

Équations aux dérivées partielles

# Comportement semi-linéaire d'un système hyperbolique quasi-linéaire : le modèle de Kerr Debye

Gilles Carbou, Bernard Hanouzet

*Mathématiques appliquées de Bordeaux, UMR 5466, université Bordeaux 1, 351, cours de la Libération, 33405 Talence cedex, France*

Reçu le 12 avril 2006 ; accepté après révision le 1<sup>er</sup> juin 2006

Disponible sur Internet le 13 juillet 2006

Présenté par Jean-Michel Bony

---

## Résumé

Le modèle de Kerr Debye monodimensionnel est un système hyperbolique quasi-linéaire avec source. Dans le cas du problème de Cauchy ou du problème mixte, on montre qu'il n'engendre pas de choc : le gradient de la solution ne peut exploser sans que la solution n'explose elle-même. *Pour citer cet article : G. Carbou, B. Hanouzet, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 343 (2006).*

© 2006 Académie des sciences. Publié par Elsevier SAS. Tous droits réservés.

## Abstract

**Semilinear behaviour for a quasilinear hyperbolic system: the Kerr Debye model.** The monodimensional Kerr Debye model is a quasilinear hyperbolic system with source term. For the Cauchy problem and for the initial-boundary value problem, we prove that it does not exhibit shock waves: if the gradient of a solution blows up, the solution itself blows up. *To cite this article: G. Carbou, B. Hanouzet, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 343 (2006).*

© 2006 Académie des sciences. Publié par Elsevier SAS. Tous droits réservés.

---

## Abridged English version

The Kerr Debye model is used for modelling nonlinear optical propagation in a medium exhibiting a finite response time  $\tau$  (see [7]). In the Maxwell system, the electric displacement  $D$  is related to the electric field  $E$  by the relation  $D = (1 + \chi)E$  where  $\tau \partial_t \chi + \chi = |E|^2$ .

When  $\tau$  tends to 0 the limit model is the Kerr system in which  $D = (1 + |E|^2)E$  (see [4] for the Cauchy problem, [1] and [2] for the initial boundary value problem in dimension 1 or 3).

In this Note we study the behaviour for a fixed  $\tau$  ( $\tau = 1$ ) of the smooth solutions for the one-dimensional model, denoted by (KD):

$$\partial_t d + \partial_x h = 0, \quad \partial_t h + \partial_x e = 0, \quad \partial_t \chi + \chi = e^2,$$

$$\text{with } d = (1 + \chi)e.$$

---

Adresses e-mail : [carbou@math.u-bordeaux1.fr](mailto:carbou@math.u-bordeaux1.fr) (G. Carbou), [hanouzet@math.u-bordeaux1.fr](mailto:hanouzet@math.u-bordeaux1.fr) (B. Hanouzet).

This system is quasilinear strictly hyperbolic with eigenvalues

$$\lambda_1 = -(1 + \chi)^{-1/2} < \lambda_2 = 0 < \lambda_3 = (1 + \chi)^{-1/2}.$$

The energy density  $\mathcal{E}$  given by

$$\mathcal{E}(d, h, \chi) = \frac{1}{2}(1 + \chi)^{-1}d^2 + \frac{1}{2}h^2 + \frac{1}{4}\chi^2$$

is a strictly convex entropy in  $\{\chi \geq 0\}$ , so the system (KD) is symmetrizable.

Using general results about lifespan for quasilinear hyperbolic systems smooth solutions (see [6]), we can expect that these systems exhibit shock waves. It is true for the Kerr system. In this note we prove that the (KD) system has the semilinear type following property: if the gradient of a solution blows up, the solution itself blows up.

