Available online at www.sciencedirect.com
ScienceDirect
C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 345 (2007) 663–666
Comptes Rendus Mathematique
http://france.elsevier.com/direct/CRASS1/

Combinatoire/Logique

Morphologie des tournois (-1)-critiques

Houmem Belkhechine [a], Imed Boudabbous [b], Jamel Dammak [c]

[a] *Faculté des sciences de Gabès, cité Riadh, Zirig 6072 Gabès, Tunisie*
[b] *Institut préparatoire aux études d'ingénieurs de Sfax, route Menzel-Chaker Km 0.5, 3018 Sfax, Tunisie*
[c] *Faculté des sciences de Sfax, BP 802, 3018 Sfax, Tunisie*

Reçu le 11 octobre 2007 ; accepté le 29 octobre 2007

Présenté par Jean-Yves Girard

Résumé

Étant donné un tournoi $T = (S, A)$, une partie X de S est un intervalle de T lorsque pour tous $a, b \in X$ et $x \in S - X$, $(a, x) \in A$ si et seulement si $(b, x) \in A$. Par exemple, $\emptyset$, $\{x\}$ $(x \in S)$ et S sont des intervalles de T, appelés intervalles triviaux. Un tournoi, dont tous les intervalles sont triviaux, est indécomposable ; sinon, il est décomposable. Un sommet x d'un tournoi indécomposable T est critique si le tournoi $T - x$ est décomposable. En 1993, J.H. Schmerl et W.T. Trotter ont caractérisé les tournois dont tous les sommets sont critiques, appelés tournois critiques. Ces tournois ont un cardinal impair $\geqslant 5$. Pour chaque entier impair $m \geqslant 5$, il existe trois tournois critiques de cardinal m. Dans cet article, nous caractérisons les tournois qui admettent un unique sommet non critique, que nous appelons tournois (-1)-critiques. Ces tournois ont un cardinal impair $\geqslant 7$. Pour chaque entier impair $m \geqslant 7$, il existe $3m - 15$ tournois (-1)-critiques de cardinal m. Notre travail prolonge une étude récente sur l'indécomposabilité et les sommets critiques faite par Y. Boudabbous et P. Ille. ***Pour citer cet article : H. Belkhechine et al., C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 345 (2007).***

Abstract

Morphology of the (-1)-critical tournaments. Given a tournament $T = (V, A)$, a subset X of V is an interval of T provided that for any $a, b \in X$ and $x \in V - X$, $(a, x) \in A$ if and only if $(b, x) \in A$. For example, $\emptyset$, $\{x\}$ $(x \in V)$ and V are intervals of T, called trivial intervals. A tournament, all the intervals of which are trivial, is indecomposable; otherwise, it is decomposable. A vertex x of an indecomposable tournament is critical if $T - x$ is decomposable. In 1993, J.H. Schmerl and W.T. Trotter characterized the tournaments, all the vertices of which are critical, called critical tournaments. The cardinality of these tournaments is odd. Given an odd integer $m \geqslant 5$, there exist three critical tournaments of cardinality m. In this article, we characterize the tournaments which admit a single non critical vertex, that we call (-1)-critical tournaments. The cardinality of these tournaments is odd. Given an odd integer $m \geqslant 7$, there exist $3m - 15$ (-1)-critical tournaments of cardinality m. Our work extends a recent study of indecomposability and critical vertices made by Y. Boudabbous and P. Ille. ***To cite this article: H. Belkhechine et al., C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 345 (2007).***

Adresses e-mail : houmem@gmail.com (H. Belkhechine), imed.boudabbous@fsegs.rnu.tn (I. Boudabbous), jdammak@yahoo.fr (J. Dammak).

1631-073X/$ – see front matter
doi:10.1016/j.crma.2007.11.006

1. Introduction

1.1. Généralités

Un *graphe orienté* $G = (S(G), A(G))$ ou (S, A), est constitué d'un ensemble fini S de sommets et d'un ensemble A de couples de sommets distincts, appelés *arcs* de G. Le *cardinal* de G est celui de S et on le note $|S|$. À chaque partie X de S est associé le *sous-graphe orienté* $G(X) = (X, A \cap (X \times X))$ de G induit par X. Pour $X \subseteq S$ (resp. $x \in S$), le graphe orienté $G(S - X)$, où $S - X = \{s \in S\colon\ s \notin X\}$, (resp. $G(S - \{x\})$) est noté $G - X$ (resp. $G - x$). Deux graphes $G = (S, A)$ et $G' = (S, A')$ sont *isomorphes* lorsqu'il existe un *isomorphisme* de G sur G', c'est-à-dire, une bijection f de S sur S' telle que pour tous $x, y \in S$, $(x, y) \in A$ si et seulement si $(f(x), f(y)) \in A'$.

