Available online at www.sciencedirect.com
ScienceDirect
ELSEVIER
C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 345 (2007) 81–85
COMPTES RENDUS
MATHEMATIQUE
http://france.elsevier.com/direct/CRASS1/

Géométrie analytique

Sur la transformation d'Abel–Radon des courants localement résiduels en codimension supérieure

Bruno Fabre

22, rue Emile-Dubois 75014 Paris, France

Reçu le 19 septembre 2006 ; accepté après révision le12 mars 2007

Disponible sur Internet le 12 juillet 2007

Présenté par Pierre Lelong

Résumé

Soit $X \subset \mathbb{P}^N$ une sous-variété projective de dimension n de l'espace projectif complexe $\mathbb{P}^N$. On se donne un ouvert connexe U dans la grassmanienne $T = G(p, N)$ des p-plans de $\mathbb{P}^N$, et $U^* := \bigcup_{t \in U} H_t \subset \mathbb{P}^N$ l'ouvert correspondant. La transformation d'Abel–Radon R associe à un courant α de bidegré $(q + r, r)$ $\bar{\partial}$-fermé sur $V^* = U^* \cap X$ une q-forme holomorphe sur U, où $r + N - n = p$. Après avoir rappelé la définition des courants localement résiduels, on montre le théorème suivant (montré dans [Fabre B., Sur la transformation d'Abel–Radon des courants localement résiduels, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (5) IV (1) (2005) 27–57 ; version abrégée : C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 338 (2004) 787–792] pour $p = 1$ et $X = \mathbb{P}^N$), qui généralise le théorème d'Abel inverse montré par P. Griffiths (1976) :

Soit α un courant localement résiduel de bidegré $(q + r, r)$ sur V^*. Si $R(\alpha) = 0$, et $q > 0$, alors α s'étend sur X, de manière unique, en un courant $\tilde{\alpha}$ localement résiduel $\bar{\partial}$-fermé de même bidegré. ***Pour citer cet article : B. Fabre, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 345 (2007).***

Abstract

On the Abel–Radon transform of locally residual currents in great codimension. Let $X \subset \mathbb{P}^N$ be a projective submanifold of dimension n in the complex projective space $\mathbb{P}^N$. Let U be a domain in the Grassmannian $T := G(p, N)$ of p-planes in $\mathbb{P}^N$, and $U^* := \bigcup_{t \in U} H_t \subset \mathbb{P}^N$ be the union of the corresponding p-planes. The Abel–Radon transform associates to a $\bar{\partial}$-closed current α of bidegree $(q + r, r)$ on $V^* := U^* \cap X$ an holomorphic q-form $R(\alpha)$ on U, where $r + N - n = p$. After recalling the definition of locally residual currents, we show the following theorem (shown in [Fabre B., Sur la transformation d'Abel–Radon des courants localement résiduels, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (5) IV (1) (2005) 27–57; version abrégée: C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 338 (2004) 787–792] for $p = 1$ and $X = \mathbb{P}^N$), which generalizes the inverse Abel's theorem shown by P. Griffiths (1976):

Let α be a locally residual current of bidegree $(q + r, r)$ on V^*. If $R(\alpha) = 0$, and $q > 0$, then α extends to X in a unique way as a $\bar{\partial}$-closed locally residual current $\tilde{\alpha}$ of the same bidegree. ***To cite this article: B. Fabre, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 345 (2007).***

Adresse e-mail : erbaf.onurb@free.fr.