For the Cauchy problem we establish the following result:

**Theorem 0.1.** *Let  $(d_0, h_0, \chi_0) \in (H^2(\mathbb{R}))^3$  with  $\chi_0 \geq 0$ , let  $(d, h, \chi)$  be the smooth solution for (KD) with initial data  $(d_0, h_0, \chi_0)$  defined on  $[0, T^*[$ , where  $T^*$  is the lifespan of this solution. Then if  $T^* < +\infty$ , we have:*

$$\sup_{[0, T^*[} (\|d\|_{L^\infty(\mathbb{R})} + \|h\|_{L^\infty(\mathbb{R})} + \|\chi\|_{L^\infty(\mathbb{R})}) = +\infty.$$

For the initial-boundary value problem in  $\mathbb{R}_t^+ \times \mathbb{R}_x^+$  with the ingoing wave boundary condition, we prove the analogous following result:

**Theorem 0.2.** *Let  $a \geq 0$ , let  $g \in H^s(\mathbb{R})$  ( $s$  great enough,  $s \geq 4$ ), with  $\text{supp } g \subset [0, +\infty[$ . Let  $(d, h, \chi)$  be the regular solution of (KD) with null initial data satisfying the boundary condition:*

$$h(t, 0) + ae(t, 0) = g(t), \quad t \geq 0.$$

If the lifespan  $T^*$  is finite then

$$\sup_{[0, T^*[} (\|d\|_{L^\infty(\mathbb{R})} + \|h\|_{L^\infty(\mathbb{R})} + \|\chi\|_{L^\infty(\mathbb{R})}) = +\infty.$$

To prove Theorem 0.1 we use the extension results in A. Majda (Theorem 2.2 [6]). To prove Theorem 0.2 we use Theorem 4 in O. Guès [3] (so  $s$  is chosen great enough).

## 1. Introduction

Le modèle de Kerr Debye décrit la propagation optique dans un milieu non linéaire en prenant en compte un temps de retard  $\tau$  (cf. [7] par exemple). Dans les équations de Maxwell, le déplacement électrique  $D$  est relié au champ électrique  $E$  par la relation  $D = (1 + \chi)E$ , où

$$\tau \partial_t \chi + \chi = |E|^2.$$

Quand  $\tau$  tend vers zéro, on approche le modèle de Kerr dans lequel  $D = (1 + |E|^2)E$  (pour une étude de la convergence dans le cas des solutions régulières, voir [4] pour le problème de Cauchy, et [1] et [2] pour le problème mixte en dimension 1 et 3).

On étudie ici le comportement à  $\tau$  fixé ( $\tau = 1$ ) des solutions du modèle monodimensionnel noté (KD) (cf. [1]) :

$$\begin{aligned} \partial_t d + \partial_x h &= 0, & \partial_t h + \partial_x e &= 0, & \partial_t \chi + \chi &= e^2, \\ \text{avec } d &= (1 + \chi)e. \end{aligned} \tag{1}$$

Ce système est quasi-linéaire strictement hyperbolique avec les valeurs propres :

$$\lambda_1 = -(1 + \chi)^{-1/2} < \lambda_2 = 0 < \lambda_3 = (1 + \chi)^{-1/2}.$$

La densité d'énergie  $\mathcal{E}$  définie par

$$\mathcal{E}(d, h, \chi) = \frac{1}{2}(1 + \chi)^{-1}d^2 + \frac{1}{2}h^2 + \frac{1}{4}\chi^2$$

est une entropie strictement convexe dans  $\{\chi \geq 0\}$ , donc le système est symétrisable.

Les résultats généraux sur le temps de vie des solutions régulières des systèmes hyperboliques quasi-linéaires (cf. par exemple [6]) laissent à penser que de tels systèmes développent des chocs. C'est bien le cas pour le système de Kerr. Nous montrons ici qu'il n'en est pas de même pour le système de Kerr Debye qui a un comportement de type semi-linéaire : le gradient de la solution ne peut exploser sans que la solution n'explose elle-même. Ce type de comportement confirme les observations sur les expériences numériques en différences finies [7] ou en élément finis [5].

