Available online at www.sciencedirect.com
ScienceDirect
ELSEVIER
C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 343 (2006) 619–625
COMPTES RENDUS MATHEMATIQUE
http://france.elsevier.com/direct/CRASS1/

Théorie des jeux/Économie mathématique

Jeux à champ moyen. I – Le cas stationnaire

Jean-Michel Lasry [a], Pierre-Louis Lions [b,c]

[a] *Institut de Finance, Université Paris-Dauphine, place du Maréchal de Lattre de Tassigny, 75775 Paris cedex 16, France*
[b] *Collège de France, 3, rue d'Ulm, 75005 Paris, France*
[c] *Ceremade UMR CNRS 7534, Université Paris-Dauphine, place du Maréchal de Lattre de Tassigny, 75775 Paris cedex 16, France*

Reçu le 6 juin 2006 ; accepté le 4 juillet 2006

Disponible sur Internet le 1er novembre 2006

Présenté par Pierre-Louis Lions

Résumé

Nous introduisons ici une approche générale pour modéliser des jeux avec un très grand nombre de joueurs. Plus précisément, nous considérons des équilibres de Nash à N joueurs pour des problèmes stochastiques en temps long et déduisons rigoureusement les équations de type « champ moyen » quand N tend vers l'infini. Nous prouvons également des résultats généraux d'unicité et établissons la limite déterministe. ***Pour citer cet article : J.-M. Lasry, P.-L. Lions, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 343 (2006).***

Abstract

Mean field games. I – The stationary case. We introduce here a general approach to model games with a large number of players. More precisely, we consider N players Nash equilibria for long term stochastic problems and establish rigorously the 'mean field' type equations as N goes to infinity. We also prove general uniqueness results and determine the deterministic limit. ***To cite this article: J.-M. Lasry, P.-L. Lions, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 343 (2006).***

Abridged English version

We explain in the French version below the economical and game theory motivations of this work. And we introduce a general class of games with N players and stochastic dynamics with long-term criteria (ergodic problems). After giving an example of existence results for Nash equilibria, we derive rigorously the limit as the number N of players goes to infinity. In this manner, we obtain the following system of mean field type: $\lambda \in \mathbb{R}$, $v \in C^2$, $m \in W^{1,p}$ $(\forall p < +\infty)$

$$\begin{cases} -\nu\Delta v + H(x, \nabla v) + \lambda = \mathcal{V}[m] \quad \text{in } \mathcal{Q}, \quad \displaystyle\int_{\mathcal{Q}} v \, \mathrm{d}x = 0, \\ -\nu\Delta m - \operatorname{div}\left(\dfrac{\partial H}{\partial p}(x, \nabla v) m\right) = 0 \quad \text{in } \mathcal{Q}, \quad m > 0 \quad \text{in } \mathcal{Q}, \quad \displaystyle\int_{\mathcal{Q}} m \, \mathrm{d}x = 1 \end{cases}$$

Adresses e-mail : lasry@dauphine.fr (J.-M. Lasry), lions@ceremade.dauphine.fr (P.-L. Lions).

1631-073X/$ – see front matter
doi:10.1016/j.crma.2006.09.019

where all the functions considered are periodic on $\mathcal{Q} = [0,1]^d$, $d \geqslant 1$, $\nu > 0$, $H(x,p)$ is a convex (in p) Hamiltonian and $\mathcal{V}$ is an operator satisfying some conditions detailed in the French version below. We indicate various extensions and variants. And we observe that in the case when $H(x,p) = \frac{1}{2}|p|^2$ the above system reduces to the classical Hartree equation of Quantum Mechanics.

While the existence of a solution of the above system may be deduced from the limit as N goes to $+\infty$ (it may be also obtained directly), we prove that if $\mathcal{V}$ is a 'strictly monotone' operator then solutions are unique.

Finally, we deduce explicit solutions 'in the deterministic case' by letting ν go to 0.