1631-073X/$ – see front matter
doi:10.1016/j.crma.2007.04.011

Abridged English version

Let us recall what a locally residual current is on a complex manifold X of dimension n. Let us be given $p+1$ complex hypersurfaces $Y_1, \ldots, Y_{p+1}$, such that for i, $1 \leqslant i \leqslant p+1$, $Y_1 \cap \cdots \cap Y_i$ is of pure codimension i. Then we define, for a meromorphic q-form Ψ with $\mathrm{Pol}(\Psi) \subset Y_1 \cup \cdots \cup Y_{p+1}$ the currents $\mathrm{Res}_{Y_1,\ldots,Y_{p+1}}(\Psi)$ (resp. $\mathrm{Res}_{Y_1,\ldots,Y_p} P_{Y_{p+1}}(\Psi)$, or simply $P_{Y_1}(\Psi)$ or $[\Psi]$ the *principal value* if $p=0$) as follows. On an open subset $U \subset X$, such that every $Y_i \cap U = \{f_i = 0\}$ for some holomorphic function f_i on U, we define, for a test-form ϕ:

$$\mathrm{Res}_{Y_1,\ldots,Y_{p+1}}(\Psi)(\phi) = \lim_{m\to\infty} \int\limits_{|f_1|=\epsilon_{m,1},\ldots,|f_p|=\epsilon_{m,p},|f_{p+1}|=\epsilon_{m,p+1}} \phi \wedge \Psi,$$

and

$$\mathrm{Res}_{Y_1,\ldots,Y_p} P_{Y_{p+1}}(\Psi)(\phi) = \lim_{m\to\infty} \int\limits_{|f_1|=\epsilon_{m,1},\ldots,|f_p|=\epsilon_{m,p},|f_{p+1}|\geqslant\epsilon_{m,p+1}} \phi \wedge \Psi,$$

for any sequence $\epsilon_m = (\epsilon_{m,1}, \ldots, \epsilon_{m,p+1}) \in \mathbb{R}_+^{p+1}$ such that $\lim_{m\to\infty} \epsilon_{m,1} = 0$ and $\lim_{m\to\infty} \epsilon_{m,i+1}/\epsilon_{m,i}^k = 0$ ($1 \leqslant i \leqslant p$) for all integers k. It does not depend on the sequence, nor on the choice of the f_i; thus we can define, by a covering of X and a partition of unity subordinated to it, currents on the whole X: we call them residual currents. The first gives a current of bidegree $(q, p+1)$, the second a current of bidegree (q, p), and moreover we have:

$$\mathrm{Res}_{Y_1,\ldots,Y_{p+1}}(\Psi) = \bar\partial \mathrm{Res}_{Y_1,\ldots,Y_p} P_{Y_{p+1}}(\Psi).$$

A locally residual current is a current which is locally a residual current.

Let $\mathbb{P}^N$ be the complex projective space of dimension N, and $X \subset \mathbb{P}^N$ a projective submanifold of dimension n. Let $U \subset T := G(p, N)$ be a domain in the grassmanian of p-planes. Let $U^* := \bigcup_{t\in U} H_t \subset \mathbb{P}^N$ be the corresponding domain, union of p-planes. Let α be a current of bidegree $(q+r, r)$ on $V^* := U^* \cap X$, where $r+N-n = p$. Then we have a natural inclusion $i : V^* \to U^*$; the Abel–Radon transform (cf. [3]) associates to α a current $R(\alpha) := p_{1*}(p_2^*(i_*(\alpha)))$ on U of bidegree $(q, 0)$, $\bar\partial$-closed if α is, and thus then identified with an holomorphic q-form. Let us assume moreover that α is locally residual. Then we have:

Theorem 1. *If $R(\alpha) = 0$, and $q > 0$, then α extends to X in a unique way as a locally residual current $\tilde\alpha$ $\bar\partial$-closed of the same bidegree.*