Dans le cas du problème de Cauchy, nous établissons le résultat suivant :

**Théorème 1.1.** *Soit  $(d_0, h_0, \chi_0) \in (H^2(\mathbb{R}))^3$  avec  $\chi_0 \geq 0$ , soit  $(d, h, \chi)$  la solution régulière de (1) avec donnée initiale  $(d_0, h_0, \chi_0)$ , définie sur l'intervalle maximal d'existence  $[0, T^*[$ . Alors, si  $T^* < +\infty$ , on a :*

$$\sup_{[0, T^*[} (\|d\|_{L^\infty(\mathbb{R})} + \|h\|_{L^\infty(\mathbb{R})} + \|\chi\|_{L^\infty(\mathbb{R})}) = +\infty.$$

Pour le problème mixte dans  $\mathbb{R}_t^+ \times \mathbb{R}_x^+$  avec condition d'onde rentrante au bord (cf. [1]), nous avons le résultat analogue suivant :

**Théorème 1.2.** *Soit  $a \geq 0$ , soit  $g \in H^s(\mathbb{R})$  ( $s$  assez grand,  $s \geq 4$ ) avec  $\text{supp } g \subset [0, +\infty[$ . Soit  $(d, h, \chi)$  la solution régulière de (1) avec donnée initiale nulle et condition au bord :*

$$h(t, 0) + ae(t, 0) = g(t), \quad t \geq 0.$$

Si le temps maximal d'existence  $T^*$  est fini, alors,

$$\sup_{[0, T^*[} (\|d\|_{L^\infty(\mathbb{R})} + \|h\|_{L^\infty(\mathbb{R})} + \|\chi\|_{L^\infty(\mathbb{R})}) = +\infty.$$

## 2. Preuve du Théorème 1.1

Comme  $(d_0, h_0, \chi_0) \in (H^2(\mathbb{R}))^3$ , le problème de Cauchy (1) admet une solution régulière locale  $u = (d, h, \chi)$  définie sur l'intervalle maximal  $[0, T^*[$  telle que

$$\partial_t^i u \in C^0([0, T^*]; H^{2-i}(\mathbb{R})), \quad i = 0, 1, 2.$$

Remarquons aussi que la condition  $\chi_0 \geq 0$  assure  $\chi \geq 0$  sur  $[0, T^*[\times\mathbb{R}$  et nous permet de définir  $(1 + \chi)^{-1}$ .

En utilisant le Théorème 2.2 de Majda [6], on sait que si  $T^* < +\infty$ , alors

$$\|u\|_{L^\infty([0, T^*[\times\mathbb{R})} + \|\partial_t u\|_{L^\infty([0, T^*[\times\mathbb{R})} + \|\partial_x u\|_{L^\infty([0, T^*[\times\mathbb{R})} = +\infty. \tag{2}$$

Nous allons montrer que si  $T^* < +\infty$  et s'il existe  $M$  tel que

$$\|u\|_{L^\infty([0, T^*[\times\mathbb{R})} \leq M, \tag{3}$$

alors

$$\|\partial_t u\|_{L^\infty([0, T^*[\times\mathbb{R})} + \|\partial_x u\|_{L^\infty([0, T^*[\times\mathbb{R})} < +\infty,$$

ce qui contredit (2) et prouve le Théorème 1.1.

Récrivons le système (1) en la variable  $v = (e, h, \chi)$  :

$$(1 + \chi)\partial_t e + \partial_x h = -e(e^2 - \chi), \tag{4}$$

$$\partial_t h + \partial_x e = 0, \tag{5}$$

$$\partial_t \chi = e^2 - \chi, \tag{6}$$

avec données initiales  $(e_0, d_0, \chi_0) \in H^2(\mathbb{R})$ ,  $\chi_0 \geq 0$ .

