Available online at www.sciencedirect.com
SCIENCE DIRECT®
ELSEVIER
C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 341 (2005) 485–490
COMPTES RENDUS MATHEMATIQUE
http://france.elsevier.com/direct/CRASS1/

Équations aux dérivées partielles

Étude unifiée de problèmes elliptiques dans le cadre höldérien

Angelo Favini [a], Rabah Labbas [b], Stéphane Maingot [b], Hiroki Tanabe [c], Atsushi Yagi [d]

[a] *Università degli Studi di Bologna, Dipartimento di Matematica, Piazza di Porta S. Donato, 5, 40126 Bologna, Italy*
[b] *Laboratoire de mathématiques, UFR ST, université du Havre, B.P. 540, 76058 Le Havre cedex, France*
[c] *Department of Economics, Otemon Gakuin University Ibaraki, Osaka 567-8502, Japan*
[d] *Department of Applied Physics, Osaka University, Suita, Osaka 565-0871, Japan*

Reçu le 12 avril 2005 ; accepté après révision le 1er septembre 2005

Disponible sur Internet le 19 septembre 2005

Présenté par Philippe G. Ciarlet

Résumé

Dans cette Note on donne des résultats nouveaux d'existence, d'unicité et de régularité maximale des solutions strictes pour certaines équations différentielles complètes du second ordre de type elliptique lorsque le second membre f est holdérien. L'approche utilisée ici généralise celle de S.G. Krein. ***Pour citer cet article : A. Favini et al., C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 341 (2005).***

Abstract

Unified study of elliptic problems in Hölder spaces. In this Note we give new results of existence, uniqueness and maximal regularity of the strict solutions for some complete abstract second order differential equations of elliptic type when the second member f is Hölderian. The approach used here generalizes that given in S.G. Krein. ***To cite this article: A. Favini et al., C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 341 (2005).***

Abridged English version

Let us consider the boundary value problem

$$\begin{cases} u''(x) + 2Bu'(x) + Au(x) = f(x), & x \in (0,1), \\ u(0) = u_0, \quad u(1) = u_1. \end{cases} \tag{P}$$

Here, $f \in C^\theta([0,1]; X)$, $0 < \theta < 1$, X being a complex Banach space, u_0, u_1 are given elements of $D(A)$, the domain of A, A and B are two closed linear operators in X.

We seek for a strict solution to (P), i.e., a function u such that

$$u \in C^2\big([0,1]; X\big) \cap C\big([0,1]; D(A)\big), \qquad u' \in C\big([0,1]; D(B)\big),$$

and satisfying (P).

Adresses e-mail : favini@dm.unibo.it (A. Favini), rabah.labbas@univ-lehavre.fr (R. Labbas), stephane.maingot@univ-lehavre.fr (S. Maingot), h7tanabe@jttk.zaq.ne.jp (H. Tanabe), yagi@ap.eng.osaka-u.ac.jp (A. Yagi).

1631-073X/$ – see front matter
doi:10.1016/j.crma.2005.09.011

Our main goal is to give an alternative approach with respect to recent results due to El Haial and Labbas [2] and to improve the main result by Favini, Labbas, Tanabe, Yagi [3]. To this end we assume that

H1 $B^2 - A$ is a linear closed densely defined operator in X and for any $\lambda \geqslant 0$

$$(\lambda I + B^2 - A)^{-1} \in L(X) \quad \text{and} \quad \|(\lambda I + B^2 - A)^{-1}\|_{L(X)} \leqslant C/(1+\lambda),$$

(this implies that $-(B^2 - A)^{1/2}$ is the infinitesimal generator of an analytic semigroup in X),

H2 $D(A) \subseteq D(B^2)$, $D((B^2 - A)^{1/2}) \subseteq D(B)$, $D(BA) \subset D(B^3)$,

H3 $\forall y \in D(B)\ B(B^2 - A)^{-1} y = (B^2 - A)^{-1} B y$,

H4 A is boundedly invertible,

H5 $\pm B - (B^2 - A)^{1/2}$ generates an analytic semigroup on X.