Proof. First assume $X = \mathbb{P}^N$. Since α is locally residual, we can choose a $t_0 \in U$, and homogeneous coordinates $x_0, \ldots, x_N$ such that

$$H_{t_0} = \{x = (x_0, \ldots, x_N) \mid x_0 = \cdots = x_{N-p-1} = 0\},$$

and an open neighborhood of it $U_\epsilon^* \subset U^*$ defined by:

$$U_\epsilon^* := \{x / |x_0|^2 + \cdots + |x_{N-p-1}|^2 < \epsilon^2(|x_{N-p}|^2 + \cdots + |x_N|^2)\},$$

such that α is $\bar\partial$-closed in U_ϵ^*. Then we have a corresponding domain $U_\epsilon \subset T$. Let us assume that $R(\alpha) = 0$. Then, since α is $\bar\partial$-closed on U_ϵ^*, we infer, following [5] that $\alpha = \bar\partial\beta$ for some current β of bidegree $(q+p, p-1)$ on U_ϵ^*. Let us first assume that $p = 1$. Then from [3] we know that α extends to $\mathbb{P}^N$ as a locally residual current; in particular the support of α extends as an algebraic subset. Let us assume $p > 1$. Then we can first show, by using projections from projective subspaces Δ of dimension $p-2$ contained in p-planes $H_t \subset U^*$, that the support Y of α is contained in an algebraic subset of codimension p, itself contained in the intersection of p projective hypersurfaces $Y_1, \ldots, Y_p$. Then we can deduce from $\alpha = \bar\partial\beta$ on U_ϵ^*, that α can be written as a global residue $\alpha = \mathrm{Res}_{Y_1,\ldots,Y_p}(\Psi)$ for some meromorphic $(q+p)$-form Ψ on U_ϵ^*, with $\mathrm{Pol}(\Psi) \subset Y_1 \cup \cdots \cup Y_p$. Then, we know that any meromorphic form on U_ϵ^* extends to a meromorphic form on $\mathbb{P}^N$ (for instance since U_ϵ^* is pseudoconcave in the sense of Andreotti); let $\tilde\Psi$ be an extension of Ψ on $\mathbb{P}^N$, and $\tilde\alpha := \mathrm{Res}_{Y_1,\ldots,Y_p}(\tilde\Psi)$. Since $\mathrm{Pol}(\tilde\Psi) \subset Y_1 \cup \cdots \cup Y_p$, we have $\tilde\alpha := \bar\partial \mathrm{Res}_{Y_1,\ldots,Y_{p-1}} P_{Y_p}(\tilde\Psi)$. Then $\tilde\alpha = \alpha$ on U_ϵ^*, and thus on U^*, since U is connected. Thus we have an extension of α. Second, suppose that $X \subset \mathbb{P}^N$ is any projective submanifold. Then, we first extend $\beta := i_*(\alpha)$ on U^* to a locally residual current $\tilde\beta$ $\mathbb{P}^N$, of bidegree $(q+p, p)$. Let f be any rational function vanishing on X; then $f\beta$ is still a locally residual current of bidegree $(q+p, p)$. If it would not be 0, its support would be of pure codimension p, and thus would intersect U^*, which is impossible; thus for any f, $f\tilde{\beta}=0$; similarly, $\bar{f}\tilde{\beta}=0$, and thus $\tilde{\beta}=i_*(\tilde{\alpha})$ for some locally residual $\tilde{\alpha}$ of bidegree $(q+r, r)$ on X, where $i : X \to \mathbb{P}^N$ is the canonical injection. The unicity of the extension $\tilde{\alpha}$ comes from the fact that if $\tilde{\alpha}=0$ on V^*, then $\tilde{\alpha}=0$ on X.

1. Théorème principal

Rappelons la définition des courants localement résiduels sur une variété analytique X complexe de dimension n.