**Lemme 2.1.** *Sous l'hypothèse (3), il existe une constante  $C_1 > 0$  telle que*

$$\|v\|_{L^\infty([0, T^*]; L^2(\mathbb{R}))} \leq C_1. \tag{7}$$

**Preuve.** On fait le produit scalaire de (4), (5) avec  $(e, h)$  et on remplace  $\partial_t \chi$  grâce à (6). On obtient

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}} ((1 + \chi)e^2 + h^2) dx = -\frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} (e^2 - \chi)e^2 dx.$$

Donc, pour  $t < T^*$ ,

$$\frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} ((1 + \chi)e^2 + h^2)(t, x) dx \leq \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} ((1 + \chi_0)e_0^2 + h_0^2)(x) dx + CM^2 \int_0^t \int_{\mathbb{R}} e^2(s, x) dx ds.$$

En appliquant le lemme de Gronwall et en tenant compte de  $\chi \geq 0$ , on obtient qu’il existe  $C(T^*, M)$  telle que

$$\|(e, h)\|_{L^\infty([0, T^*]; L^2(\mathbb{R}))} \leq C(T^*, M). \tag{8}$$

Par (6), on a

$$\chi(t, x) = \exp(-t)\chi_0(x) + \int_0^t \exp(-t + s)e^2(s, x) ds, \tag{9}$$

ce qui termine la preuve du Lemme 2.1.  $\square$

**Lemme 2.2.** *Sous l’hypothèse (3), il existe une constante  $C_2$  telle que*

$$\|\partial_t v\|_{L^\infty([0, T^*]; L^2(\mathbb{R}))} + \|\partial_x v\|_{L^\infty([0, T^*]; L^2(\mathbb{R}))} \leq C_2. \tag{10}$$

**Preuve.** Par (3), (6) et (7), on sait que

$$\|\partial_t \chi\|_{L^\infty([0, T^*]; L^2(\mathbb{R}))} \leq C(T^*, M). \tag{11}$$

On dérive en temps le système (4), (5) :

$$(1 + \chi)\partial_t \partial_t e + \partial_x \partial_t h = -2(e^2 - \chi)\partial_t e - 2e^2 \partial_t e + e(e^2 - \chi), \tag{12}$$

$$\partial_t \partial_t h + \partial_x \partial_t e = 0, \tag{13}$$

avec

$$\partial_t e|_{t=0} = -(1 + \chi_0)^{-1}(e_0(e_0^2 - \chi_0) + \partial_x h_0) \quad \text{et} \quad \partial_t h|_{t=0} = -\partial_x e_0.$$

Comme précédemment, on obtient qu’il existe  $C(T^*, M)$  tel que

$$\|(\partial_t e, \partial_t h)\|_{L^\infty([0, T^*]; L^2(\mathbb{R}))} \leq C(T^*, M), \tag{14}$$

et par (4) et (5),

$$\|(\partial_x e, \partial_x h)\|_{L^\infty([0, T^*]; L^2(\mathbb{R}))} \leq C(T^*, M). \tag{15}$$

Dérivant (6) par rapport à  $x$ , on obtient

$$\partial_x \chi(t, x) = \exp(-t)\partial_x \chi_0(x) + 2 \int_0^t \exp(-t + s)e(s, x)\partial_x e(s, x) ds,$$

ce qui termine la preuve du Lemme 2.2.  $\square$

**Lemme 2.3.** *Sous l’hypothèse (3), il existe une constante  $C_3$  telle que*

$$\|\partial_{tt} v\|_{L^\infty([0, T^*]; L^2(\mathbb{R}))} + \|\partial_t \partial_x v\|_{L^\infty([0, T^*]; L^2(\mathbb{R}))} + \|\partial_{xx} v\|_{L^\infty([0, T^*]; L^2(\mathbb{R}))} \leq C_3. \tag{16}$$

**Preuve.** Par (3), (6) et (10), on sait que

$$\|\partial_{tt}\chi\|_{L^\infty([0, T^*]; L^2(\mathbb{R}))} + \|\partial_t \partial_x \chi\|_{L^\infty([0, T^*]; L^2(\mathbb{R}))} \leq C(T^*, M). \quad (17)$$

On dérive de nouveau en temps le système (4), (5) :

$$(1 + \chi)\partial_t \partial_{tt}e + \partial_x \partial_{tt}h = (-5e^2 + 3\chi)\partial_{tt}e + (5e^2 - 3\chi)\partial_t e - e(e^2 - \chi) - 8e(\partial_t e)^2, \quad (18)$$

$$\partial_t \partial_{tt}h + \partial_x \partial_{tt}e = 0, \quad (19)$$

avec les données initiales  $\partial_{tt}e|_{t=0}$  et  $\partial_{tt}h|_{t=0}$  issues de (12) et (13).

