:

$$\mathrm{Res}_{Y_1,\dots,Y_p} P_{Y_{p+1}}(\Psi)(\phi) := \lim_{\epsilon \to 0} \int\limits_{|f_1|=\epsilon_1,\dots,|f_p|=\epsilon_p,|f_{p+1}|\geqslant\epsilon_{p+1}} \Psi \wedge \phi,$$

$$\mathrm{Res}_{Y_1,\dots,Y_{p+1}}(\Psi)(\phi) := \lim_{\epsilon \to 0} \int\limits_{|f_1|=\epsilon_1,\dots,|f_p|=\epsilon_p,|f_{p+1}|=\epsilon_{p+1}} \Psi \wedge \phi,$$

where the limit is taken on a sequence of $\epsilon_m = (\epsilon_{m,1}, \dots, \epsilon_{m,p+1})$ such that $\epsilon_{m,1} \to 0$, $\epsilon_{m,i+1}/\epsilon_{m,i}^k \to 0$ $(1 \leqslant i \leqslant p)$ for any integer k. By [2], these are well-defined currents, independent of the choice of ϵ_m and of $f_1, \dots, f_{p+1}$. By means of a partition of unity associated to a covering $(U_i)_{i\in I}$ with Stein open subsets, we then define the currents on the whole X. These currents are called *residual*. We have:

$$\mathrm{Res}_{Y_1,\dots,Y_{p+1}}(\Psi)(\phi) = \bar\partial\, \mathrm{Res}_{Y_1,\dots,Y_p} P_{Y_{p+1}}(\Psi).$$

A *locally residual* current is a current which can be written locally as a residual current. Let $Z \subset X$ be an analytic subset of pure codimension p. Then, let us denote by $\mathcal{C}_Z^{q,p}$ the sheaf which associates to any open subset U the set $\mathcal{C}_Z^{q,p}(U)$ of $\bar\partial$-closed locally residual currents of bidegree (q,p), with support contained in Z. If Y is an hypersurface intersecting Z properly, we denote by $\mathcal{C}_Z^{q,p}(*Y)$ the sheaf of locally residual currents with support in Z, $\bar\partial$-closed outside Y. We can see that $\mathcal{C}_Z^{q,p}(*Y)$ is obtained from $\mathcal{C}_Z^{q,p}$ by 'allowing poles on Y'. We define a subsheaf $\mathcal{C}_Z^{q-p}$ (resp. $\mathcal{C}_Z^{q-p}(Y)$) of $\mathcal{C}_Z^{q,p}$ (resp. of $\mathcal{C}_Z^{q,p}(*Y)$) as follows: $\mathcal{C}_Z^{q-p}(U)$ (resp. $\mathcal{C}_Z^{q-p}(Y)(U)$) consists of the currents on the open set U written as $\omega \wedge [Z \cap U]$, with ω a regular $(q-p)$-form on $Z \cap U$ (resp. meromorphic on $Z \cap U$, with logarithmic pole on Y).

First, we have the following exact resolution of ω_X^q, with as morphisms the $\bar\partial$-operator:

$$0 \to \omega_X^q \to \mathcal{C}^{q,0}(*Y_1) \to \mathcal{C}_{Y_1}^{q,1}(*Y_2) \to \cdots \to \mathcal{C}_{Y_1\cap\cdots\cap Y_{p-1}}^{q,p-1}(*Y_p) \to \mathcal{C}_{Y_1\cap\cdots\cap Y_p}^{q,p} \to 0.$$

Let us now assume moreover that X is an irreductible projective variety of dimension n, and let $Y_1, \dots, Y_n$ be principal hypersurfaces, such that the Y_i are *positive*, in the sense that the corresponding line bundles are ample. Then:

Theorem 1. *The preceding resolution of ω_X^q with $p = n$ is acyclic*; *thus we have a canonical isomorphism for all i, $1 \leqslant i \leqslant n$*:

$$H^i(X, \omega_X^q) \simeq H^0(X, \mathcal{C}_{Y_1\cap\cdots\cap Y_i}^{q,i})/\bar\partial H^0\big(X, \mathcal{C}_{Y_1\cap\cdots\cap Y_{i-1}}^{q,i-1}(*Y_i)\big).$$

