Available online at www.sciencedirect.com

SCIENCE DIRECT®

C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 343 (2006) 125–128

COMPTES RENDUS
MATHEMATIQUE

http://france.elsevier.com/direct/CRASS1/

Systèmes dynamiques

Exemples de systèmes dynamiques quasi-hyperboliques à décorrélations lentes

Stéphane Le Borgne

IRMAR, UMR 6625, université de Rennes I, campus de Beaulieu, 35042 Rennes cedex, France

Reçu le 11 janvier 2006 ; accepté après révision le 15 mai 2006

Disponible sur Internet le 22 juin 2006

Présenté par David Ruelle

Résumé

Nous donnons des exemples de systèmes dynamiques quasi-hyperboliques ayant les propriétés suivantes : décroissance des corrélations à la vitesse $1/\sqrt{n}$, convergence des sommes ergodiques (normalisées par $n^{3/4}$) associées à des fonctions régulières non dégénérées vers une loi non gaussienne. ***Pour citer cet article : S. Le Borgne, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 343 (2006).***

Abstract

Examples of quasi-hyperbolic dynamical systems with slow decay of correlations. We give examples of quasi-hyperbolic dynamical systems with the following properties: polynomial decay of correlations, convergence in law toward a non-Gaussian law of the ergodic sums (divided by $n^{3/4}$) associated to non-degenerated regular functions. ***To cite this article: S. Le Borgne, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 343 (2006).***

1. Introduction

Dans la littérature consacrée aux propriétés aléatoires de transformations quasi-hyperboliques de variétés les résultats établis sont le plus souvent (entre autres et pour commencer) la décroissance exponentielle des corrélations et le théorème limite central. Depuis quelques années plusieurs exemples de systèmes dynamiques ont été donnés pour lesquels les corrélations et les comportements en loi sont différents [2,7,8,10,11]. Nous présentons ici une nouvelle famille d'exemples construits de manière très simple comme produits gauches de systèmes dynamiques. Pour plus de détails nous renvoyons à [6].

Pour fixer les idées considérons l'automorphisme A du tore $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$:

$$\begin{aligned} A : \mathbb{T}^2 &\longrightarrow \mathbb{T}^2 \\ x &\longmapsto \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} x \end{aligned}$$

Adresse e-mail : stephane.leborgne@univ-rennes1.fr (S. Le Borgne).

1631-073X/$ – see front matter
doi:10.1016/j.crma.2006.05.010

et le flot géodésique sur une surface compacte de courbure -1 défini algébriquement comme l'action sur le quotient de $G = PSL(2,\mathbb{R})$ par un réseau cocompact Γ :

$$\begin{aligned} g_t : G/\Gamma &\longrightarrow G/\Gamma \\ y &\longmapsto \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{t/2} & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{-t/2} \end{pmatrix} y. \end{aligned}$$

Une fonction f, C^∞ de $\mathbb{T}^2$ dans $\mathbb{R}$, permet de définir un difféomorphisme quasi-hyperbolique de la variété $\mathbb{T}^2 \times G/\Gamma$:

$$\begin{aligned} T : \mathbb{T}^2 \times G/\Gamma &\longrightarrow \mathbb{T}^2 \times G/\Gamma, \\ (x,y) &\longmapsto (Ax, g_{f(x)}y). \end{aligned}$$

La mesure m produit de la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{T}^2$ (notée $\mathrm{d}x$ dans la suite) et de la mesure déduite de la mesure de Haar sur G/Γ (notée $\mathrm{d}y$ plus bas) est invariante par T : le triplet $(\mathbb{T}^2 \times G/\Gamma, T, m)$ définit un système dynamique mesuré.

Notons $S_n f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} f(A^k x)$ (par convention posons $S_0 = 0$) les sommes ergodiques associées à l'action de la matrice A sur la fonction f. Un calcul simple livre l'expression de la $n^{\text{ième}}$ itérée de T :

$$T^n(x,y) = \big(A^n x, g_{S_n f(x)} y\big).$$

Si f n'est pas de moyenne nulle, alors on a décroissance exponentielle des corrélations et le théorème limite central pour les fonctions régulières.

Si f *est de moyenne nulle* la situation est très différente. C'est le cas que nous étudierons dans toute la suite.

Signalons que Rudolph a déjà étudié ces systèmes : il a montré [9] que, si la fonction f n'est pas un cobord pour l'action de A, alors $(\mathbb{T}^2 \times G/\Gamma, T, m)$ est un K-système ne possédant pas la propriété de Bernoulli, étendant à ces exemples les résultats de Kalikow sur la transformation T, T^{-1} [4].