Soit $Y_1, \ldots, Y_{p+1}$ $p+1$ hypersurfaces, telles que $Y_1 \cap \cdots \cap Y_i$ soit de codimension pure i pour $1 \leqslant i \leqslant p+1$. Soit Ψ une q-forme méromorphe de pôle $\mathrm{Pol}(\Psi) \subset Y_1 \cup \cdots \cup Y_{p+1}$. On définit le courant résiduel $\mathrm{Res}_{Y_1,\ldots,Y_{p+1}}(\Psi)$ (resp. $\mathrm{Res}_{Y_1,\ldots,Y_p} P_{Y_{p+1}}(\Psi)$, ou simplement $[\Psi]$ la *partie principale* si $p=0$) ainsi : tout d'abord, sur un ouvert de Stein $U \subset X$, sur lequel les hypersurfaces Y_i s'écrivent $Y_i \cap U = \{f_i = 0\}$ pour des fonctions holomorphes f_i qui définissent une suite régulière $(f_1, \ldots, f_{p+1})$, on définit, pour une suite $\epsilon_m = (\epsilon_{m,1}, \ldots, \epsilon_{m,p+1}) \in \mathbb{R}_+^{p+1}$ telle que $\lim_{m\to\infty} \epsilon_{m,1} = 0$, et $\lim_{m\to\infty} \epsilon_{m,i+1}/\epsilon_{m,i}^k = 0$ $(1 \leqslant i \leqslant p)$ pour tout entier k, les intégrales suivantes pour une forme lisse ϕ à support compact dans U :

$$\mathrm{Res}_{Y_1,\ldots,Y_{p+1}}(\Psi)(\phi) = \lim_{m\to\infty} \int_{|f_1|=\epsilon_{m,1},\ldots,|f_p|=\epsilon_{m,p},|f_{p+1}|=\epsilon_{m,p+1}} \phi \wedge \Psi,$$

$$\mathrm{Res}_{Y_1,\ldots,Y_p} P_{Y_{p+1}}(\Psi)(\phi) = \lim_{m\to\infty} \int_{|f_1|=\epsilon_{m,1},\ldots,|f_p|=\epsilon_{m,p},|f_{p+1}|\geqslant\epsilon_{m,p+1}} \phi \wedge \Psi.$$

Ces courants existent et ne dépendent pas de la suite (ϵ_m) choisie, ni des choix possibles de f_i, d'après [7]. Alors, on peut en utilisant un recouvrement et une partition de l'unité associée, définir le courant sur tout X ; ces courants sont de bidegrés respectifs $(q, p+1)$ et (q, p), et on a :

$$\mathrm{Res}_{Y_1,\ldots,Y_{p+1}}(\Psi) = \bar{\partial}\mathrm{Res}_{Y_1,\ldots,Y_p} P_{Y_{p+1}}(\Psi).$$

Un courant localement résiduel est un courant s'écrivant localement comme un courant résiduel. On définit, pour un sous-ensemble analytique Y de codimension pure p coupant Z proprement, le faisceau $\mathcal{C}_Y^{q,p}$ (resp. $\mathcal{C}_Y^{q,p}(Z_\infty)$) qui associe à un ouvert U l'ensemble des courants sur U localement résiduels de bidegré (q, p) à support dans Y et $\bar{\partial}$-fermés (resp. $\bar{\partial}$-fermé en dehors de Z). $\mathcal{C}_Y^{q,p}$ et $\mathcal{C}_Y^{q,p}(Z_\infty)$ sont des $\mathcal{O}_X$-modules.

Soit maintenant $\mathbb{P}^N$ l'espace projectif complexe de dimension N, et $X \subset \mathbb{P}^N$ une sous-variété projective de dimension n. Soit $T := G(p, N)$ la grassmanienne des p-plans dans $\mathbb{P}^N$. Soit $I := \{(t, z) \mid z \in H_t\} \subset G(p, N) \times \mathbb{P}^N$ la variété d'incidence, et $p_1 : I \to G(p, N)$, $p_2 : I \to \mathbb{P}^N$ les deux projections canoniques. Pour tout domaine U de $G(p, N)$ on pose $U^* := \bigcup_{t\in U} H_t$ la réunion des p-plans correspondants, $I_U := \{(t, z) \in U \times U^*, z \in H_t\}$, et on note encore les deux projections canoniques $p_1 : I_U \to U$, $p_2 : I_U \to U^*$. Soit $V^* := U^* \cap X$; on a une inclusion canonique $i : V^* \to U^*$. On définit la transformation d'Abel–Radon $R(\alpha) := p_{1*}(p_2{}^*(i_*(\alpha)))$, qui associe à un courant α de bidegré $(q+r, r)$ sur V^* un courant de bidegré $(q, 0)$ sur U, avec $r + N - n = p$ (les opérations sont bien définies du fait que p_1 est propre et p_2 est une submersion). Comme p_1 et p_2 commutent avec $\bar{\partial}$, on en déduit :