Moreover, an element $T \in H^0(\mathcal{C}_{Y_1\cap\cdots\cap Y_{i-1}}^{q,i-1}(*Y_i))$ can be written as a global residue: $T = \mathrm{Res}_{Y_1,\dots,Y_{i-1}} P_{Y_i}(\Psi)$, *with Ψ a meromorphic q-forms on X with* $\mathrm{Pol}(\Psi) \subset Y_1 \cup \dots \cup Y_i$; *and T is $\bar\partial$-exact iff we can choose Ψ with* $\mathrm{Pol}(\Psi) \subset Y_1 \cup \dots \cup Y_{i-1}$.

Let us now assume, moreover, that the intersections $Y_1 \cap \dots \cap Y_i$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ are reduced.

Theorem 2. *We have another acyclic resolution*:

$$0 \to \omega_X^n \to \mathcal{C}_X^n(Y_1) \to \mathcal{C}_{Y_1}^{n-1}(Y_2) \to \cdots \to \mathcal{C}_{Y_1\cap\cdots\cap Y_{n-1}}^1(Y_n) \to \mathcal{C}_{Y_1\cap\cdots\cap Y_n}^0 \to 0.$$

Thus we have a canonical isomorphism for all i, $0 \leqslant i \leqslant n$:

$$H^i(X, \omega_X^n) \simeq H^0(X, \mathcal{C}_{Y_1\cap\cdots\cap Y_i}^{n-i})/\bar\partial H^0\big(X, \mathcal{C}_{Y_1\cap\cdots\cap Y_{i-1}}^{n-i+1}(Y_i)\big).$$

Moreover, an element $T = H^0(X, \mathcal{C}^{n-i+1}_{Y_1\cap\cdots\cap Y_{i-1}}(Y_i))$ *can be written as a global residue*: $T \in \mathrm{Res}_{Y_1,\ldots,Y_{i-1}} P_{Y_i}(\Psi)$, *with* Ψ *a meromorphic* n*-form with logarithmic poles on* $Y_1 \cup \cdots \cup Y_i$; *and* T *is* d*-exact iff we can choose* Ψ *with* $\mathrm{Pol}(\Psi) \subset Y_1 \cup \cdots \cup Y_{i-1}$.

1. Théorèmes principaux

Pour les courants localement résiduels, on peut se référer à [2] ; on donne ici un bref rappel. Soit X une espace analytique réduit de dimension pure n. On associe à une q-forme méromorphe ω un courant « valeur principale » $[\omega]$, qui coïncide avec le courant d'intégration naturellement associé à ω lorsque ω est intégrable. On dit que ω est régulière sur X si ce courant est $\bar\partial$-fermé. On note ω^q_X le faisceau des q-formes régulières sur X.

De plus, si Z est un sous-ensemble analytique de X de dimension pure, et ω une forme méromorphe sur Z, on peut définir un courant $\omega \wedge [Z]$ sur X, par : $\omega \wedge [Z](\phi) := [\omega](\phi_{|Z})$. Soit Y une hypersurface de X coupant Z proprement ; on dit que la q-forme méromorphe ω sur Z a un pôle dans Y (on note $\mathrm{Pol}(\omega) \subset Y$) si ω est régulière en dehors de Y ; et a un pôle *logarithmique* dans Y, si $\bar\partial\omega \wedge [Z]$ est encore de la forme $\omega' \wedge [Z \cap Y]$, avec ω' régulière.

