Available online at www.sciencedirect.com
SCIENCE DIRECT
C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 341 (2005) 535–538
COMPTES RENDUS MATHEMATIQUE
http://france.elsevier.com/direct/CRASS1/

Analyse mathématique

Solutions auto-similaires non radiales pour l'équation quasi-géostrophique dissipative critique

Fabien Marchand, Pierre Gilles Lemarié-Rieusset

Département de mathématiques, université d'Evry, boulevard F. Mitterrand, 91025 Evry cedex, France

Reçu le 4 juillet 2005 ; accepté le 1er septembre 2005

Disponible sur Internet le 11 octobre 2005

Présenté par Yves Meyer

Résumé

Nous montrons l'existence de solutions auto-similaires pour l'équation quasi-géostrophique dissipative critique en nous basant sur le formalisme des solutions « mild » dans un espace proche de L^∞. ***Pour citer cet article : F. Marchand, P.G. Lemarié-Rieusset, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 341 (2005).***

Abstract

Non-radial self-similar solutions for the critical dissipative quasi-geostrophic equation. We prove the existence of self-similar solutions for the critical dissipative quasi-geostrophic equation by using the formalism of mild solutions in a space close to L^∞. ***To cite this article: F. Marchand, P.G. Lemarié-Rieusset, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 341 (2005).***

Pour des équations aux dérivées partielles invariantes sous certaines homothéties, il est classique de rechercher des solutions auto-similaires. Ces solutions étant associées à des données initiales homogènes, on doit remplacer la recherche de solutions dans les espaces de Lebesgue ou de Sobolev, inadaptés à ces homogénéités, par des solutions dans des espaces de Lorentz ou des espaces de Besov. Cannone [2] et Barraza [1] ont souligné le rôle de $\dot B_\infty^{-1,\infty}$ ou de $L^{n,\infty}$ (en dimension n) dans la recherche de solutions auto-similaires des équations de Navier–Stokes.

L'équation quasi-géostrophique (QG_α) pour une fonction $\theta(t,x)$ définie sur sur $[0,+\infty[\times\mathbb{R}^2$ est l'équation

$$\begin{cases} \partial_t\theta = -(-\Delta)^\alpha\theta + \partial_1(\theta R_2\theta) - \partial_2(\theta R_1\theta), \\ \theta(0,\cdot) = \theta_0 \end{cases} \tag{QG_α}$$

où R_1 et R_2 sont les transformations de Riesz $\frac{1}{\sqrt{-\Delta}}\,\partial_1$ et $\frac{1}{\sqrt{-\Delta}}\,\partial_2$. Le cas surcritique $1/2<\alpha\leqslant 1$ est assez facile tandis que les difficultés du cas $\alpha=1/2$ en font un modèle pour les équations de Navier–Stokes tridimensionnelles [3].

La recherche de solutions auto-similaires se base sur la remarque que si θ est une solution de (QG_α) associée à la valeur initiale θ_0 et si $\lambda>0$ alors la fonction $\lambda^{2\alpha-1}\theta(\lambda^{2\alpha}t,\lambda x)$ est encore une solution de (QG_α) associée à la valeur

Adresse e-mail : Pierre-Gilles.Lemarie@maths.univ-evry.fr (P.G. Lemarié-Rieusset).

1631-073X/$ – see front matter
doi:10.1016/j.crma.2005.09.004

initiale $\lambda^{2\alpha-1}\theta_0(\lambda x)$. Si θ_0 est une fonction (ou une distribution) homogène de degré $1-2\alpha$ et si on a une propriété d'unicité de la solution associée à la condition initiale, alors on trouve que la solution θ vérifie pour tous x, t et λ

$$\theta(t,x)=\lambda^{2\alpha-1}\theta(\lambda^{2\alpha}t,\lambda x)=t^{-1+\frac{1}{2\alpha}}\theta\left(1,\frac{x}{t^{\frac{1}{2\alpha}}}\right).$$

La recherche d'une solution à l'Éq. (QG_α) se fera à l'aide du formalisme des solutions « mild » de Kato : on écrit que la solution θ est solution du problème de point fixe

$$\theta=\mathrm{e}^{-t(-\Delta)^\alpha}\theta_0+B_\alpha(\theta,\theta)\quad\text{avec } B_\alpha(f,g)=\int_0^t \mathrm{e}^{-(t-s)(-\Delta)^\alpha}\big(\partial_1(gR_2f)-\partial_2(gR_1f)\big)\,\mathrm{d}s.$$