Our main results are the following

Theorem 0.1. *If* H1–H5 *hold, then for all* $f \in C^\theta([0,1]; X)$, $0 < \theta < 1$ *and any* $u_0, u_1 \in D(A)$, *problem* (P) *has a unique strict solution on* $[0,1]$.

Theorem 0.2. *If* H1–H5 *hold, then for all* $f \in C^\theta([0,1]; X)$, $0 < \theta < 1$ *and* $u_0, u_1 \in D(A)$ *satisfying*

$$f(i),\ Au_i \in D_{-(B^2-A)}(\theta/2, \infty), \quad i = 0, 1,$$

the unique strict solution u to problem (P) *has the maximal regularity property*

$$u'', Bu', Au \in C^\theta\big([0,1]; X\big).$$

Here, according to Grisvard [4], φ belongs to the real interpolation space $D_{-(B^2-A)}(\theta/2, \infty)$ if and only if

$$\sup_{r>0} r^{\theta/2} \|(B^2 - A)(rI + B^2 - A)^{-1}\varphi\|_X < \infty.$$

The proofs use the following representation

$$u(x) = T_0(x)\xi_0 + T_1(1-x)\xi_1 - \frac{1}{2}\int_0^x T_0(x-s)(B^2 - A)^{-1/2} f(s)\,\mathrm{d}s - \frac{1}{2}\int_x^1 T_1(s-x)(B^2 - A)^{-1/2} f(s)\,\mathrm{d}s,$$

where $(T_0(x))_{x\geqslant 0}$ and $(T_1(x))_{x\geqslant 0}$ are the analytic semigroups generated by

$$-B - (B^2 - A)^{1/2} \quad \text{and} \quad B - (B^2 - A)^{1/2}$$

and ξ_0, ξ_1 are some appropriated elements in X defined in (4).

1. Introduction et hypothèses

On considère le problème

$$\begin{cases} u''(x) + 2Bu'(x) + Au(x) = f(x), & x \in (0,1), \\ u(0) = u_0, \quad u(1) = u_1, \end{cases} \tag{P}$$

où $f \in C^\theta([0,1]; X)$, $0 < \theta < 1$, X étant un espace de Banach complexe, A et B sont deux opérateurs linéaires fermés dans X et u_0, u_1 sont des éléments donnés dans $D(A)$, le domaine de A.

On cherche une solution stricte de (P), i.e., une fonction u telle que

$$u \in C^2\big([0,1]; X\big) \cap C\big([0,1]; D(A)\big), \qquad u' \in C\big([0,1]; D(B)\big),$$

et satisfaisant (P). Nos résultats sont établis sous les hypothèses suivantes

H1 $B^2 - A$ est un opérateur linéaire fermé densément défini dans X et pour tout $\lambda \geqslant 0$

$$(\lambda I + B^2 - A)^{-1} \in L(X) \quad \text{et} \quad \|(\lambda I + B^2 - A)^{-1}\|_{L(X)} \leqslant C/(1+\lambda),$$

(ce qui implique que $-(B^2 - A)^{1/2}$ est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe analytique),
H2 $D(A) \subseteq D(B^2)$, $D((B^2-A)^{1/2}) \subseteq D(B)$, $D(BA) \subset D(B^3)$,
H3 $\forall y \in D(B)$ $B(B^2-A)^{-1}y = (B^2-A)^{-1}By$,
H4 A admet un inverse dans $L(X)$,
H5 $\pm B - (B^2-A)^{1/2}$ génèrent des semi-groupes analytiques.

Théorème 1.1. *Soient $f \in C^\theta([0,1]; X)$, $0 < \theta < 1$ et $u_0, u_1 \in D(A)$. Sous les hypothèses* H1–H5*, le problème* (P) *a une unique solution stricte u sur* $[0,1]$.