(i) Si $i_*(\alpha)$ est $\bar{\partial}$-exact, $R(\alpha) = 0$;
(ii) Si $\bar{\partial}\alpha = 0$, $R(\alpha)$ est une q-forme holomorphe sur U.

Le théorème suivant a été montré dans [3] pour $p = 1$ et $X = \mathbb{P}^N$:

Théorème 1. *Si $R(\alpha) = 0$, et $q > 0$, α s'étend sur X de manière unique en un courant localement résiduel $\tilde{\alpha}$ $\bar{\partial}$-fermé de même bidegré.*

Remarque. Ce théorème généralise le théorème d'Abel inverse de P. Griffiths, [6]. En effet, on obtient le théorème de Griffiths en prenant pour α le courant $\omega \wedge [Y]$, où Y est un sous-ensemble analytique de dimension pure p dans U^*, et ω est une q-forme méromorphe sur Y.

Démonstration. Supposons tout d'abord $X = \mathbb{P}^N$. Comme α est localement résiduel, on peut prendre un point $t_0 \in U \subset T$, tel que $\bar\partial\alpha = 0$ au voisinage du p-plan correspondant H_{t_0}. On peut choisir un système de coordonnées homogènes $(x_0, \ldots, x_N)$ tel que $H_{t_0} = \{x_0 = \cdots = x_{N-p-1} = 0\}$. Alors, on a un système fondamental de voisinages ouverts de H_{t_0} formé par les ouverts $U_\epsilon^* := \{x \mid (|x_0|^2 + \cdots + |x_{N-p-1}|^2) < \epsilon^2(|x_{N-p}|^2 + \cdots + |x_N|^2)\}$. L'ouvert U_ϵ^* est réunion des p-plans correspondant à $\|t\| \leqslant \epsilon$, où $t = (t_i^j)$ est le paramètre des p-plans H_t de sorte que H_t s'écrive : $x_j = t_0^j x_{N-p} + \cdots + t_p^j x_N$ $(0 \leqslant j \leqslant N-p-1)$. Soit $U_\epsilon \subset T$ l'ouvert correspondant.

Le théorème suivant est montré dans [5] :

Théorème. *Soit ϕ une forme lisse de bidegré $(q+p, p)$, $q > 0$, avec $\bar\partial\phi = 0$ dans U_ϵ^*. Si $R(\phi) = 0$, alors $\phi = \bar\partial\psi$, pour une forme lisse ψ de bidegré $(q+p, p-1)$.*

On en déduit que le théorème précédent reste valable pour ϕ un courant de bidegré $(q+p, p)$, puisqu'un tel courant $\bar\partial$-exact a une image nulle, et un tel courant $\bar\partial$-fermé est cohomologue à une forme lisse.

Supposons donc $R(\alpha) = 0$. Supposons d'abord $p = 1$. Rappelons la démonstration dans ce cas [3]. Dans U_ϵ^*, on a : $\alpha = \bar\partial\beta$, avec β de bidegré $(q+1, 0)$. On en déduit que $\beta = [\Psi]$ pour une certaine $(q+1)$-forme méromorphe Ψ sur U_ϵ^*. D'après [2], comme U_ϵ^* est pseudoconcave au sens d'Andreotti, Ψ s'étend sur $\mathbb{P}^N$ en une $(q+1)$-forme méromorphe $\tilde\Psi$; soit $\tilde\alpha := \bar\partial[\tilde\Psi]$. Alors, $\gamma := \alpha - \tilde\alpha$ est dans U^* localement résiduel de bidegré $(q+1, 1)$; $\gamma = 0$ dans U_ϵ^*. Si γ n'était pas nul sur U^*, son support serait une hypersurface de U^*, qui donc couperait H_{t_0} (U étant connexe).