Si θ_0 est radiale, alors $\theta=\mathrm{e}^{-t(-\Delta)^\alpha}\theta_0$ est solution, le terme non-linéaire $\partial_1(\theta\ R_2\theta)-\partial_2(\theta\ R_1\theta)$ étant identiquement nul. Dans le cas général, on cherche à résoudre l'équation pour θ_0 de petite norme dans un espace de Banach E_α qui contienne des distributions homogènes de degré $1-2\alpha$. Des candidats naturels sont les espaces de Lorentz $L^{p,\infty}$ (avec $p=\frac{2}{2\alpha-1}$) ou les espaces de Besov $\dot B^{s,\infty}_\infty$ (avec $s=1-2\alpha$). On montre facilement le résultat suivant :

Théorème 1. *Pour $\alpha\in\,]1/2,1]$, on pose $E_\alpha=L^{\frac{2}{2\alpha-1},\infty}$ et F_α l'espace de Banach des fonctions $f(t,x)$ localement intégrables sur $]0,+\infty[\,\times\mathbb{R}^2$ telles que $\sup_{t>0}\|f(t,\cdot)\|_{L^{\frac{2}{2\alpha-1},\infty}}<\infty$ et $\sup_{t>0}t^{1-\frac{1}{2\alpha}}\|f(t,\cdot)\|_\infty<\infty$. Alors* :

(i) *pour tout $f_0\in E_\alpha$, on a $\mathrm{e}^{-t(-\Delta)^\alpha}f_0\in F_\alpha$* ;
(ii) *B_α est bilinéaire continue de $F_\alpha\times F_\alpha$ vers F_α.*

En particulier, on obtient les deux résultats suivants :

(iii) *il existe deux constantes $\varepsilon_\alpha>0$ et $C_\alpha>0$ telles que, si $\theta_0\in E_\alpha$ avec $\|\theta_0\|_{E_\alpha}<\varepsilon_\alpha$, alors il existe une et une seule solution θ de $\theta=\mathrm{e}^{-t(-\Delta)^\alpha}\theta_0+B_\alpha(\theta,\theta)$ telle que $\theta\in F_\alpha$ et $\|\theta\|_{F_\alpha}\leqslant C_\alpha\|\theta_0\|_{E_\alpha}$* ;
(iv) *si de plus θ_0 est homogène de degré $1-2\alpha$, alors la solution θ est auto-similaire.*

Exemple 1. Il est facile de montrer l'existence de solutions auto-similaires lorsque $1/2<\alpha\leqslant 1$: en coordonnées polaires ($x=r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$), on prend θ_0 de la forme $\theta_0(x)=\omega(\theta)r^{1-2\alpha}$ avec $\|\omega\|_\infty$ assez petit.

On peut remplacer la norme de $L^{\frac{2}{2\alpha-1},\infty}$ par la norme de $\dot B^{1-2\alpha,\infty}_\infty$ qui est plus faible (puisqu'on a l'inclusion continue $L^{\frac{2}{2\alpha-1},\infty}\subset\dot B^{1-2\alpha,\infty}_\infty$) si on remplace l'estimation $\sup_{t>0}t^{1-\frac{1}{2\alpha}}\|\theta(t,\cdot)\|_\infty<\infty$ par l'estimation plus précise $\sup_{t>0}t^{1-\frac{1}{2\alpha}}\|\theta(t,\cdot)\|_{\dot B^{0,1}_\infty}<\infty$:

Théorème 2. *Pour $\alpha\in\,]1/2,1[$, on pose $E_\alpha=\dot B^{1-2\alpha,\infty}_\infty$ et F_α l'espace de Banach des fonctions $f(t,x)$ localement intégrables sur $]0,+\infty[\,\times\mathbb{R}^2$ telles que $\sup_{t>0}t^{1-\frac{1}{2\alpha}}\|f(t,\cdot)\|_{\dot B^{0,1}_\infty}<\infty$. Alors* :

(i) *pour tout $f_0\in E_\alpha$, on a $\mathrm{e}^{-t(-\Delta)^\alpha}f_0\in F_\alpha$* ;
(ii) *B_α est bilinéaire continue de $F_\alpha\times F_\alpha$ vers F_α.*

En particulier, on obtient les deux résultats suivants :