2. Décroissance des corrélations

Soit $\varphi : \mathbb{T}^2 \times G/\Gamma \to \mathbb{R}$ une fonction höldérienne **d'intégrale nulle** pour la mesure m. Notons $\sigma^2(f)$ la quantité

$$\sigma^2(f) = \int_{\mathbb{T}^2} f^2(x)\,\mathrm{d}x + 2\sum_{k\geqslant 1} \int_{\mathbb{T}^2} f(x) f(A^k x)\,\mathrm{d}x$$

et $\sigma^2(\varphi)$ le nombre

$$\sigma^2(\varphi) = \int_{\mathbb{R}} \Bigg(\int_{G/\Gamma} \Bigg(\int_{\mathbb{T}^2} \varphi(x, g_b y)\,\mathrm{d}x \Bigg) \Bigg(\int_{\mathbb{T}^2} \varphi(x,y)\,\mathrm{d}x \Bigg) \mathrm{d}y \Bigg) \mathrm{d}b.$$

Théorème 2.1. *Si la fonction f d'intégrale nulle n'est pas un cobord pour l'action de A et si la fonction $y \mapsto \int_{\mathbb{T}^2} \varphi(x,y)\,\mathrm{d}x$ n'est pas un cobord au sens du flot géodésique alors $\sigma^2(\varphi) > 0$ et, lorsque k tend vers l'infini, $\mathbb{E}(\varphi.\varphi \circ T^k)$ est équivalent à $\frac{1}{\sqrt{2\pi k}\sigma(f)} \sigma^2(\varphi)$.*

Démonstration. Le nombre $\sigma^2(\varphi)$ est nul si et seulement si la fonction $y \mapsto \int_{\mathbb{T}^2} \varphi(x,y)\,\mathrm{d}x$ est un cobord au sens du flot géodésique, c'est-à-dire si elle est la dérivée dans la direction du flot d'une autre fonction (cf. [1]). Le mélange exponentiel pour l'action du flot géodésique assure que la fonction

$$\begin{aligned} F : \mathbb{T}^2 \times \mathbb{R} \times \mathbb{T}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}, \\ (a,b,c) &\longmapsto \int_{G/\Gamma} \varphi(a, g_b y)\varphi(c,y)\,\mathrm{d}y - \Bigg(\int_{G/\Gamma} \varphi(a,y)\,\mathrm{d}y \Bigg) \Bigg(\int_{G/\Gamma} \varphi(c,y)\,\mathrm{d}y \Bigg) \end{aligned}$$

décroît exponentiellement vite vers 0 lorsque b tend vers l'infini. Le théorème local de Guivarc'h et Hardy [3] montre donc que, lorsque f est apériodique (comme f est régulière cela revient à dire qu'elle n'est pas un cobord) l'intégrale $\sqrt{2\pi k}\sigma(f)\int_{\mathbb{T}^2} F(A^k x, S_k f(x), x)\,\mathrm{d}x$ tend, lorsque k tend vers l'infini, vers

$$\int\limits_{\mathbb{T}^2\times\mathbb{R}\times\mathbb{T}^2} F(a,b,c)\,\mathrm{d}a\,\mathrm{d}b\,\mathrm{d}c$$

c'est-à-dire vers

$$\int\limits_{\mathbb{R}}\biggl(\int\limits_{G/\Gamma}\biggl(\int\limits_{\mathbb{T}^2}\varphi(a,g_b y)\,\mathrm{d}a\biggr)\biggl(\int\limits_{\mathbb{T}^2}\varphi(c,y)\,\mathrm{d}c\biggr)\mathrm{d}y\biggr)\mathrm{d}b.$$

Or l'espérance $\mathbb{E}(\varphi.\varphi\circ T^k)$ est égale à

$$\int\limits_{\mathbb{T}^2} F\bigl(T^k x, S_k f(x), x\bigr)\,\mathrm{d}x + \int\limits_{\mathbb{T}^2}\biggl(\int\limits_{G/\Gamma}\varphi(A^k x, y)\,\mathrm{d}y\biggr)\biggl(\int\limits_{G/\Gamma}\varphi(x,y)\,\mathrm{d}y\biggr)\mathrm{d}x.$$

Comme la deuxième partie de cette expression tend exponentiellement vite vers 0 lorsque k tend vers l'infini (mélange exponentiel pour l'action de l'automorphisme A), on en déduit l'équivalence annoncée si $\sigma^2(\varphi)$ n'est pas nul. □

Remarque. On montre, grâce aux mêmes arguments, que le résultat précédent est vrai dans un cadre plus général. On peut remplacer $(\mathbb{T}^2, A, \mathrm{d}x)$ par un difféomorphisme d'Anosov (X, A) mélangeant muni d'une mesure de Gibbs, $(G/\Gamma, g_t, \mathrm{d}y)$ par un flot d'Anosov $(Y, g_t, \mathrm{d}y)$ exponentiellement mélangeant et prendre pour f une fonction apériodique sur (X, A) (le théorème de Guivarc'h et Hardy s'applique alors). En revanche, de nombreuses difficultés techniques se présentent quand on essaye d'étendre le théorème de la section suivante.