Pour Romain

1. Introduction

1.1. Théorie des jeux et économie

Nous introduisons ici un cadre conceptuel pour modéliser mathématiquement une classe de jeux avec un nombre infini (continuum) de joueurs. La question de la limite en théorie des jeux quand le nombre N de joueurs tend vers l'infini est en fait étroitement liée à la modélisation de l'équilibre économique avec anticipations rationnelles. On suppose en effet dans ce cadre que chaque agent économique non seulement est « infiniment » rationnel et prête à ses semblables ces mêmes qualités, mais aussi n'influe de par sa propre stratégie que de manière négligeable sur l'équilibre. Un apport essentiel à cette question est dû à R. Aumann [1]. Depuis lors, de nombreux travaux ont repris cette problématique jusqu'à un résultat récent de G. Carmona (voir [4] et sa bibliographie).

Nous proposons ici une approche différente dans le cadre classique du contrôle stochastique et nous renvoyons le lecteur à un autre exemple de cette approche générale concernant la formation de la volatilité dans les marchés financiers (J.-M. Lasry et P.-L. Lions [5]). Le cadre mathématique précis introduit dans cette Note est détaillé ci-dessous. Indiquons simplement pour l'instant que chaque joueur maximise l'espérance d'un critère par le choix d'une stratégie portant sur les paramètres d'une dynamique stochastique et que ce critère dépend d'une part des paramètres individuels habituels en contrôle stochastique et d'autre part de la densité de répartition des autres joueurs. La cohérence de cet équilibre, que nous appelons « équilibre de champ moyen », au sens des anticipations rationnelles se traduit par le fait que la dynamique de la population de joueurs dépend des stratégies optimales individuelles. Notons que le caractère naturellement stochastique de cet équilibre dynamique évite le recours aux approximations proposées dans le cadre statique abstrait des travaux cités ci-dessus.

Il convient également d'insister sur le fait que nous justifions rigoureusement ces équilibres de champ moyen en faisant tendre le nombre de joueurs N vers l'infini à partir d'équilibres de Nash et observons une simplification importante de la complexité de ces équilibres grâce à cette limite.

Le nom proposé de jeux à champ moyen est une référence explicite à la Physique Statistique et à l'étude des systèmes composés d'un grand nombre de particules (où la dynamique de chaque particule est déterminée par un champ moyen créé par la population de particules) et nous verrons plus loin qu'il ne s'agit pas d'une simple analogie. On pourrait également parler d'une approche « micro-macro » de l'équilibre où chaque joueur (« microscopique ») se comporte rationnellement en fonction de ses préférences et de données globales (« macroscopiques »).

Du point de vue mathématique, ces équilibres de champ moyen correspondent à des systèmes bien posés d'équations aux dérivées partielles d'un type nouveau couplant des équations de type Hamilton–Jacobi–Bellman et des équations de type Kolmogorov. Nous verrons qu'un cas particulier de ces systèmes se révèle être l'équation de Hartree en Mécanique Quantique, qu'il est possible d'en donner une interprétation de type contrôle optimal d'équations aux dérivées partielles et d'introduire un principe de dualité. Et nous indiquerons qu'il est possible de justifier ces équilibres à partir d'équilibres de Nash à N joueurs quand N tend vers l'infini, et que la limite déterministe peut être décrite explicitement.

1.2. Le cadre mathématique

Nous introduisons ici le cadre mathématique le plus élémentaire possible et nous mentionnerons plus loin diverses variantes ou extensions. Nous considérons N joueurs ($N \geqslant 1$) dont la dynamique est donnée par

$$\mathrm{d}X_t^i = \sigma^i \,\mathrm{d}W_t^i - \alpha^i \,\mathrm{d}t, \quad X_0^i = x^i \in \mathbb{R}^d, \quad 1 \leqslant i \leqslant N, \tag{1}$$

où $d \geqslant 1$, $\sigma^i > 0$ pour tout i (par exemple), $(W_t^1, \ldots, W_t^N)$ sont N Browniens indépendants et α^i représente la stratégie (ou le contrôle) du joueur i supposée être un processus borné pour $t \geqslant 0$ et adapté à W^i. Il convient de noter que cette dernière hypothèse est naturelle dans le cadre d'un grand nombre de joueurs mais qu'il serait intéressant de l'affaiblir.