(iii) *il existe deux constantes $\varepsilon_\alpha>0$ et $C_\alpha>0$ telles que, si $\theta_0\in E_\alpha$ avec $\|\theta_0\|_{E_\alpha}<\varepsilon_\alpha$, alors il existe une et une seule solution θ de $\theta=\mathrm{e}^{-t(-\Delta)^\alpha}\theta_0+B_\alpha(\theta,\theta)$ telle que $\theta\in F_\alpha$ et $\|\theta\|_{F_\alpha}\leqslant C_\alpha\|\theta_0\|_{E_\alpha}$* ;
(iv) *si de plus θ_0 est homogène de degré $1-2\alpha$, alors la solution θ est auto-similaire.*

Le coeur de la démonstration de ce théorème est l'estimation

$$\big\|\mathrm{e}^{-(t-s)(-\Delta)^\alpha}\big(\partial_1(gR_2f)-\partial_2(gR_1f)\big)\big\|_{\dot B^{0,1}_\infty}\leqslant C_\alpha\frac{1}{(t-s)^{\frac{1}{2\alpha}}}\frac{1}{s^{1+(1-\frac{1}{\alpha})}}s^{1-\frac{1}{2\alpha}}\|f\|_{\dot B^{0,1}_\infty}s^{1-\frac{1}{2\alpha}}\|g\|_{\dot B^{0,1}_\infty}$$

qui n'est plus exploitable pour $\alpha = 1/2$ ou $\alpha = 1$.

Le cas $\alpha = 1$ se traite à la façon du théorème de Koch et Tataru [4] :

Théorème 3. *On pose $E_1 = BMO^{(-1)}$ et F_1 l'espace de Banach des fonctions $f(t,x)$ localement intégrables sur $]0,+\infty[\times\mathbb{R}^2$ telles que*

- $\sup_{t>0} t^{1/2}\|f(t,\cdot)\|_{\dot B^{0,1}_\infty} < \infty$;
- $\sup_{t>0,\, x\in\mathbb{R}^2} \frac{1}{t}\iint_{0<s<t,\ \|x-y\|<\sqrt{t}} |f(s,y)|^2 + |R_1 f(s,y)|^2 + |R_2 f(s,y)|^2\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}y < \infty.$

Alors :

(i) *pour tout $f_0 \in E_1$, on a $\mathrm{e}^{t\Delta} f_0 \in F_1$* ;
(ii) *B_1 est bilinéaire continue de $F_1 \times F_1$ vers F_1.*

En particulier, on obtient les deux résultats suivants :

(iii) *il existe deux constantes $\varepsilon_1 > 0$ et $C_1 > 0$ telles que, si $\theta_0 \in E_1$ avec $\|\theta_0\|_{E_1} < \varepsilon_1$, alors il existe une et une seule solution θ de $\theta = \mathrm{e}^{t\Delta}\theta_0 + B_1(\theta,\theta)$ telle que $\theta \in F_1$ et $\|\theta\|_{F_1} \leqslant C_1\|\theta_0\|_{E_1}$* ;
(iv) *si de plus θ_0 est homogène de degré -1, alors la solution θ est auto-similaire.*

Exemple 2. Il est facile de montrer l'existence de solutions auto-similaires associées à des données initiales grandes en module (de sorte que le Théorème 1 ne s'applique pas) mais suffisamment oscillantes pour appliquer les Théorèmes 2 et 3 : en coordonnées polaires ($x = r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$), on prend θ_0 de la forme $\theta_0(x) = r^{1-2\alpha}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}N\theta}$ avec $N \in \mathbb{N}$ assez grand. Pour $1/2 < \alpha < 1$, on vérifie que $\|\theta_0\|_{\dot B^{1-2\alpha,\infty}_\infty}$ est $\mathrm{O}(N^{1-2\alpha})$, tandis que pour $\alpha = 1$ on a $\|\theta_0\|_{BMO^{(-1)}} = \mathrm{O}(N^{-1})$.