Soit maintenant $Y_1, \ldots, Y_{p+1}$ $p+1$ hypersurfaces principales telles que $Y_1 \cap \cdots \cap Y_i$ est un sous-ensemble analytique de codimension pure i pour $1 \leqslant i \leqslant p+1$. On définit alors, pour une q-formse méromorphe Ψ telle que $\mathrm{Pol}(\Psi) \subset Y_1 \cup \cdots \cup Y_{p+1}$, les courants suivants : sur un ouvert de Stein U, on choisit des fonctions holomorphes $f_1, \ldots, f_{p+1}$, telles que $U \cap Y_i = \{f_i = 0\}$ $(1 \leqslant i \leqslant p+1)$. Soit alors, pour une forme lisse à support compact ϕ dans U :

$$\mathrm{Res}_{Y_1,\ldots,Y_p} P_{Y_{p+1}}(\Psi)(\phi) = \lim_{\epsilon\to 0} \int_{|f_1|=\epsilon_1,\ldots,|f_p|=\epsilon_p,|f_{p+1}|\geqslant\epsilon_{p+1}} \Psi \wedge \phi,$$

$$\mathrm{Res}_{Y_1,\ldots,Y_p,Y_{p+1}}(\Psi)(\phi) = \lim_{\epsilon\to 0} \int_{|f_1|=\epsilon_1,\ldots,|f_p|=\epsilon_p,|f_{p+1}|=\epsilon_{p+1}} \Psi \wedge \phi,$$

où la limite est prise sur une suite $\epsilon_m = (\epsilon_{m,1}, \ldots, \epsilon_{m,p+1})$ telle que $\epsilon_{m,1} \to 0, \epsilon_{m,i+1}/\epsilon^k_{m,i} \to 0$ $(1 \leqslant i \leqslant p)$ pour tout entier k. On obtient ainsi des courants, indépendants du choix de la suite $(\epsilon_m)_{m\in N}$ et des fonctions $f_1, \ldots, f_{p+1}$. Alors on définit les courants sur tout X en utilisant une partition de l'unité associée à un recouvrement par des ouverts de Stein ; ils sont dits *résiduels*. Le courant $\mathrm{Res}_{Y_1,\ldots,Y_p} P_{Y_{p+1}}(\Psi)$ est de bidegré (q, p), et son support est une réunion de composantes de $Y_1 \cap \cdots \cap Y_p$. Un courant *localement résiduel* est un courant qui s'écrit localement comme courant résiduel.

Soit maintenant Z un sous-ensemble analytique de codimension pure p, et Y une hypersurface principale coupant Z proprement. On note alors $\mathcal{C}^{q,p}_Z$ (resp. $\mathcal{C}^{q,p}_Z(*Y)$) le faisceau qui associe à un ouvert U l'ensemble $\mathcal{C}^{q,p}_Z(U)$ des courants localement résiduels de bidegré (q, p) à support dans Z, et $\bar\partial$-fermés (resp. $\bar\partial$-fermés en dehors de Y).

Supposons Z localement intersection complète. On sait alors, d'après [2], que les faisceaux $\mathcal{C}^{q,p}_Z$ et $\mathcal{C}^{q,p}_Z(*Y)$ sont des $\mathcal{O}_X$-modules, et de plus on a pour ces $\mathcal{O}_X$-modules la suite exacte :

$$0 \to \mathcal{C}^{q,p}_Z \to \mathcal{C}^{q,p}_Z(*Y) \to \mathcal{C}^{q,p+1}_{Z\cap Y} \to 0. \tag{1}$$

On définit un sous-faisceau $\mathcal{C}^{q-p}_Z$ (resp. $\mathcal{C}^{q-p}_Z(Y)$) de $\mathcal{C}^{q,p}_Z$ (resp. de $\mathcal{C}^{q,p}_Z(*Y)$), comme le faisceau des courants s'écrivant sur l'ouvert U comme $\omega \wedge [Z \cap U]$, avec ω une $(q-p)$-forme régulière sur $Z \cap U$ (resp. méromorphe sur $Z \cap U$, à pôle logarithmique sur Y).

On a les suites exactes suivantes. Tout d'abord, des suites exactes courtes de Coleff-Herrera (cf. [2]) pour $1 \leqslant i \leqslant p+1$:

$$0 \to \mathcal{C}^{q,i-1}_{Y_1\cap\cdots\cap Y_{i-1}} \to \mathcal{C}^{q,i-1}_{Y_1\cap\cdots\cap Y_{i-1}}(*Y_i) \xrightarrow{\bar\partial} \mathcal{C}^{q,i}_{Y_1\cap\cdots\cap Y_i} \to 0.$$