Pour simplifier la présentation, nous étudions tout d'abord le cas stationnaire ergodique en supposant que $X_t^i \in T^d$ (identifié à $Q = [0,1]^d$ avec périodicité) et que toutes les fonctions données ci-dessous sont périodiques en x^i $(\forall i)$ de période 1 (par exemple) dans chacune des coordonnées de x^i. Dans ce cas, nous introduisons, un coût supposé être de la forme (pour simplifier ...)

$$J^i(\alpha^1, \ldots, \alpha^N) = \liminf_{T \to +\infty} \frac{1}{T} E\left[\int_0^T L^i(X_t^i, \alpha_t^i) + F^i(X_t^1, \ldots, X_t^N)\,\mathrm{d}t\right] \tag{2}$$

où pour tout i, F^i est Lipschitz bornée sur Q^N, L^i est Lipschitz en $x^i \in Q$ uniformément en α^i borné et

$$\inf_{\alpha^i} L^i(x^i, \alpha^i)/|\alpha^i| \to +\infty \quad \text{si } |\alpha^i| \to +\infty. \tag{3}$$

Et nous rappelons la définition d'un point de Nash pour $(x^1, \ldots, x^N) \in Q^N$ fixé : $(\bar{\alpha}^1, \ldots, \bar{\alpha}^N)$ est un point de Nash si

$$J^i(\bar{\alpha}^1, \ldots, \bar{\alpha}^{i-1}, \alpha^i, \bar{\alpha}^{i+1}, \ldots, \bar{\alpha}^N) \geqslant J^i(\bar{\alpha}^1, \ldots, \bar{\alpha}^N) \quad \forall \alpha^i, \text{ pour tout } i. \tag{4}$$

Enfin, nous notons $H^i(x,p) = \sup_{\alpha \in \mathbb{R}^d}(p \cdot \alpha - L^i(x,\alpha))$ $(x \in Q,\ p \in \mathbb{R}^d)$ et $\nu^i = \frac{1}{2}(\sigma^i)^2$ $(\forall i)$. Et nous supposerons (pour simplifier) dans toute la suite que H^i est de classe C^1 en p $(\forall i, x)$.

2. Équilibres de Nash

L'existence de points (ou d'équilibres) de Nash peut être obtenue sous des conditions très générales sur les données. Nous renvoyons le lecteur à A. Bensoussan et J. Frehse [2,3] pour les liens généraux entre points de Nash et EDP. A titre d'exemple, nous donnons un résultat où l'on suppose que les Hamiltoniens H^i vérifient $(\forall i)$

$$\exists \Theta \in]0,1[, \quad \inf_x \left(\frac{\partial H^i}{\partial x} \cdot p + \frac{\Theta}{d\nu^i}(H^i)^2\right) > 0 \quad \text{pour } |p| \text{ grand}. \tag{5}$$

Théorème 2.1. *Sous les conditions précédentes*

(i) $\exists \lambda_1, \ldots, \lambda_N \in \mathbb{R}$, $\exists v_1, \ldots, v_N \in C^2(Q)$, $\exists m_1, \ldots, m_N \in W^{1,p}(Q)$ $(\forall p < \infty)$ *vérifiant* $\int_Q v_i\,\mathrm{d}x = 0$, $\int_Q m_i\,\mathrm{d}x = 1$, $m_i > 0$ *sur* Q *et les équations suivantes sur* Q

$$-\nu^i \Delta v_i + H^i(x, \nabla v_i) + \lambda_i = \int_{Q^{N-1}} F^i(x^1, \ldots, x^{i-1}, x, x^{i+1}, \ldots, x^N) \prod_{j \neq i} m_j(x^j)\,\mathrm{d}x^j \tag{6}$$

$$-\nu^i \Delta m_i - \operatorname{div}\left(\frac{\partial H^i}{\partial p}(x, \nabla v_i) m_i\right) = 0. \tag{7}$$

(ii) *Pour toute solution du système précédent, le feedback* $\bar{\alpha}^i = \frac{\partial H^i}{\partial p}(x, \nabla v_i)$ *définit un point de Nash* $(\forall (x^1, \ldots, x^N) \in Q^N)$ *et* $\lambda_i = J^i(\bar{\alpha}^1, \ldots, \bar{\alpha}^N) = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} E[\int_0^T L^i(\bar{X}_t^i, \bar{\alpha}^i(\bar{X}_t^i)) + F^i(\bar{X}_t^1, \ldots, \bar{X}_t^N)]$ *où* $\bar{X}_t^i$ *est la solution de* (1) *correspondant à* $\bar{\alpha}^i$ $(\forall (x^1, \ldots, x^N) \in Q^N)$.