Un *tournoi* est un graphe orienté G tel que pour tous $x \neq y \in S(G)$, on a : $(x, y) \in A(G)$ si et seulement si $(y, x) \notin A(G)$. Étant donné un tournoi $T = (S, A)$, pour tous $x \neq y \in S$, la notation $x \to y$ signifie $(x, y) \in A$. Pour tout $x \in S$, on pose $V_T^-(x) = \{y \in S\colon\ y \to x\}$ et $V_T^+(x) = \{y \in S\colon\ x \to y\}$. À chaque tournoi $T = (S, A)$ est associé son tournoi *dual* $T^\star = (S, A^\star)$, où $A^\star = \{(x, y)\colon\ (y, x) \in A\}$. Un tournoi T est un *ordre total* lorsque pour tous $x, y, z \in S(T)$, si $x \to y$ et $y \to z$, alors $x \to z$. Pour deux sommets distincts a et b d'un ordre total T, $a < b$ signifie $a \to b$. La notation $T = a_0 < \cdots < a_n$ signifie que T est l'ordre total défini sur $S = \{a_0, \ldots, a_n\}$ par $A(T) = \{(a_i, a_j)\colon\ i < j\}$.

1.2. Tournois indécomposables, sommets critiques

Étant donné un tournoi $T = (S, A)$, une partie I de S est un *intervalle* [4,5,7] (ou un *clan* [3]) de T lorsque pour tous $a, b \in I$ et pour tout $x \in S - I$, $(a, x) \in A$ si et seulement si $(b, x) \in A$. Par exemple, $\emptyset$, $\{x\}$ où $x \in S$, et S sont des intervalles de T, appelés les intervalles *triviaux* de T. Un tournoi est *indécomposable* [5,7] (ou *primitif* [3]) si tous ses intervalles sont triviaux et il est *décomposable* dans le cas contraire. Un sommet x d'un tournoi indécomposable T est dit *critique* si le tournoi $T - x$ est décomposable. Soit T un tournoi indécomposable à au moins 5 sommets. Le tournoi T est dit *critique* si tous ses sommets sont critiques. On généralise cette définition en disant que le tournoi T est $(-k)$-critique lorsqu'il admet exactement k sommets non critiques. Afin de rappeler la caractérisation des tournois critiques, nous introduisons, pour tout entier $n \geqslant 1$, les tournois T_{2n+1}, U_{2n+1} et V_{2n+1} définis sur $\{0, \ldots, 2n\}$ comme suit :

(i) $A(T_{2n+1}) = \{(i, j)\colon\ j - i \in \{1, \ldots, n\} \bmod 2n + 1\}$;
(ii) U_{2n+1} est le tournoi obtenu à partir de l'ordre total $0 < \cdots < 2n$ en inversant les arcs reliant deux sommets pairs ;
(iii) $V_{2n+1}(\{0, \ldots, 2n - 1\}) = 0 < \cdots < 2n - 1$ et $V^+_{V_{2n+1}}(2n) = \{2i\colon\ i \in \{0, \ldots, n - 1\}\}$.

Proposition 1.1. *(J.H. Schmerl, W.T. Trotter [7].) À un isomorphisme près, les tournois critiques sont les tournois T_{2n+1}, U_{2n+1} et V_{2n+1}, où $n \geqslant 2$.*

Dans cette Note, nous caractérisons les tournois (-1)-critiques, répondant ainsi, dans le cas des tournois, à une question posée par Y. Boudabbous et P. Ille [2]. Dans la morphologie de ces tournois apparaissent les tournois critiques U_{2n+1} et V_{2n+1} mais pas les tournois T_{2n+1}.

1.3. Graphe d'indécomposabilité

Rappelons d'abord qu'un graphe (*simple* ou *symetrique*) est un graphe orienté G tel que pour tous $x \neq y \in S(G)$, on a : $(x, y) \in A(G)$ si et seulement si $(y, x) \in A(G)$. On considère alors que, dans un tel graphe G, $A(G)$ est un ensemble de paires de sommets distincts de $S(G)$, appelées *arêtes* de G. Par exemple, un *chemin* est un graphe isomorphe au graphe P_n défini sur $\{0, \ldots, n - 1\}$ de la façon suivante. Pour tous $i, j \in \{0, \ldots, n - 1\}$, $\{i, j\}$ est une arête de P_n si $|i - j| = 1$. Pour tout sommet $x \in S(G)$, on pose $V_G(x) = \{y \in S(G)\colon\ \{x, y\} \in A(G)\}$. Une partie non vide X de $S(G)$ est une *composante connexe* de G si pour tous $x \in X$ et $y \in S(G) - X$, $\{x, y\} \notin A(G)$ et si pour tous $x \neq y \in X$, il existe une suite $x_0 = x, \ldots, x_n = y$ de sommets de G telle que pour tout $i \in \{0, \ldots, n - 1\}$, $\{x_i, x_{i+1}\} \in A(G)$.