3. Convergence en loi

Grâce un calcul élémentaire, on peut alors décrire le comportement asymptotique des variances des sommes ergodiques associées à T.

Proposition 3.1. *Si $\sigma^2(\varphi)$ n'est pas nul, on a :*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^{3/2}}\mathbb{E}\Biggl(\Biggl(\sum_{k=0}^{n-1}\varphi\circ T^k\Biggr)^2\Biggr) = \frac{8}{3}\frac{\sigma^2(\varphi)}{\sqrt{2\pi}\,\sigma(f)}.$$

Pour réduire la variable aléatoire $\sum_{k=0}^{n-1}\varphi\circ T^k$ il faut donc normaliser par $n^{3/4}$. Lorsqu'il est possible de préciser une vitesse dans le théorème local de Guivarc'h et Hardy, nous sommes en mesure de démontrer un résultat de convergence en loi des sommes normalisées. L'outil principal de la preuve est un résultat de Kesten et Spitzer ([5]).

Dans $\mathbb{R}^2$ appelons $\widetilde{x_0}$ (resp. $\widetilde{x_{-1}}$) le point d'intersection de la droite contractée par A passant par le point $(1,0)$ (resp. $(1,-1)$) et de la droite dilatée par A passant par le point $(1,1)$. Ce sont des points homoclines : dans le tore $T^k\widetilde{x_0}$ et $T^k\widetilde{x_{-1}}$ tendent vers zéro lorsque k tend vers $+\infty$ et vers $-\infty$.

Théorème 3.2. *Si f est une fonction höldérienne telle que*

$$2\sum_{-\infty}^{\infty}\bigl(f\bigl(T^k\widetilde{x_0}\bigr)-f(0)\bigr)\neq\sum_{-\infty}^{\infty}\bigl(f\bigl(T^k\widetilde{x_{-1}}\bigr)-f(0)\bigr),$$

et si $\sigma^2(\varphi)$ n'est pas nul, alors il existe trois mouvements browniens indépendants (*non nécessairement réduits*) *W, W_+, W_- tels que, si on note $L_t(x)$ le temps local de W en x, on ait :*

$$\frac{1}{n^{3/4}}\sum_{k=0}^{n-1}\varphi\circ T^k \xrightarrow{\mathcal{L}} \int\limits_0^{+\infty} L_1(x)\,\mathrm{d}W_+(x) + \int\limits_0^{+\infty} L_1(-x)\,\mathrm{d}W_-(x).$$

Références

[1] J.-P. Conze, S. Le Borgne, Méthode de martingales et flot géodésique sur une surface de courbure constante négative, Ergodic Theory Dynam. Systems 21 (2) (2001) 421–441.
[2] S. Gouëzel, Sharp polynomial estimates for the decay of correlations, Israel J. Math. 139 (2004) 29–65.
[3] Y. Guivarc'h, J. Hardy, Théorèmes limites pour une classe de chaînes de Markov et applications aux difféomorphismes d'Anosov, Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist. 24 (1) (1988) 73–98.
[4] S. Kalikow, T, T^{-1} transformation is not loosely Bernoulli, Ann. of Math. (2) 115 (2) (1982) 393–409.
[5] H. Kesten, F. Spitzer, A limit theorem related to a new class of self-similar processes, Z. Wahrsch. Verw. Gebiete 50 (1) (1979) 5–25.
[6] S. Le Borgne, Exemples de systèmes dynamiques quasi-hyperboliques à décorrélations lentes, http://perso.univ-rennes1.fr/stephane.leborgne/.
[7] C. Liverani, B. Saussol, S. Vaienti, A probabilistic approach to intermittency, Ergodic Theory Dynam. Systems 19 (1999) 671–685.
[8] Y. Pomeau, P. Manneville, Intermittent transition to turbulence in dissipative dynamical systems, Commun. Math. Phys. 74 (1980) 189–197.
[9] D.J. Rudolph, Asymptotically Brownian skew products give non-loosely Bernoulli K-automorphisms, Invent. Math. 91 (1) (1988) 105–128.
[10] O. Sarig, Subexponential decay of correlations, Invent. Math. 150 (3) (2002) 629–653.
[11] L.S. Young, Recurrence times and rates of mixing, Israel J. Math. 110 (1999) 153–188.