Nous ne détaillons pas ici la démonstration de ce résultat. Indiquons simplement que l'existence se déduit d'estimations a priori sur λ_i $(|\lambda_i| \leqslant \sup|F^i| + \sup|H^i(x,0)|)$ et surtout sur ∇v_i grâce à la méthode de Bernstein. Le point

(ii) se démontre par simple vérification à l'aide de la formule de Itô et en observant que l'ergodicité de $\bar{X}_t^j$ (où $\bar{X}^j$ correspond au feedback $\bar{\alpha}^j$ dans (1)) assure que pour tout x^i

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\Bigg\{E\Bigg[\int_0^T F^i\big(\bar{X}_t^1,\dots,\bar{X}_t^{i+1},X_t^i,\bar{X}_t^{i+1},\dots,\bar{X}_t^N\big)\,\mathrm{d}t\Bigg] - E\Bigg[\int_0^T \mathrm{d}t\int_{Q^{N-1}} F^i\big(x^1,\dots,x^{i-1},X_t^i,x^{i+1},\dots,x^N\big)\prod_{j\neq i} m_j\big(x^j\big)\,\mathrm{d}x^j\Bigg]\Bigg\}=0.$$

Remarques. (i) On peut traiter de façon analogue (sous les hypothèses convenables sur les données ...) le cas plus complexe où le coût $L^i(X_t^i,\alpha_t^i)+F^i(X_t^1,\dots,X_t^N)$ est remplacé par $L^i(X_t^1,\dots,X_t^N,\alpha_t^i)$ (ou même $L^i(X_t^1,\dots,X_t^N,\alpha_t^1,\dots,\alpha_t^N)$ en se restreignant à des stratégies de type feedback ...) auquel cas, dans les équations (6) et (7), $H^i-\int_{Q^{N-1}}F^i\bigotimes_{j\neq i}\mathrm{d}m_j$ est remplacé par

$$H^i=\sup_{\alpha\in\mathbb{R}^d}\bigg(p\cdot\alpha-\int_{Q^{N-1}}L^i\big(x^1,\dots,x^{i-1},x,x^{i+1},\dots,x^N,\alpha\big)\prod_{j\neq i}m_j\big(x^j\big)\,\mathrm{d}x^j\bigg).$$

(ii) L'hypothèse (5) est inutile si $d=1$, en effet on déduit une borne sur $\frac{\mathrm{d}v_i}{\mathrm{d}x}$ du fait que $\frac{\mathrm{d}^2v_i}{\mathrm{d}x^2}$ est minorée et de moyenne nulle.

(iii) Dans le cas très particulier où $L^i(x,\alpha)=\mu^i\frac{|\alpha|^2}{2}$ avec $\mu^i>0$ $(\forall i)$, on peut vérifier (en posant $\varphi_i=\mathrm{e}^{-v_i/2(\nu^i\mu^i)}(\int_Q\mathrm{e}^{-v_i/(\nu^i\mu^i)}\,\mathrm{d}x)^{-1/2}$) que $m_i=\varphi_i^2$, $\int_Q\varphi_i^2\,\mathrm{d}x=1$ et (6) se réduit à

$$-\big(2\big(\nu_i^2\big)\mu_i\big)\Delta\varphi_i+\bigg(\int_{Q^{N-1}}F^i\big(x^1,\dots,x^{i-1},x,x^{i+1},\dots,x^N\big)\prod_{j\neq i}\varphi_j^2(x_j)\,\mathrm{d}x^j\bigg)\varphi_i=\lambda_i\varphi_i. \tag{8}$$

En particulier, si $\nu_i=\frac{1}{2}$, $\mu_i=1$ et si $F^i=\frac{1}{2}\sum_{i\neq j}V(x_i-x_j)+V_0(x_i)$, (8) devient l'équation (ou le système) de Hartree en Mécanique Quantique

$$-\frac{1}{2}\Delta\varphi_i+\frac{1}{2}\sum_{i\neq j}\big(V*\varphi_j^2\big)\varphi_i+V_0\varphi_i=\lambda_i\varphi_i,\quad \varphi_i>0. \tag{9}$$

Et il est bien connu que l'unicité des solutions de ce système n'est en général pas vraie.