On en déduit la suite exacte longue suivante :

$$0 \to \omega^q_X \to \mathcal{C}^{q,0}(*Y_1) \to \cdots \to \mathcal{C}^{q,p}_{Y_1\cap\cdots\cap Y_p}(*Y_{p+1}) \to \mathcal{C}^{q,p+1}_{Y_1\cap\cdots\cap Y_{p+1}} \to 0. \tag{2}$$

Soit $Y^i := Y_1 \cup \cdots \cup Y_{i-1} \cup Y_{i+1} \cup \cdots \cup Y_p$. La suite exacte suivante est écrite dans [1], une fois que l'on a identifié $\mathcal{C}^{q,p}_{Y_1\cap\cdots\cap Y_p}$ avec $\mathcal{Q} := \omega^q_X(*Y_1 \cup \cdots \cup Y_p)/\sum_{i=1}^p \omega^q_X(*Y^i)$, où les δ_i sont les sommes alternées usuelles :

$$\begin{aligned}0 \to\ &\omega_X^q \to \bigoplus_{i=1}^{p} \omega_X^q(*Y_i) \xrightarrow{\delta_1} \cdots \xrightarrow{\delta_{p-2}} \bigoplus_{i=1}^{p} \omega_X^q(*Y^i)\\ &\xrightarrow{\delta_{p-1}} \omega_X^q(*Y_1 \cup \cdots \cup Y_p) \xrightarrow{\mathrm{Res}_{Y_1,\dots,Y_p}} \mathcal{C}^{q,p}_{Y_1\cap\cdots\cap Y_p} \to 0,\end{aligned} \tag{3}$$

En modifiant le complexe précédent pour permettre des pôles sur Y_{p+1} on obtient, comme le foncteur $\mathcal{F} \mapsto \mathcal{F}(*Y_{p+1})$ est exact, la suite exacte :

$$\begin{aligned}0 \to\ &\omega_X^q(*Y_{p+1}) \to \bigoplus_{i=1}^{p} \omega_X^q\bigl(*(Y_i \cup Y_{p+1})\bigr) \to \cdots \to \bigoplus_{i=1}^{p} \omega_X^q\bigl(*(Y^i \cup Y_{p+1})\bigr)\\ &\to \omega_X^q\bigl(*(Y_1 \cup \cdots \cup Y_{p+1})\bigr) \to \mathcal{C}^{q,p}_{Y_1\cap\cdots\cap Y_p}(*Y_{p+1}) \to 0.\end{aligned} \tag{4}$$

Supposons maintenant de plus que X une variété projective irréductible de dimension n, que $p+1=n$, et que les hypersurfaces $Y_1,\dots,Y_n$ sont *positives*, dans le sens que les fibrés correspondants sont amples.

Théorème 1.

1. *Le complexe* (2) *pour $p+1=n$, donne une résolution acyclique de ω_X^q ; on en déduit un isomorphisme canonique pour tout i, $1 \leqslant i \leqslant n$:*

$$H^i(X,\omega_X^q) \simeq H^0(X,\mathcal{C}^{q,i}_{Y_1\cap\cdots\cap Y_i})/\bar\partial H^0\bigl(X,\mathcal{C}^{q,i-1}_{Y_1\cap\cdots\cap Y_{i-1}}(*Y_i)\bigr).$$

2. *De plus, un élément $T \in H^0(X,\mathcal{C}^{q,i-1}_{Y_1\cap\cdots\cap Y_{i-1}}(*Y_i))$ s'écrit comme un résidu global :* $T = \mathrm{Res}_{Y_1,\dots,Y_{i-1}} P_{Y_i}(\Psi)$, *avec Ψ méromorphe à pôles dans $Y_1 \cup \cdots \cup Y_i$; et T est $\bar\partial$-exacte ssi on peut choisir Ψ à pôles dans $Y_1 \cup \cdots \cup Y_{i-1}$.*

Démonstration. Les faisceaux $\mathcal{F}(*Y)$, pour un faisceau $\mathcal{F}$ cohérent et une hypersurface positive Y, sont acycliques. Pour le voir, imposons une limitation sur l'ordre des pôles : on obtient des faisceaux $\mathcal{F}(tY)$, qui ont des pôles d'ordre $\leqslant t$ le long des Y. Ces faisceaux sont cohérents ; on obtient : $H^j(X,\mathcal{F}(tY)) = 0$ pour $j>0$ et $t \gg 0$ d'après le théorème de Serre. Comme X est compact, on peut effectuer le passage à la limite pour $t \to \infty$, et on obtient : $H^j(X,\mathcal{F}(*Y)) = 0$.