Théorème 1.2. *Soient $f \in C^\theta([0,1]; X)$, $0 < \theta < 1$, $u_0, u_1 \in D(A)$ vérifiant*

$$f(i), Au_i \in D_{-(B^2-A)}(\theta/2, \infty), \quad i = 0, 1. \tag{1}$$

Sous les hypothèses H1–H5*, l'unique solution stricte u du problème* (P) *a la propriété de régularité maximale*

$$u'', Bu', Au \in C^\theta\big([0,1]; X\big).$$

Ici, selon Grisvard [4], φ est dans l'espace d'interpolation réelle $D_{-(B^2-A)}(\theta/2, \infty)$ si et seulement si

$$\sup_{r>0} r^{\theta/2}\|(B^2-A)(rI + B^2 - A)^{-1}\varphi\|_X < \infty.$$

On donne dans ce travail une approche directe du problème (P), étendant au cas $B \neq 0$, le travail de Krein [5], pp. 249–270. L'approche est différente de celle utilisée par El Haial and Labbas [2] pour résoudre le même problème. Les résultats obtenus généralisent ceux de Favini, Labbas, Tanabe, Yagi [3].

2. Démonstration des théorèmes

On suppose H1–H5. On montre alors les propriétés suivantes :

Lemme 2.1.

(i) *Pour tout $y \in D(B)$*

$$(B^2-A)^{-1/2}y \in D(B) \quad \textit{et} \quad B(B^2-A)^{-1/2}y = (B^2-A)^{-1/2}By.$$

(ii) *Pour tout $y \in D(A)$*

$$A(B^2-A)^{-1/2}y = (B^2-A)^{-1/2}Ay \quad \textit{et} \quad B(B^2-A)^{1/2}y = (B^2-A)^{1/2}By.$$

(iii) *Pour tout $y \in D((B^2-A)^{1/2})$*

$$A^{-1}(B^2-A)^{1/2}y = (B^2-A)^{1/2}A^{-1}y.$$

(iv) *Pour tout $y \in D((B^2-A)^{1/2})$ et tout $z \in \rho(\mp B - (B^2-A)^{1/2})$*

$$\big(zI \pm B + (B^2-A)^{1/2}\big)^{-1}(B^2-A)^{1/2}y = (B^2-A)^{1/2}\big(zI \pm B + (B^2-A)^{1/2}\big)^{-1}y,$$

(v) *$B \pm (B^2-A)^{1/2}A$ admet un inverse dans $L(X)$ et*

$$\big(B \mp (B^2-A)^{1/2}\big)^{-1} = \big(B \pm (B^2-A)^{1/2}\big)A^{-1}.$$

On cherche ensuite une solution particulière $\bar{u}$ de l'équation

$$u''(x) + 2Bu'(x) + Au(x) = f(x), \quad x \in (0,1), \tag{2}$$

en posant

$$\bar{u}(x) = -\frac{1}{2}\int_0^x T_0(x-s)(B^2-A)^{-1/2} f(s)\,\mathrm{d}s - \frac{1}{2}\int_x^1 T_1(s-x)(B^2-A)^{-1/2} f(s)\,\mathrm{d}s,$$

pour $0 \leqslant x \leqslant 1$, où $T_0(x)$ et $T_1(x)$ sont les semi-groupes analytiques engendrés respectivement par $-B-(B^2-A)^{1/2}$ et $B-(B^2-A)^{1/2}$. On obtient $\bar{u} \in C^1([0,1];X)$ et

$$\bar{u}'(x) = \frac{1}{2}\big(B+(B^2-A)^{1/2}\big)(B^2-A)^{-1/2}\int_0^x T_0(x-s) f(s)\,\mathrm{d}s$$
$$+\frac{1}{2}\big(B-(B^2-A)^{1/2}\big)(B^2-A)^{-1/2}\int_x^1 T_1(s-x) f(s)\,\mathrm{d}s.$$

Utilisant le fait que $f \in C^\theta([0,1];X)$, les propriétés citées dans le lemme ci-dessus et l'analyticité des semi-groupes $T_0(x)$ et $T_1(x)$, on obtient d'une part $\bar{u}(0), \bar{u}(1) \in D(A)$ et d'autre part $\bar{u}'', B\bar{u}', A\bar{u} \in C([0,1];X)$. Ainsi $\bar{u}$ est solution stricte de (2).