(iv) L'exemple précédent montre que, même dans un cas totalement symétrique (joueurs indistinguables), il n'y a pas unicité des équilibres de Nash i.e. des solutions de (6), (7).

(v) Des résultats similaires au Théorème 2.1 peuvent être obtenus par la même méthode de démonstration dans d'autres situations ergodiques comme, par exemple, les problèmes avec condition de Neumann ou de dérivée oblique, les problèmes avec contraintes d'état ou les problèmes dans $\mathbb{R}^d$ (avec des conditions sur les données assurant l'ergodicité ou des coûts spatiaux tendant vers l'infini à l'infini). On peut également remplacer « $\mathrm{d}W_t$ » dans (1) par « $\sigma^i(X_t^i)\,\mathrm{d}W_t^i$ » (ou même « $\sigma^i(X_t^i,\alpha_t^i)\,\mathrm{d}W_t^i$ ») et « $-\alpha_t^i\,\mathrm{d}t$ » par « $b(X_t^i,\alpha_t^i)\,\mathrm{d}t$ » à condition toutefois (pour éliminer des difficultés techniques) de supposer que σ^i est non dégénérée (σ^i peut être une matrice auquel cas W_t^i est vectoriel ...).

(vi) Pour des données régulières, les solutions sont bien sûr régulières.

La démonstration du Théorème 2.1 permet également de démontrer le résultat suivant

Théorème 2.2. *Si $\nu^i=\nu$, $H^i=H$ $(\forall i)$ et $F^i(x^1,\dots,x^N)=F^j(x^1,\dots,x^{i-1},x^j,x^{i+1},\dots,x^{j-1},x^i,x^{j+1},\dots,x^N)$ $(\forall i<j)$, alors il existe une solution du système* (6), (7) *vérifiant $\lambda_1=\dots=\lambda_N$, $v_1=\dots=v_N$, $m_1=\dots=m_N$.*

Remarque. Même les équilibres de Nash symétriques (au sens du Théorème 2.2) ne sont en général pas uniques. Il suffit pour s'en convaincre de considérer à nouveau le cas particulier introduit dans la Remarque (ii) ci-dessus en prenant $F^i = \frac{1}{2}\sum_{i\neq j} V(x^i - x^j) + V_0(x^i)$ (avec V paire) de sorte que (9) se réduit dans le cas symétrique $v_1 = \cdots = v_N$ à l'équation de Hartree

$$-\frac{1}{2}\Delta\varphi + \frac{N-1}{2}\big(V * \varphi^2\big)\varphi + V_0\varphi = \lambda\varphi, \qquad \int \varphi^2 = 1,\ \varphi > 0, \tag{10}$$

qui ne possède en général pas de solution unique.

Pour simplifier, nous appellerons dans toute la suite équilibre de Nash toute solution $(\lambda_1, \ldots, \lambda_N), (v_1, \ldots, v_N), (m_1, \ldots, m_N)$ du système formulé dans le Théorème 2.1.

3. La limite $N \to +\infty$

Nous considérons maintenant la limite des équilibres de Nash quand N tend vers $+\infty$ en supposant les joueurs indistinguables et donc en particulier que $\nu^i = \nu$, $H^i = H$ $(\forall i)$. De plus, nous supposons que le critère F^i ne dépend que de x^i et de la densité empirique des autres joueurs à savoir $\frac{1}{N-1}\sum_{j\neq i}\delta_{x^j}$ (on pourrait aussi bien utiliser $\frac{1}{N}\sum_j \delta_{x^j}\ldots$) à travers un opérateur $\mathcal{V}$ défini sur l'ensemble des mesures de probabilité $\mathcal{P}$ sur Q à valeurs dans un ensemble borné de l'espace des fonctions Lipschitz sur Q i.e. $F^i(x^1, \ldots, x^N) = \mathcal{V}[\frac{1}{N-1}\sum_{j\neq i}\delta_{x^j}](x^i)$. Un exemple d'un tel opérateur est fourni par $\mathcal{V}[m](x) = F(V * m(x), x)$ où V est une fonction Lipschitz sur $\mathbb{R}^d$, $V * m(x) = \int_Q V(x-y)\,\mathrm{d}m(y)$ et F est localement Lipschitz sur $\mathbb{R} \times Q$. Et notre démonstration utilise l'hypothèse de continuité suivante sur l'opérateur $\mathcal{V}$

$$\mathcal{V}[m_n] \text{ converge uniformément sur } Q \text{ vers } \mathcal{V}[m] \text{ si } m_n \text{ converge faiblement vers } m \text{ dans } \mathcal{P}. \tag{11}$$

Bien sûr, cette hypothèse est vérifiée dans l'exemple ci-dessus.