Considérons la suite exacte (4). Ainsi, les faisceaux $\omega_X^q(*Y_{j_1} \cup \cdots \cup Y_{j_s} \cup Y_{p+1})$ de cette suite sont acycliques : on obtient l'acyclicité pour tous les termes de la suite, sauf pour le dernier. Mais pour $\mathcal{C}^{q,p}_{Y_1\cap\cdots\cap Y_p}(*Y_{p+1})$ cela découle du fait qu'un faisceau ayant une résolution acyclique est lui-même acyclique.

Pour $p+1=n$, la suite exacte 2 nous donne une résolution acyclique de ω_X^q, et nous donne pour $i \leqslant n$:

$$H^i(X,\omega_X^q) \simeq H^0(X,\mathcal{C}^{q,i}_{Y_1\cap\cdots\cap Y_i})/\bar\partial H^0\bigl(\mathcal{C}^{q,i-1}_{Y_1\cap\cdots\cap Y_{i-1}}(*Y_i)\bigr).$$

En appliquant le foncteur $H^0(X,\bullet)$ des sections globales dans la suite (4), on déduit de l'acyclicité une application surjective pour $p \leqslant n-1$:

$$Res_{Y_1,\dots,Y_p} P_{Y_{p+1}} : H^0\bigl(X,\omega_X^q(*Y_1 \cup \cdots \cup Y_{p+1})\bigr) \to H^0\bigl(X,\mathcal{C}^{q,p}_{Y_1\cap\cdots\cap Y_p}(*Y_{p+1})\bigr).$$

Considérons la suite exacte (2). On en déduit une suite d'injections :

$$H^1(X,\mathcal{C}^{q,p}_{Y_1\cap\cdots\cap Y_p}) \to H^2(X,\mathcal{C}^{q,p-1}_{Y_1\cap\cdots\cap Y_{p-1}}) \to \cdots \to H^{p+1}(X,\omega_X^q).$$

Si $T \in H^0(X,\mathcal{C}^{q,p+1}_{Y_1\cap\cdots\cap Y_{p+1}})$ est $\bar\partial$-exact, alors sa classe dans $H^{p+1}(X,\omega_X^q)$ est nulle, donc aussi sa classe dans $H^1(X,\mathcal{C}^{q,p}_{Y_1\cap\cdots\cap Y_p})$, ce qui nous donne par la suite exacte :

$$0 \to \mathcal{C}^{q,p}_{Y_1\cap\cdots\cap Y_p} \to \mathcal{C}^{q,p}_{Y_1\cap\cdots\cap Y_p}(*Y_{p+1}) \to \mathcal{C}^{q,p+1}_{Y_1\cap\cdots\cap Y_{p+1}} \to 0$$

que $T = \bar\partial T'$, avec $T' \in H^0(X,\mathcal{C}^{q,p}_{Y_1\cap\cdots\cap Y_p}(*Y_{p+1}))$; alors $T' = \mathrm{Res}_{Y_1,\dots,Y_p} P_{Y_{p+1}}(\Psi)$ avec $\mathrm{Pol}(\Psi) \subset Y_1 \cup \cdots \cup Y_{p+1}$; et donc, $T = \mathrm{Res}_{Y_1,\dots,Y_{p+1}}(\Psi)$. Réciproquement, si T peut s'écrire $\mathrm{Res}_{Y_1,\dots,Y_{p+1}}(\Psi)$ avec $\mathrm{Pol}(\Psi) \subset Y_1 \cup \cdots \cup Y_{p+1}$, alors il s'écrit aussi : $T = \bar\partial \mathrm{Res}_{Y_1,\dots,Y_p} P_{Y_{p+1}}(\Psi)$. □