On considère maintenant le problème

$$\begin{cases} v''(x) + 2Bv'(x) + Av(x) = 0, & x \in [0,1], \\ v(0) = x_0, \quad v(1) = x_1, \end{cases} \tag{3}$$

où $x_0 = u_0 - \bar{u}(0) \in D(A)$, $x_1 = u_1 - \bar{u}(1) \in D(A)$. Alors (3) a une unique solution $\bar{\bar{u}}$ donnée par

$$\bar{\bar{u}}(x) = T_0(x)\xi_0 + T_1(1-x)\xi_1,$$

avec

$$\xi_0 = (I-Z)^{-1}\big(x_0 - T_1(1)x_1\big), \quad \xi_1 = (I-Z)^{-1}\big(x_1 - T_0(1)x_0\big) \quad \text{et} \quad Z = \mathrm{e}^{-2(B^2-A)^{1/2}}. \tag{4}$$

Notons que, puisque l'ensemble résolvant $\rho(-(B^2-A)^{1/2})$ contient l'axe imaginaire, $I-Z$ a un inverse borné (voir Lunardi [6], p. 60).

On achève la démonstration du Théorème 1.1 en remarquant que $u = \bar{u} + \bar{\bar{u}}$ est l'unique solution stricte du problème (P).

La régularité maximale annoncée dans le Théorème 1.2, s'obtient grâce à une analyse fine des représentations de $Au(x)$, $Bu'(x)$. On utilise, entre autres, le fait que $f \in C^\theta([0,1];X)$, l'hypothèse (1) et les techniques de Sinestrari [8] utilisées dans l'étude d'un problème de Cauchy abstrait.

3. Exemples

Exemple 1. (*Conditions aux limites périodiques*) Soit $X = L^2(0,1)$ et l'opérateur $T\colon D(T) \subset X \to X$ défini par

$$D(T) = \big\{\psi \in H^1(0,1)\colon \psi(0) = \psi(1)\big\}, \quad T\psi = \mathrm{i}\psi'.$$

T est autoadjoint et son spectre est $\sigma(T) = 2\pi\mathbb{Z}$, (voir [7], p. 75), de sorte que T^2 est autoadjoint positif. On considère alors $B = -\mathrm{i}T$ et A défini par

$$D(A) = D(T^2), \quad A\psi = (-2T^2 - aI)\psi = 2\psi'' - a\psi,$$

(où $a > 0$). On montre que les hypothèses H1–H5 sont vérifiées et on peut donc résoudre le problème aux limites

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y) + 2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}(x,y) + 2\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y) - au(x,y) = f(x,y), & (x,y) \in (0,1)\times(0,1), \\ u(0,y) = u_0(y), \quad u(1,y) = u_1(y), & 0 < y < 1, \\ u(x,0) = u(x,1), & 0 < x < 1, \\ \dfrac{\partial u}{\partial y}(x,0) = \dfrac{\partial u}{\partial y}(x,1), & 0 < x < 1, \end{cases}$$

dès que $u_0, u_1 \in D(A)$ et $f \in C^\theta([0,1]; L^2(0,1))$. La régularité maximale de la solution est obtenue si on suppose de plus (1).

Exemple 2. (*Opérateurs paraboliques dégénérés*) Soit $a \in C^1([0,1])$ une fonction à valeurs réelles, strictement positive sur $(0,1)$, avec $a(0) = a(1) = 0$. On considère l'opérateur différentiel

$$T\psi = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\left(a\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}y}\right), \quad \psi \in D(T),$$

où

$$D(T) = \big\{\psi \in L^2(0,1)\colon\ \psi \text{ est localement absolument continue dans } (0,1) \text{ et } a\psi' \in H_0^1(0,1)\big\},$$

T est autoadjoint et générateur infinitésimal d'un semi-groupe analytique d'angle $\pi/2$ (voir [1], Lemma 2.7 et Theorem 2.8). Alors A et B définis par

$$\begin{cases} D(B) = D(T), & B = \mathrm{i}T, \\ D(A) = D(T^2), & A = -\alpha T^2 - cI \end{cases}$$