Théorème 3.1. *Sous les conditions précédentes, tout équilibre de Nash* $(\lambda_1^N, \ldots, \lambda_N^N), (v_1^N, \ldots, v_N^N), (m_1^N, \ldots, m_N^N)$ *vérifie les propriétés suivantes*

(i) $(\lambda_i^N)_{i,N}$ *est borné dans* $\mathbb{R}$, $(v_i^N)_{i,N}$ *est relativement compact dans* C^2, $(m_i^N)_{i,N}$ *est relativement compact dans* $W^{1,p}$ $(\forall p < \infty)$;
(ii) $\sup_{i,j}(|\lambda_i^N - \lambda_j^N| + \|v_i^n - v_j^n\|_\infty + \|m_i^N - m_j^N\|_\infty) \to 0$ *si* $N \to +\infty$;
(iii) *Toute sous-suite* $(\lambda_1^{N'}, v_1^{N'}, m_1^{N'})_{N'}$ *convergente dans* $\mathbb{R} \times C^2 \times W^{1,p}$ $(\forall p < \infty)$ *converge vers* (λ, v, m) *vérifiant*

$$-\nu\Delta v + H(x, \nabla v) + \lambda = \mathcal{V}[m], \qquad \int_Q v = 0, \tag{12}$$

$$-\nu\Delta m - \operatorname{div}\left(\frac{\partial H}{\partial p}(x, \nabla v)m\right) = 0, \quad m > 0, \ \int_Q m = 1. \tag{13}$$

Remarques. (i) Les extensions et variantes mentionnées dans les Remarques (i) et (v) suivant le Théorème 2.1 sont bien sûr adaptables à la limite ci-dessus. De plus, il est possible de considérer des données (aussi bien dans la dynamique que dans les coûts) qui dépendent de $\frac{1}{N-1}\sum_{j\neq i}\delta_{x^j}$ ou de $\frac{1}{N-1}\sum_{j\neq i}\delta_{\alpha^j}$. On aboutit alors à des systèmes du type (12), (13) beaucoup plus couplés et non linéaires (contenant par exemple des termes semblables à ceux présents dans les équations de type Vlasov pour les modèles cinétiques). Enfin, par passage à la limite on peut considérer des opérateurs $\mathcal{V}[m]$ arbitraires par simple approximation de l'opérateur $\mathcal{V}[m]$ (approcher $\mathcal{V}[m]$ par $\mathcal{V}[m * \rho_\varepsilon]$ où ρ_ε est un noyau régularisant …) de sorte que les modèles (12), (13) contiennent comme cas « particuliers » (i.e. après passage de limite) des systèmes où $V[m](x) = F(m(x), x)$ (ou même des fonctions de m et de ses dérivées …), F étant une fonction arbitraire sur $\mathbb{R} \times Q$ … .

(ii) Il est également possible de considérer plusieurs groupes de joueurs et de donner une interprétation du système (12), (13) en terme de contrôle optimal d'équations aux dérivées partielles (qui permet d'ailleurs de faire un lien avec l'optimalité au sens de Pareto).

(iii) Toujours dans le cas particulier où $H(x,\nabla v)=\frac{1}{2}|\nabla v|^2-F_0(x)$, le système (12), (13) se réduit à l'équation de Hartree (généralisée)

$$-\Delta\varphi+\big(F_0+\mathcal{V}[\varphi^2]\big)\varphi=\lambda\varphi,\quad \varphi>0,\ \int_Q\varphi^2=1. \tag{14}$$

(iv) Il n'y a en général pas d'unicité des solutions du système (12), (13) (l'exemple (14) avec $F_0=0$, $\mathcal{V}[\varphi^2]=-c\varphi$ pour $c>0$ convenable permet de s'en convaincre). En revanche, comme nous le verrons dans la section suivante, il existe des situations générales où les solutions sont uniques (alors même qu'elles ne le sont pas au niveau d'un nombre fini de joueurs, phénomène illustrant la « simplification » se produisant quand N tend vers l'infini déjà présente dans le fait que les équilibres deviennent tous asymptotiquement « symétriques » ...).