Supposons maintenant $q = n$, et de plus que les intersections $Y_1 \cap \cdots \cap Y_i$ sont réduites. En modifiant dans la suite exacte (2) les pôles par les pôles logarithmiques, on obtient pour $q = n$ le sous-complexe suivant, qui reste exact :

$$0 \to \omega_X^q \to \mathcal{C}_X^q(Y_1) \to \mathcal{C}_{Y_1}^{q-1}(Y_2) \to \cdots \to \mathcal{C}_{Y_1\cap\cdots\cap Y_p}^{q-p}(Y_{p+1}) \to \mathcal{C}_{Y_1\cap\cdots\cap Y_{p+1}}^{q-p-1} \to 0. \tag{5}$$

En effet, on peut sur un ouvert de Stein U écrire un courant résiduel $T \in H^0(U, \mathcal{C}_{Y_1\cap\cdots\cap Y_i}^{q-i})$ comme résidu $T = \mathrm{Res}_{Y_1,\ldots,Y_i}(\Psi)$ d'un forme méromorphe Ψ avec un pôle logarithmique sur $Y_1 \cup \cdots \cup Y_i$, d'où l'exactitude de la suite.

De même, les sous-complexes des suites exactes (6) obtenus en se restreignant aux pôles logarithmiques restent exacts :

$$0 \to \omega_X^q \to \bigoplus_{i=1}^{p} \omega_X^q(Y_i) \xrightarrow{\delta_1} \cdots \to \bigoplus_{i=1}^{p} \omega_X^q(Y^i) \xrightarrow{\delta_{p-1}} \omega_X^q(Y_1 \cup \cdots \cup Y_p) \xrightarrow{\mathrm{Res}_{Y_1,\ldots,Y_p}} \mathcal{C}_{Y_1\cap\cdots\cap Y_p}^{q-p} \to 0 \tag{6}$$

$$\begin{aligned} 0 &\to \omega_X^q(Y_{p+1}) \to \bigoplus_{i=1}^{p} \omega_X^q(Y_i \cup Y_{p+1}) \to \cdots \to \bigoplus_{i=1}^{p} \omega_X^q(Y^i \cup Y_{p+1}) \\ &\to \omega_X^q(Y_1 \cup \cdots \cup Y_{p+1}) \to \mathcal{C}_{Y_1\cap\cdots\cap Y_p}^{q-p}(Y_{p+1}) \to 0. \end{aligned} \tag{7}$$

Théorème 2.

1. *Le sous-complexe*

$$0 \to \omega_X^n \to \mathcal{C}^n(Y_1) \to \mathcal{C}_{Y_1}^{n-1}(Y_2) \to \cdots \to \mathcal{C}_{Y_1\cap\cdots\cap Y_{n-1}}^{1}(Y_n) \to \mathcal{C}_{Y_1\cap\cdots\cap Y_n}^{0} \to 0$$

est encore une résolution acyclique de ω_X^n, et donc pour tout $i \leqslant n$:

$$H^i(X, \omega_X^n) \simeq H^0(X, \mathcal{C}_{Y_1\cap\cdots\cap Y_i}^{n-i})/\bar\partial H^0\big(X, \mathcal{C}_{Y_1\cap\cdots\cap Y_{i-1}}^{n-i+1}(Y_i)\big).$$

2. *De plus un élément $T \in H^0(X, \mathcal{C}_{Y_1\cap\cdots\cap Y_p}^{n-p}(Y_{p+1}))$ peut s'écrire comme un résidu global : $T = \mathrm{Res}_{Y_1,\cdots,Y_p} P_{Y_{p+1}}(\Psi)$, avec Ψ une n-forme méromorphe aux pôles logarithmiques dans $Y_1 \cup \cdots \cup Y_{p+1}$; et T est d-exact ssi on peut choisir Ψ aux pôles logarithmiques dans $Y_1 \cup \cdots \cup Y_p$.*

Remarque 1. On introduit un autre complexe, en ne fixant plus les supports. Le théorème précédent montre que tout (n, p)-courant $\bar\partial$-fermé est $\bar\partial$ -cohomologue à un courant $\omega \wedge [Y]$, avec ω régulière sur Y de codimension pure p. Il reste à montrer qu'un tel courant, s'il est $\bar\partial$-exact, est aussi de la forme $\bar\partial\omega' \wedge [Y']$, avec Y' de codimension pure $p-1$. Cela découle du fait que Y est inclus dans une intersection complète Z d'hypersurfaces positives ; on applique alors le théorème précédent. On retrouve alors exactement le théorème principal de [4], une fois que l'on a identifié leurs objets aux courants $\omega \wedge [Z]$ à pôles logarithmiques.