Supposons maintenant $p > 1$. Soit Δ un sous-espace projectif de dimension $p-2$ contenu dans U_ϵ^*, qui évite $Y := \mathrm{Supp}(\alpha)$. On se donne un sous-espace projectif H de dimension $N-p+1$ qui évite Δ, et tel que pour tout $t \in U_\epsilon^*$, $H_t \cap H$ nous donne des droites D_t, dont la réunion forme un ouvert U'^*. Alors, on a une projection $p_\Delta : \mathbb{P}^N \setminus \Delta \to H$. On note encore $p_\Delta : p_\Delta^{-1}(U'^*) \to U'^*$. On pose $\alpha' := p_{\Delta *}(\alpha)$, qui est bien défini car, la restriction de p_Δ au support de α est propre, puisque Δ évite Y ; α' est un courant localement résiduel de bidegré $(q+1, 1)$ dans $U'^* \subset H$. On considère $R_1(\alpha')$ la transformation d'Abel–Radon par rapport aux droites de U'^*. Il est facile de montrer le lemme suivant, en associant à une droite D_t le p-plan engendré par cette droite et Δ :

Lemme 1. *$R_1(\alpha')$ s'identifie à la restriction de $R(\alpha)$ au cycle de Schubert de $G(p, N)$ correspondant aux p-plans contenant Δ.*

Donc, on a aussi $R_1(\alpha') = 0$, et α' provient d'un courant localement résiduel $\tilde\alpha'$ sur H. Si Y_Δ est l'hypersurface algébrique qui est le support de $\tilde\alpha'$, on a : $Y \subset Z_\Delta := p_\Delta^{-1}(Y_\Delta)$.

Lemme 2. *Y est algébrique, i.e. est un ouvert d'un ensemble algébrique $\tilde Y$ de codimension pure p.*

Démonstration. Considérons la famille d'hypersurfaces algébriques coniques de la forme $Z_{\Delta_t} := p_{\Delta_t}^{-1}(Y_{\Delta_t})$, obtenues pour des choix de sous-espaces projectifs Δ_t correspondant à un voisinage ouvert $W \subset G(p-2, N)$ du point correspondant à Δ. Considérons $Z := \bigcap_{t \in W} Z_{\Delta_t}$. Alors, on peut voir que *Y est un ouvert de Z*. Soit en effet un point $Q \in Y$. Alors, il existe un voisinage ouvert U_Q de Q tel que si le sous-espace projectif (P, Δ_t) engendré par $P \in U_Q$ et Δ_t coupe Y_{Δ_t}, il coupe aussi Y. Ainsi, $Z_{\Delta_t} \cap U_Q = \{P \in U_Q \mid (P, \Delta_t) \cap Y \neq \emptyset\}$. Alors : $Z \cap U_Q = Y \cap U_Q$. Supposons en effet qu'il existe un point P de $Z \cap U_Q$ en dehors de Y. Alors, ce point appartient à un $Z_{\Delta_{t'}}$, pour un certain $t' \in W$. On peut modifier légèrement t' de façon à obtenir $t'' \in W$, tel que le sous-espace projectif engendré par P et $\Delta_{t''}$ ne coupe pas Y. Ainsi, on en déduit que P n'appartient pas à $Z_{\Delta_{t''}}$, ni donc à Z, d'où une contradiction. Donc $Z \cap U_Q = Y \cap U_Q$, et Y un ouvert de Z. Soit $\tilde Y$ la réunion des composantes irréductibles de $\overline{Z}$ de dimension p. Alors, Y est encore un ouvert de $\tilde Y$.