La démonstration du Théorème 3.1 est trop longue pour être détaillée ici. Indiquons simplement quelques étapes cruciales de la démonstration des points (ii) et (iii). On montre tout d'abord que $\sup_i(|\lambda_i^N-\lambda^N|+\|v_i^N-v^N\|_\infty+\|m_i^N-m^N\|_\infty)$ tend vers 0 quand N tend vers l'infini où $(\lambda^N,v^N,m^N)\in\mathbb{R}\times C^2\times W^{1,p}$ $(\forall p<\infty)$ résout

$$\begin{cases}-\nu\Delta v^N+H\big(x,\nabla v^N\big)+\lambda^N=\displaystyle\int_{Q^N}\mathcal{V}\Big[\frac{1}{N}\sum_j\delta_{xj}\Big](x)\prod_j m_j^N\big(x^j\big)\,\mathrm{d}x^j, & \displaystyle\int_Q v^N=0,\\ -\nu\Delta m^N-\operatorname{div}\Big(\dfrac{\partial H}{\partial p}\big(x,\nabla v^N\big)m^N\Big)=0,\quad m^N>0,\ \displaystyle\int_Q m^N=1.\end{cases}$$

On démontre en outre que

$$\Big\|\int_{Q^N}\mathcal{V}\Big[\frac{1}{N}\sum_j\delta_{xj}\Big](\cdot)\prod_j m_j^{N'}\big(x^j\big)\,\mathrm{d}x^j-\int_{Q^N}\mathcal{V}\Big[\frac{1}{N}\sum_j\delta_{x_j}\Big](\cdot)\prod_j m_j\big(x^j\big)\,\mathrm{d}x^j\Big\|_\infty\to 0$$

quand $N'\to+\infty$, si $\|m^{N'}-m\|_\infty\to 0$ quand $N'\to+\infty$. On peut alors appliquer la loi des grands nombres pour conclure que

$$\Big\|\int_{Q^N}\mathcal{V}\Big[\frac{1}{N}\sum_j\delta_{x_j}\Big](\cdot)\prod_j m_j\big(x^j\big)\,\mathrm{d}x^j-\mathcal{V}[m]\Big\|_\infty\to 0\quad\text{si } N'\to+\infty.$$

4. Monotonie et unicité

Théorème 4.1. *Si $\mathcal{V}$ est strictement monotone* (*dans L^2*) *i.e. si $\mathcal{V}$ vérifie*

$$\int_Q\big(\mathcal{V}[m_1]-\mathcal{V}[m_2]\big)(m_1-m_2)\,\mathrm{d}x\leqslant 0\Rightarrow\mathcal{V}[m_1]\equiv\mathcal{V}[m_2], \tag{15}$$

alors il y a unicité des solutions de (12), (13).

Démonstration. Soient (λ_1,v_1,m_1), (λ_2,v_2,m_2) deux solutions de (12), (13). On multiplie (12) par (v_1-v_2) et (13) par (m_1-m_2) et on trouve en intégrant sur Q et en soustrayant les deux identités obtenues

$$\int_Q\big(\mathcal{V}[m_1]-\mathcal{V}[m_2]\big)(m_1-m_2)+\int_Q m_1\Big(H(x,\nabla v_2)-H(x,\nabla v_1)-\frac{\partial H}{\partial p}(x,\nabla v_1)\cdot\nabla(v_2-v_1)\Big)$$
$$+\int_Q m_2\Big(H(x,\nabla v_1)-H(x,\nabla v_2)-\frac{\partial H}{\partial p}(x,\nabla v_2)\cdot\nabla(v_1-v_2)\Big)=0.$$

Et on conclut aisément grâce à la convexité de H en p et à (15). □

5. La limite déterministe

On considère maintenant la limite déterministe i.e. quand ν tend vers 0. Pour simplifier, nous supposons que, par exemple, $\mathcal{V}[m](x) = F(m(x)) + f_0(x)$ où f_0 est Lipschitz, F est Lipschitz sur $\mathbb{R}$, $\inf\operatorname{ess}_{\mathbb{R}} F' > 0$ et que H vérifie : $H(x,p) \geqslant H(x,0) = 0, \forall p \in \mathbb{R}^d, \forall x \in Q$.