La notion de *graphe d'indécomposablité* a été introduite par P. Ille [1,5,6] de la façon suivante. À chaque tournoi $T=(S,A)$ est associé son graphe d'indécomposabilité $I(T)$ défini sur S comme suit. Pour tous $x\neq y\in S$, $\{x,y\}$ est une arête de $I(T)$ si $T-\{x,y\}$ est indécomposable. Ce graphe simple est un outil important dans notre construction des tournois (-1)-critiques.

Notons qu'un tournoi T et son dual $T^\star$ ont les mêmes intervalles. Il s'ensuit que T et $T^\star$ ont les mêmes sommets critiques ainsi que le même graphe d'indécomposabilité.

2. Les tournois (-1)-critiques

2.1. Résultats préliminaires

Rappelons, d'abord les propositions suivantes :

Proposition 2.1. *(Y. Boudabbous, P. Ille [2].) Soient $T=(S,A)$ un tournoi indécomposable et x un sommet critique de T. Alors $|V_{I(T)}(x)|\leqslant 2$ et on a :*

- *Si $V_{I(T)}(x)=\{y\}$, où $y\in S$, alors $T-\{x,y\}$ est un intervalle de $T-x$.*
- *Si $V_{I(T)}(x)=\{y,z\}$, où $y\neq z\in S$, alors $\{y,z\}$ est un intervalle de $T-x$.*

Proposition 2.2. *(Y. Boudabbous, P. Ille [2].) Le graphe d'indécomposabilité d'un tournoi (-1)-critique admet une unique composante connexe de cardinal $\geqslant 2$.*

Le lemme suivant précise le cardinal d'un tournoi (-1)-critique :

Lemme 2.3. *Le cardinal d'un tournoi (-1)-critique est impair et supérieur ou égal à 7.*

Le résultat suivant complète la Proposition 2.1 dans le cas des tournois (-1)-critiques :

Lemme 2.4. *Le sommet non critique a d'un tournoi (-1)-critique T est tel que $|V_{I(T)}(a)|=2$.*

En utilisant ce lemme, nous complétons la Proposition 2.2 comme suit :

Lemme 2.5. *Si T est un tournoi (-1)-critique, alors $I(T)(\mathcal{C})$ est un chemin, où $\mathcal{C}$ est l'unique composante connexe de $I(T)$ qui n'est pas réduite à un singleton.*

2.2. Caractérisation des tournois (-1)-critiques

Nous construisons pour tout entier $n\geqslant 3$ et pour tout entier $k\in\{1,\dots,n-2\}$, les tournois E^{2k+1}_{2n+1}, F^{2k+1}_{2n+1}, G^{2k+1}_{2n+1} et H^{2k+1}_{2n+1} définis sur $\{0,\dots,2n\}$ comme suit :

(i) $E^{2k+1}_{2n+1}(V^-_{E^{2k+1}_{2n+1}}(2k+1))=0<\cdots<2k$, $E^{2k+1}_{2n+1}(V^+_{E^{2k+1}_{2n+1}}(2k+1))=2k+2<\cdots<2n$ et pour tout $(x,y)\in V^+_{E^{2k+1}_{2n+1}}(2k+1)\times V^-_{E^{2k+1}_{2n+1}}(2k+1)$, $x\to y$ si et seulement si x et y sont pairs ;

(ii) $F^{2k+1}_{2n+1}(V^-_{F^{2k+1}_{2n+1}}(2k+1))=U_{2k+1}$, $F^{2k+1}_{2n+1}(V^+_{F^{2k+1}_{2n+1}}(2k+1))=2k+2<\cdots<2n$ et pour tout $(x,y)\in V^+_{F^{2k+1}_{2n+1}}(2k+1)\times V^-_{F^{2k+1}_{2n+1}}(2k+1)$, $x\to y$ si et seulement si x et y sont pairs ;

(iii) $G^{2k+1}_{2n+1}(V^-_{G^{2k+1}_{2n+1}}(2k+1))=U_{2k+1}$, $G^{2k+1}_{2n+1}(V^+_{G^{2k+1}_{2n+1}}(2k+1))\simeq V_{2n-2k-1}$ avec $2k+2<\cdots<2n-1$ et pour tout $(x,y)\in V^+_{G^{2k+1}_{2n+1}}(2k+1)\times V^-_{G^{2k+1}_{2n+1}}(2k+1)$, $x\to y$ si et seulement si $x=2n$ et y est pair ;

(iv) $H_{2n+1}^{2k+1}(V^-_{H_{2n+1}^{2k+1}}(2k+1)) = V_{2k+1}$, $H_{2n+1}^{2k+1}(V^+_{H_{2n+1}^{2k+1}}(2k+1)) \simeq V_{2n-2k-1}$ avec $2k+2 < \cdots < 2n-1$ et pour tout $(x,y) \in V^+_{H_{2n+1}^{2k+1}}(2k+1) \times V^-_{H_{2n+1}^{2k+1}}(2k+1)$, $x \to y$ si et seulement si $x = 2n$ et $y = 2k$.