Étant donné une hypersurface Z, on note $\Omega^r(Z_k)$ (resp. $\Omega^r(Z_\infty)$) le faisceau des r-formes méromorphes à pôle d'ordre $\leqslant k$ sur Z (resp. à pôle d'ordre quelconque).

Lemme 3. *Soit Z une hypersurface algébrique de $\mathbb{P}^N$. On a : $H^i(U_\epsilon^*, \Omega^r(Z_\infty)) = 0$, pour $1 \leqslant i \leqslant p-1$.*

Démonstration. On a la suite exacte :

$$H^i\big(\mathbb{P}^N,\Omega^r(Z_k)\big)\to H^i\big(U_\epsilon^*,\Omega^r(Z_k)\big)\to H_V^{i+1}\big(\mathbb{P}^N,\Omega^r(Z_k)\big),$$

où $V:=\mathbb{P}^N\backslash U_\epsilon^*$. Soit i, $1\leqslant i\leqslant p-1$. On a : $H^i(\mathbb{P}^N,\Omega^r(Z_k))=0$ pour $k\gg 0$ d'après Serre ; il suffit donc de montrer : $H_V^{i+1}(\mathbb{P}^N,\Omega^r(Z_k))=0$. Or, on sait que V, réunion de $(N-p-1)$-plans, est de plus $(N-p-1)$-complet, donc $H^j(V,\mathcal{F})=0$ pour $j\geqslant N-p$ et tout faisceau cohérent $\mathcal{F}$. De $H^{N-i-1}(V,\Omega^{N-r}(Z_{-k}))=0$ pour $i\leqslant p-1$, on déduit donc, par dualité (cf. [1]), $H_V^{i+1}(\mathbb{P}^N,\Omega^r(Z_k))=0$.

On en déduit le cas $k=\infty$ par passage à la limite, par compacité. □

Lemme 4. *Si le courant α localement résiduel sur U_ϵ^*, de support algébrique, et de bidegré (r,p), est $\bar\partial$-exact, il est globalement résiduel.*

Démonstration. Soit $Y_1,\dots,Y_p$ des hypersurfaces projectives en position d'intersection complète, telles que si $Z:=Y_1\cap\dots\cap Y_p$, on a : $Y\subset Z$. Soit $Y^i:=Y_1\cup\dots\cup Y_{i-1}\cup Y_{i+1}\cup\dots\cup Y_p$. Alors, on a une suite exacte, les δ_i étant des sommes alternées (cf. [4]) :

$$0\to\Omega^r\to\bigoplus_{i=1}^p\Omega^r(Y_{i\,\infty})\overset{\delta^1}{\to}\cdots\overset{\delta^{p-2}}{\to}\bigoplus_{i=1}^p\Omega^r\big(Y_\infty^i\big)$$
$$\overset{\delta^{p-1}}{\to}\Omega^r\big((Y_1\cup\dots\cup Y_p)_\infty\big)\overset{\mathcal{R}\mathrm{es}_{Y_1,\dots,Y_p}}{\to}\mathcal{C}_Z^{r,p}\to 0.$$

Soit $S_i:=\mathrm{Im}(\delta_i)(1\leqslant i\leqslant p-1)$; on a donc :

$$0\to S_{p-1}\to\Omega^r\big((Y_1\cup\dots\cup Y_p)_\infty\big)\overset{\mathcal{R}\mathrm{es}_{Y_1,\dots,Y_p}}{\to}\mathcal{C}_Z^{r,p}\to 0.$$

D'après les annulations du Lemme 3 pour U_ϵ^*, on a des injections :

$$H^1\big(U_\epsilon^*,S_{p-1}\big)\to H^2\big(U_\epsilon^*,S_{p-2}\big)\to\cdots\to H^{p-1}\big(U_\epsilon^*,S_1\big)\to H^p\big(U_\epsilon^*,\Omega^r\big).$$