En utilisant (3), (7) et (10), on obtient alors :

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}} ((1 + \chi)(\partial_{tt}e)^2 + (\partial_{tt}h)^2)(t, x) \, dx \\ & \leq C \left( 1 + \int_0^t \|\partial_{tt}e(s, \cdot)\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 \, ds + \int_0^t \|\partial_t e(s, \cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \|\partial_{tt}e(s, \cdot)\|_{L^2(\mathbb{R})} \, ds \right). \end{aligned} \quad (20)$$

Par (13) on a, pour  $t < T^*$ ,

$$\|\partial_x \partial_t e\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq \|\partial_{tt}h\|_{L^2(\mathbb{R})},$$

et donc par (10), pour  $t < T^*$ ,

$$\|\partial_t e\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq C(1 + \|\partial_{tt}h\|_{L^2(\mathbb{R})}).$$

On reporte cette inégalité dans (20), et on obtient l'existence de  $C(T^*, M)$  telle que

$$\|\partial_{tt}e\|_{L^\infty([0, T^*]; L^2(\mathbb{R}))} + \|\partial_{tt}h\|_{L^\infty([0, T^*]; L^2(\mathbb{R}))} \leq C(T^*, M), \quad (21)$$

et on conclut comme précédemment pour obtenir (16).

Utilisant les Lemmes 2.1, 2.2 et 2.3, on a donc

$$\|\partial_t^i v\|_{L^\infty([0, T^*]; H^{2-i}(\mathbb{R}))} \leq C, \quad i = 0, 1, 2,$$

et donc

$$\|\partial_t v\|_{L^\infty([0, T^*] \times \mathbb{R})} + \|\partial_x v\|_{L^\infty([0, T^*] \times \mathbb{R})} \leq C,$$

ce qui termine la preuve du Théorème 1.1.  $\square$

Pour montrer le Théorème 1.2, on procède de façon analogue en utilisant le Théorème 4 de O. Guès [3] (ce qui impose de choisir  $s$  assez grand).

**Remarque 1.** Par des calculs directs, on peut vérifier que chaque valeur propre du système est linéairement dégénéré. Il semble donc naturel que ce système n'admette pas de choc, ce qui est confirmé par notre analyse.

## Références

- [1] G. Carbou, B. Hanouzet, Relaxation approximation of some nonlinear Maxwell initial-boundary value problem, *Comm. Math. Sci.*, in press.
- [2] G. Carbou, B. Hanouzet, Relaxation approximation of the Kerr model for the three dimensional initial-boundary value problem, en préparation.
- [3] O. Guès, Problème mixte hyperbolique quasi-linéaire caractéristique, *Comm. Partial Differential Equations* 15 (5) (1990) 595–645.
- [4] B. Hanouzet, P. Huynh, Approximation par relaxation d'un système de Maxwell non linéaire, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* 330 (3) (2000) 193–198.
- [5] P. Huynh, Etudes théorique et numérique de modèles de Kerr, Thèse, Université Bordeaux 1, 1999.
- [6] A. Majda, *Compressible Fluid Flow and Systems of Conservation Laws in Several Space Variables*, Applied Mathematical Sciences, vol. 53, Springer-Verlag, New York, 1984.
- [7] R.-W. Ziolkowski, The incorporation of microscopic material models into FDTD approach for ultrafast optical pulses simulations, *IEEE Trans. Antennas and Propagation* 45 (3) (1997) 375–391.