Pour $\alpha = 1/2$, non seulement l'estimation de base conduit à une intégrale divergente, mais de plus le choix de l'espace de base est délicat : on ne pourrait avoir $\sup_{t>0} t^0\|\theta\|_{\dot B^{0,1}_\infty} < \infty$ que si $\theta_0 \in \dot B^{0,1}_\infty$, mais alors θ_0 ne peut pas être homogène. Par ailleurs la seule hypothèse $\theta_0 \in L^\infty$ (ou pire $\theta \in \dot B^{0,\infty}_\infty$) ne permet pas de donner un sens à $B_{1/2}(\mathrm{e}^{-t\sqrt{-\Delta}}\theta_0, \mathrm{e}^{-t\sqrt{-\Delta}}\theta_0)$, et donc d'initier la recherche de solutions « mild ». Reprenant la distinction entre tendance et fluctuation soulignée par Cannone [2] dans l'étude des équations de Navier–Stokes et utilisée par Marchand [5] dans l'étude de $(\mathrm{QG}_{1/2})$ dans $\dot H^1$, nous pouvons considérer une distribution $\theta_0 \in L^\infty$ telle que son bloc de basses fréquences $S_N\theta_0$ tende vers 0 dans $\mathcal{S}'$ quand $N \to -\infty$ et telle que $R_1(\mathrm{Id} - S_N)\theta_0$ et $R_2(\mathrm{Id} - S_N)\theta_0$ aient des limites $*$-faible dans L^∞ (ce qu'on écrit $R_1\theta_0 \in L^\infty$ et $R_2\theta_0 \in L^\infty$) et établir le résultat suivant :

Théorème 4. *On pose $F_{1/2}$ l'espace de Banach des fonctions $f(t,x)$ localement intégrables sur $]0,+\infty[\times\mathbb{R}^2$ telles que $\sup_{t>0}\|f(t,\cdot)\|_{\dot B^{0,1}_\infty} < \infty$ et $\sup_{t>0} t\|f(t,\cdot)\|_{\dot B^{1,\infty}_\infty} < \infty$. Soit $\theta_0 \in L^\infty$ tel que $R_1\theta_0 \in L^\infty$ et $R_2\theta_0 \in L^\infty$. On pose $\theta_1 = \mathrm{e}^{-t\sqrt{-\Delta}}\theta_0$. Alors* :

(i) *on a $\sup_{t>0} t\|\theta_1\|_{\dot B^{1,\infty}_\infty} < \infty$ et $\sup_{t>0}\|\theta_1\|_\infty + \|R_1\theta_1\|_\infty + \|R_2\theta_1\|_\infty < \infty$* ;
(ii) *$f \mapsto B_{1/2}(\theta_1, f)$ et $f \mapsto B_{1/2}(f, \theta_1)$ sont linéaires continues de $F_{1/2}$ dans $F_{1/2}$* ;
(iii) *$B_{1/2}$ est bilinéaire continue de $F_{1/2} \times F_{1/2}$ vers $F_{1/2}$.*

En particulier, on obtient les deux résultats suivants :

(iv) *il existe deux constantes $\varepsilon_{1/2} > 0$ et $C_{1/2} > 0$ telles que, si $\|\theta_0\|_\infty + \|R_1\theta_0\|_\infty + \|R_2\theta_0\|_\infty < \varepsilon_{1/2}$, alors il existe une et une seule solution θ de $\theta = \theta_1 + B_{1/2}(\theta,\theta)$ telle que $\theta - \theta_1 \in F_{1/2}$ et $\|\theta - \theta_1\|_{F_{1/2}} \leqslant C_{1/2}(\|\theta_0\|_\infty + \|R_1\theta_0\|_\infty + \|R_2\theta_0\|_\infty)$* ;
(v) *si de plus θ_0 est homogène de degré 0, alors la solution θ est auto-similaire.*

Démonstration. L'estimation fondamentale est de montrer que si

$$\sup_{t>0} \|f\|_\infty + t\|f\|_{\dot{B}^{1,\infty}_\infty} < \infty$$

alors, pour $j = 1, 2$, on a $g_j = \int_0^t \mathrm{e}^{-(t-s)\sqrt{-\Delta}} \partial_j f \,\mathrm{d}s \in F_{1/2}$. On a immédiatement

$$\sup_{t>0} \frac{1}{t} \|g_j\|_{\dot{B}^{-1,\infty}_\infty} < \infty.$$

Pour estimer $\|g_j\|_{\dot{B}^{1,\infty}_\infty}$, on utilise la décomposition de Littlewood–Paley et on cherche à estimer, pour $l \in \mathbb{Z}$, $2^l \|\Delta_l g_j\|_\infty$. Si $t2^l \leqslant 2$, on écrit

$$2^l \|\Delta_l g_j\|_\infty \leqslant C 2^{2l} \|g_j\| \dot{B}^{-1,\infty}_\infty \leqslant C' t 2^{2l} \leqslant 4C' t^{-1}.$$