Démonstration. Considérons les suites exactes ci-dessus (5)–(7). Dans la suite (7), l'amplitude des diviseurs suffit, d'après le théorème d'annulation de Kodaira généralisé, pour montrer que les faisceaux à gauche sont acycliques ; donc le dernier faisceau est aussi acyclique. Donc, l'application des sections globales nous montre que tout $T \in \mathcal{C}_{Y_1\cap\cdots\cap Y_p}^{n-p}(Y_{p+1})$ s'écrit comme un résidu global $\mathrm{Res}_{Y_1,\ldots,Y_p} P_{Y_{p+1}}(\Psi)$ avec $\mathrm{Pol}(\Psi) \subset Y_1 \cup \cdots Y_{p+1}$.

La suite (5) pour $p+1 = n$ nous donne une résolution acyclique de ω_X^n, ce qui nous donne la première partie du théorème.

Soit Y une hypersurface positive coupant $Y_1, \ldots, Y_p$ proprement. On voit, comme $H^p(\omega_X^n(Y)) = 0$, que tout courant $T \in \mathcal{C}_{Y_1\cap\cdots\cap Y_p}^{n-p}(Y)$ s'écrit $\mathrm{Res}_{Y_p}(T')$, avec $T' \in \mathcal{C}_{Y_1\cap\cdots\cap Y_{p-1}}^{n-p+1}(Y \cup Y_p)$.

Supposons $T \in \mathcal{C}_{Y_1\cap\cdots\cap Y_p}^{n-p}$ $\bar\partial$-exact. On peut premièrement, comme sa classe dans $H^p(X, \omega_X^n)$ est nulle, l'écrire comme $\bar\partial T'$, avec $T' \in \mathcal{C}_{Y_1\cap\cdots\cap Y_{p-1}}^{n-p+1}(Y_p)$; puis, d'après ce qu'on a vu, T' s'écrit comme un résidu global $\mathrm{Res}_{Y_1,\ldots,Y_{p-1}} P_{Y_p}(\Psi)$ avec $\mathrm{Pol}(\Psi) \subset Y_1 \cup \cdots Y_p$, d'où $T = \mathrm{Res}_{Y_1,\ldots,Y_p}(\Psi)$, ce qui termine la démonstration. □

Corollaire. ([3]) Soient $P_1, \ldots, P_s$ les points de $Y_1 \cap \vdots \cap Y_n$, et $c_1, \ldots, c_s$ des nombres complexes. Une condition nécessaire et suffisante pour l'existence d'une n-forme méromorphe Ψ ayant des résidus ponctuels $\mathrm{Res}^{P_i}_{Y_1,\ldots,Y_n} = c_i$ $(1 \leqslant i \leqslant s)$, et aux pôles logarithmiques sur $Y_1 \cup \cdots \cup Y_n$, est que $\sum_{i=1}^{s} c_i = 0$.

Remerciements

Je remercie vivement S. Boucksom pour plusieurs discussions, ainsi que pour m'avoir communiqué la référence [4], qui est avec [1] la principale source de cette Note.

Références

[1] A. Dickenstein, M. Herrera, C. Sessa, On the global liftings of meromorphic forms, Manuscripta Math. 47 (1984) 31–54.
[2] A. Dickenstein, C. Sessa, Canonical representatives in moderate cohomology, Invent. Math 80 (1985) 417–434.
[3] P. Griffiths, Variations on a theorem of Abel, Invent. Math. 35 (1976) 321–390.
[4] B. Khesin, A. Rosly, R. Thomas, A polar De Rham theorem, Topology 43 (2004) 1231–1246.