(où $\alpha > 1$ et $c > 0$) satisfont aux hypothèses H1–H5 et l'on peut résoudre le problème aux limites

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y) + 2\mathrm{i}\dfrac{\partial}{\partial y}\left(a(y)\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}(x,y)\right) - \alpha\dfrac{\partial}{\partial y}\left(a(y)\dfrac{\partial^2}{\partial y^2}\left(a(y)\dfrac{\partial u}{\partial y}(x,y)\right)\right) \\ \quad -cu(x,y) = f(x,y), \quad (x,y) \in (0,1)\times(0,1), \\ u(0,y) = u_0(y), \quad u(1,y) = u_1(y), \quad 0 < y < 1, \\ \left(a\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)(x,0) = \left(a\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)(x,1) = 0, \quad 0 < x < 1, \\ \left(a\dfrac{\partial^2}{\partial y^2}\left(a\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)\right)(x,0) = \left(a\dfrac{\partial^2}{\partial y^2}\left(a\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)\right)(x,1) = 0, \quad 0 < x < 1, \end{cases}$$

dès que $u_0, u_1 \in D(A)$ et $f \in C^\theta([0,1]; L^2(0,1))$.

Exemple 3. Soit B le générateur infinitésimal d'un semi-groupe analytique borné tel que $0 \in \rho(B)$.

Prenons $A = bB^2$, où $b < 0$. Alors

$$\pm B - (B^2 - A)^{1/2} = \pm B + (1-b)^{1/2}B = \big((1-b)^{1/2} \pm 1\big)B$$

est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe analytique. Puisque H1–H5 sont ici vérifiées, nos théorèmes s'appliquent.

Comme exemple, considérons $X = L^p(\Omega)$, $1 < p < \infty$, où Ω est un domaine borné $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 1$, à frontière régulière, A et B définis par $B = \Delta$ et $A = b\Delta^2$, $b < 0$, avec

$$\begin{cases} D(A) = \big\{u \in W^4(\Omega)\colon\ u_{|\partial\Omega} = \Delta u_{|\partial\Omega} = 0\big\}, & A = b\Delta^2,\ b < 0, \\ D(B) = W^{2,p}(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega), & B = \Delta. \end{cases}$$

On peut alors résoudre le problème

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y) + 2\Delta\dfrac{\partial u}{\partial x}(x,y) + b\Delta^2 u(x,y) = f(x,y), \quad (x,y) \in (0,1)\times\Omega, \\ u(0,y) = u_0(y), \quad u(1,y) = u_1(y), \quad y \in \Omega, \\ u(x,y) = \Delta u(x,y) = 0, \quad (x,y) \in (0,1)\times\partial\Omega, \end{cases}$$

dès que $u_0, u_1 \in D(A)$ et $f \in C^\theta([0,1]; L^p(\Omega))$.

Références

[1] M. Campiti, G. Metafune, D. Pallara, Degenerate self-adjoint evolution equations on the unit interval, Semigroup Forum 57 (1998) 1–36.

[2] A. El Haial, R. Labbas, On the ellipticity and solvability of abstract second-order differential equation, Electronic J. Differential Equations 57 (2001) 1–18.

[3] A. Favini, R. Labbas, H. Tanabe, A. Yagi, On the solvability of complete abstract differential equations of elliptic type, Funkcial. Ekvac. 47 (2004) 205–224.

[4] P. Grisvard, Spazi di tracce e applicazioni, Rend. Mat. (4) série VI 5 (1972) 657–729.

[5] S.G. Krein, Linear Differential Equations in Banach Space, Nauka, Moscow, 1967. English translation: Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1971.

[6] A. Lunardi, Analytic Semigroups and Optimal Regularity in Parabolic Problems, Birkhäuser, Basel, 1995.

[7] M. Miklavčič, Applied Functional Analysis and Partial Differential Equations, Word Scientific, Singapore, 1998.

[8] E. Sinestrari, On the abstract Cauchy problem of parabolic type in spaces of continuous functions, J. Math. Anal. Appl. 66 (1985) 16–66.