Si $t2^l \geqslant 2$, on pose

$$g_j = \alpha_j + \beta_{j,l} + \gamma_{j,l} = \int_0^{t/2} \mathrm{e}^{-(t-s)\sqrt{-\Delta}} \partial_j f \,\mathrm{d}s + \int_{t/2}^{t-2^{-l}} \mathrm{e}^{-(t-s)\sqrt{-\Delta}} \partial_j f \,\mathrm{d}s + \int_{t-2^{-l}}^{t} \mathrm{e}^{-(t-s)\sqrt{-\Delta}} \partial_j f \,\mathrm{d}s.$$

On a

$$2^l \|\Delta_l \alpha_j\|_\infty \leqslant \|\alpha_j\|_{\dot{B}^{1,\infty}_\infty} \leqslant C t^{-2} \left\| \int_0^{t/2} \mathrm{e}^{-(t/2-s)\sqrt{-\Delta}} \partial_j f \,\mathrm{d}s \right\|_{\dot{B}^{-1,\infty}_\infty} \leqslant C' t^{-1}$$

tandis que (puisque $\|\Delta_l f\|_\infty \leqslant 2^{-l} \|f\|_{\dot{B}^{1,\infty}_\infty}$)

$$2^l \|\Delta_l \beta_{j,l}\|_\infty \leqslant C \|\sqrt{-\Delta}\Delta_l \beta_{j,l}\|_\infty \leqslant C' \int_{t/2}^{t-2^{-l}} (t-s)^{-2} 2^{-l} \|f\|_{\dot{B}^{1,\infty}_\infty} \,\mathrm{d}s \leqslant C'' t^{-1}$$

et (puisque $\|\partial_j \Delta_l f\|_\infty \leqslant \|f\|_{\dot{B}^{1,\infty}_\infty}$)

$$2^l \|\Delta_l \gamma_{j,l}\|_\infty \leqslant C 2^l \int_{t-2^{-l}}^{t} \|f\|_{\dot{B}^{1,\infty}_\infty} \,\mathrm{d}s \leqslant C' t^{-1}.$$

On a donc obtenu

$$\sup_{t>0} \frac{1}{t} \|g_j\|_{\dot{B}^{-1,\infty}_\infty} < \infty \quad \text{et} \quad \sup_{t>0} t \|g_j\|_{\dot{B}^{1,\infty}_\infty} < \infty.$$

Le contrôle de la norme $\|g_j\|_{\dot{B}^{0,1}_\infty}$ s'obtient alors par interpolation. $\square$

Exemple 3. Il est facile de montrer l'existence de solutions auto-similaires en prenant θ_0 de la forme $\theta_0(x) = \varepsilon x_1 x_2 / \|x\|^2$ avec ε assez petit. Pour vérifier que $R_1\theta_0 \in L^\infty$, on utilise le fait que si a est 2π-périodique et höldérienne et vérifie $\int_0^{2\pi} a(\tau)\,\mathrm{d}\tau = 0$ et si on utilise les coordonnées polaires $\xi = \rho\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\tau}$, alors $\lim_{\varepsilon\to 0} a(\tau)\rho^{-2} 1_{\rho>\varepsilon}$ est la transformée de Fourier d'une fonction bornée homogène de degré 0 (c'est un résultat classique de la théorie de Calderón–Zygmund des opérateurs d'intégrales singulières [6]). En choisissant a telle que de plus $\int_0^{2\pi} \sin\tau\, a(\tau)\,\mathrm{d}\tau = \int_0^{2\pi} \cos\tau\, a(\tau)\,\mathrm{d}\tau = 0$, on obtient une fonction θ_0 telle que $R_1\theta_0 \in L^\infty$ et $R_2\theta_0 \in L^\infty$.

Références

[1] O. Barraza, Self-similar solutions in weak L^p-spaces of the Navier–Stokes equations, Rev. Mat. Iberoamericone 12 (1996) 411–439.
[2] M. Cannone, Ondelettes, paraproduits et Navier–Stokes, Diderot Editeur, Paris, 1995.
[3] P. Constantin, D. Córdoba, J. Wu, On the critical dissipative quasigeostrophic equation, Indiana Univ. Math. J. 50 (2001) 97–107.
[4] H. Koch, D. Tataru, Well-posedness for the Navier–Stokes equations, Adv. Math. 157 (2001) 22–35.
[5] F. Marchand, Thèse (travail en cours), Université d'Évry.
[6] E.M. Stein, Singular Integrals and Differentiability Properties of Functions, Princeton University Press, Princeton, 1970.