Observons que dans les tournois $T = E_{2n+1}^{2k+1}$, F_{2n+1}^{2k+1}, G_{2n+1}^{2k+1} ou H_{2n+1}^{2k+1} définis ci-dessus, chacun des sous-tournois $T(V_T^-(2k+1))$ et $T(V_T^+(2k+1))$ est ou bien une chaîne, ou bien un tournoi critique non isomorphe à un tournoi de la classe $\{T_{2p+1}\}_{p\geqslant 2}$. Les cardinaux respectifs de ces sous-tournois sont $2k+1$ et $2n-2k-1$.

Remarque 1. Étant donné un entier $n \geqslant 3$, pour tour entier $1 \leqslant k \leqslant n-2$, $(E_{2n+1}^{2k+1})^\star \simeq E_{2n+1}^{2(n-k-1)+1}$ et $(H_{2n+1}^{2k+1})^\star \simeq H_{2n+1}^{2(n-k-1)+1}$.

En utilisant, en outre, les résultats du paragraphe 2.1, nous sommes en mesure de construire les tournois (-1)-critiques à partir des différents graphes d'indécomposabilité possibles pour de tels tournois :

Théorème 2.6. *À un isomorphisme près, les tournois (-1)-critiques sont les tournois E_{2n+1}^{2k+1}, F_{2n+1}^{2k+1}, $(F_{2n+1}^{2k+1})^\star$, G_{2n+1}^{2k+1}, $(G_{2n+1}^{2k+1})^\star$ et H_{2n+1}^{2k+1}, où $n \geqslant 3$ et $1 \leqslant k \leqslant n-2$. De plus, le sommet $2k+1$ est l'unique sommet non critique de chacun de ces tournois.*

Remarque 2. Le graphe d'indécomposabilité d'un tournoi (-1)-critique admet au plus deux composantes connexes réduites à des singletons. Plus précisément, pour $n \geqslant 3$ et pour $1 \leqslant k \leqslant n-2$, on a :

- $I(E_{2n+1}^{2k+1}) = I(F_{2n+1}^{2k+1}) = P_{2n+1}$.
- $I(G_{2n+1}^{2k+1})$ est obtenu à partir de P_{2n+1} en supprimant l'arête $\{2n-1, 2n\}$.
- $I(H_{2n+1}^{2k+1})$ est obtenu à partir de P_{2n+1} en supprimant les arêtes $\{2n-1, 2n\}$, $\{2k-1, 2k\}$, $\{2k, 2k+1\}$, et en ajoutant la paire $\{2k-1, 2k+1\}$ comme nouvelle arête.

Notons que d'après le Lemme 2.4, si a est le sommet non critique d'un tournoi (-1)-critique T, alors $T - a$ est un tournoi (-2)-critique. Cela nous amène au problème suivant :

Problème 2.7. Caractériser les tournois (-2)-critiques.

Références

[1] I. Boudabbous, P. Ille, Critical and infinite directed graphs, Discrete Math. 307 (2007) 2415–2428.
[2] Y. Boudabbous, P. Ille, Indecomposability graph and critical vertices of an indecomposable graph, soumis à Discrete Math.
[3] A. Ehrenfeucht, G. Rozenberg, Primitivity is hereditary for 2-structures, Theoret. Comput. Sci. 3 (70) (1990) 343–358.
[4] R. Fraïssé, L'intervalle en théorie des relations, ses généralisations, filtre intervallaire et clôture d'une relation, in : M. Pouzet, D. Richard (Eds.), Orders, Description and Roles, North-Holland, 1984, pp. 313–342.
[5] P. Ille, Indecomposable graphs, Discrete Math. 173 (1997) 71–78.
[6] P. Ille, Recognition problem in reconstruction for decomposable relations, in: B. Sands, N. Sauer, R. Woodrow (Eds.), Finite and Infinite Combinatorics in Sets and Logic, Kluwer Academic Publishers, 1993, pp. 189–198.
[7] J.H. Schmerl, W.T. Trotter, Critically indecomposable partially ordered sets, graphs, tournaments and other binary relational structures, Discrete Math. 113 (1993) 191–205.