Alors, d'après les résultats précédents, il existe une unique solution $(\lambda_\nu, v_\nu, m_\nu)$ de (12), (13).

Théorème 5.1. *Quant ν tend vers 0, (λ_ν, m_ν) converge dans $\mathbb{R} \times L^2$ vers (λ, m) caractérisés par*

$$m(x) = \left[F^{-1}\left(\lambda - f_0(x)\right)\right]_+ \quad \text{sur } Q, \qquad \int_Q m \,\mathrm{d}x = 1. \tag{16}$$

Remarque. En rappelant qu'un opérateur local $F(m)$ s'obtient par limite, quand ε tend vers 0, de $F(m * \rho_\varepsilon)$ (où ρ_ε est un noyau régularisant), on voit que la solution déterminée dans le Théorème 5.1 correspond aux limites successives $N \to +\infty$, $\varepsilon \to 0$, $\nu \to 0$. En général, ces limites ne commutent pas. En effet, en prenant par exemple $H^i(x,p) = \frac{1}{2}|p|^2$, $\nu^i = \nu$, on vérifie tout d'abord que lorsque ν tend vers 0, tout point de Nash $(\bar{x}^1, \ldots, \bar{x}^N)$ de $(F^1, \ldots, F^N)$ conduit à un équilibre de Nash de la forme $m_i = \delta_{\bar{x}_i}$, $\lambda_i \equiv \inf_{x \in Q} F^i(\bar{x}^1, \ldots, \bar{x}^{i-1}, x, \bar{x}^{i+1}, \ldots, \bar{x}^N)$, et v_i résout dans Q (au sens des solutions de viscosité)

$$\frac{1}{2}|\nabla v_i|^2 = F^i\left(\bar{x}^1, \ldots, \bar{x}^{i-1}, x, \bar{x}^{i+1}, \ldots, x^{-N}\right) - \lambda_i, \qquad \int_Q v_i \,\mathrm{d}x = 0.$$

Si $F^i(x^1, \ldots, x^N) = F(\frac{1}{N-1}\sum_{j \neq i} \rho_\varepsilon(x^i - x^j)) + f_0(x^i)$ avec $F(0) = 0$, $f_0 \geqslant 0$, $f_0 \not\equiv 0$, mes $\{f_0 = 0\} > 0$, $\rho_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon^d}\rho(\frac{\cdot}{\varepsilon})$, $\rho \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$, $\int_{\mathbb{R}^d} \rho \,\mathrm{d}x = 1$, $\operatorname{Supp} \rho \subset B_1$, alors, pour tout $N \geqslant 1$, on peut trouver, pour $\varepsilon > 0$ suffisamment petit, $\bar{x}^i \in \{f_0 = 0\}$ tels que $|\bar{x}^i - \bar{x}^j| > \varepsilon$ si $i \neq j$. Alors, $(\bar{x}^1, \ldots, \bar{x}^N)$ est clairement un point de Nash donnant $\lambda_i = 0$ $(\forall i)$. Non seulement, la valeur « limite » λ est nulle mais il n'y a pas de convergence des mesures m_i quand N tend vers l'infini. En d'autres termes, la limite $\nu \to 0$, puis $\varepsilon \to 0$, puis $N \to \infty$ donne $\lambda = 0$ tandis que λ défini par (16) est dans ce cas clairement strictement positif !

Signalons pour conclure que les démonstrations complètes des résultats précédents ainsi que diverses extensions et variantes seront détaillées dans une publication ultérieure.

Références

[1] R. Aumann, Markets with a continuum of trackers, Econometrica 32 (1964) 39–50.
[2] A. Bensoussan, J. Frehse, Nonlinear elliptic systems in stochastic game theory, J. Reine Angew. Math. 350 (1984) 23–67.
[3] A. Bensoussan, J. Frehse, Ergodic Bellman systems for stochastic games in arbitrary dimension, Proc. Roy. Soc. Edin. A 449 (1995) 65–77.
[4] G. Carmona, Nash equilibria of games with a continuum of players, Reprint, 2004.
[5] J.-M. Lasry, P.-L. Lions, Towards a self-consistent theory of volatility, J. Math. Pures Appl. (2006).