On en déduit que si la classe de α dans $H^p(U_\epsilon^*,\Omega^r)$ est nulle, il en est de même pour la classe de α dans $H^1(U_\epsilon^*,S_{p-1})$; et donc α est globalement résiduel dans U_ϵ^*. □

Retournons à ce qui précède : soit α localement résiduel de bidegré $(q+p,p)$ dans U^*, $q>0$, $R(\alpha)=0$. On a vu que α a un support Y algébrique dans U^*. On a, d'après le lemme de Henkin–Gindikin, $\alpha=\bar\partial\beta$ sur U_ϵ^*, et donc α est globalement résiduel sur U_ϵ^* : $\alpha=\mathrm{Res}_{Y_1,\dots,Y_p}(\Psi)$, pour une $(q+p)$-forme méromorphe Ψ à pôle $\mathrm{Pol}(\Psi)\subset Y_1\cup\dots\cup Y_p$. Il en est de même pour le prolongement $\tilde\Psi$ de Ψ à $\mathbb{P}^N$: $\mathrm{Pol}(\tilde\Psi)\subset Y_1\cup\dots\cup Y_p$. Soit $\tilde\alpha:=\mathrm{Res}_{Y_1,\dots,Y_p}(\tilde\Psi)$. Considérons $\gamma:=\tilde\alpha-\alpha$; c'est un courant localement résiduel sur U^*, et nul sur U_ϵ^*. S'il était non nul, son support serait analytique de codimension p, et couperait H_{t_0}, puisque U est connexe. Ainsi, $\alpha=\tilde\alpha$ sur U^*.

Supposons maintenant $X\subset\mathbb{P}^N$ quelconque. Alors, soit $\beta:=i_*(\alpha)$ sur U^* ; alors β est de bidegré $(q+p,p)$ sur U^*, et on peut appliquer le théorème pour $X=\mathbb{P}^N$ pour β. On obtient alors un prolongement $\tilde\beta$ de β sur $\mathbb{P}^N$. Soit f une fonction rationnelle quelconque s'annulant sur X ; $f\tilde\beta$ est encore localement résiduel de bidegré $(q+p,p)$ sur $\mathbb{P}^N$; s'il était non nul, son support serait de codimension p, et donc couperait U^*, ce qui est impossible. De même, $\bar f\tilde\beta$. On a donc $\tilde\beta=i_*(\tilde\alpha)$, pour $\tilde\alpha$ un courant localement résiduel de bidegré $(q+r,r)$ sur X. On voit que $\tilde\alpha=\alpha$ sur V^*, et de plus qu'un tel prolongement $\tilde\alpha$ est unique, car $\tilde\alpha=0$ sur V^* implique $\tilde\alpha=0$ sur X.

Références

[1] A. Andreotti, H. Grauert, Théorèmes de finitude pour la cohomologie des espaces complexes, Bull. Soc. Math. France 90 (1962) 193–259.
[2] P. Dingoyan, Un phénomène de Hartogs dans les variétés projectives, Math. Z. 232 (1999) 217–240.
[3] B. Fabre, Sur la transformation d'Abel–Radon des courants localement résiduels, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (5) IV (1) (2005) 27–57 ; version abrégée : C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 338 (2004) 787–792.
[4] B. Fabre, Locally residual currents and Dolbeault cohomology on projective manifolds, Bull. Sci. Math. 130 (2006) 553–564.
[5] S.G. Gindikin, G.M. Henkin, Integral geometry for $\bar\partial$-cohomology in q-linear concave domains in CP^n, Funct. Anal. Appl. 12 (1978) 247–261.
[6] P. Griffiths, Variations on a theorem of Abel, Invent. Math. 35 (1976) 321–390.
[7] M. Herrera, N. Coleff, Les courants résiduels associés à une forme méromorphe, Lecture Notes in Math., vol. 633, Springer, 1979, 211 pp.