



Théorie des nombres

Une remarque sur les sommes de Ramanujan

Arnaud Chadozeau

Institut de mathématiques, université Bordeaux-I, 351, cours de la libération, 33405 Talence cedex, France

Reçu le 1^{er} février 2005 ; accepté après révision le 2 juin 2005

Présenté par Jean-Pierre Serre

Résumé

On s'intéresse au comportement asymptotique de la quantité $A(q) = \sup_{x,y} |\sum_{x < n \leq y} c_q(n)|$ où $c_q(n)$ désigne la somme de Ramanujan, et l'on prouve que $q \ll A(q) \ll q\sqrt{\log_2 q}$ en précisant ce que cet encadrement a d'optimal. **Pour citer cet article :** A. Chadozeau, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 341 (2005).

© 2005 Académie des sciences. Publié par Elsevier SAS. Tous droits réservés.

Abstract

A remark on the Ramanujan sums. We study the asymptotic behaviour of the function $A(q) = \sup_{x,y} |\sum_{x < n \leq y} c_q(n)|$ where $c_q(n)$ denotes the Ramanujan sum. We prove that $q \ll A(q) \ll q\sqrt{\log_2 q}$ and determine how sharp this estimation is. **To cite this article :** A. Chadozeau, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 341 (2005).

© 2005 Académie des sciences. Publié par Elsevier SAS. Tous droits réservés.

Abridged English version

The following article deals with the summatory function $s_q(x) := \sum_{0 < n \leq x} c_q(n)$ for $q > 1$, where $c_q(n)$ denotes the Ramanujan sum.

From basic properties of Ramanujan sums (periodicity, multiplicativity, etc.) we are able to deduce some relations for s_q , in particular its periodicity and a functional identity (Eq. (2))

$$s_{q'q}(x) = \sum_{d'|q'} \mu(q'/d') d' s_q(x/d')$$

valid for relatively prime integers q and q' . We remark that the study can be reduced to the case of squarefree integers q , and we focus our attention on the amplitude function $A(q) := \sup_{x < y} |s_q(y) - s_q(x)|$, with $q > 1$. We

Adresse e-mail : Arnaud.Chadozeau@math.u-bordeaux1.fr (A. Chadozeau).

set $A(1) := 1$. By using Eq. (2) we obtain that for every relatively prime integers q and q' , $\varphi(q')A(q) \leq A(q'q) \leq \sigma(q')A(q)$ (Proposition 1.1).

We now consider the slightly modified function \tilde{s}_q defined by $\tilde{s}_q(x) := \frac{1}{2}(s_q(x) - s_q(-x))$. This function is odd, so $A(q) = 2 \sup |\tilde{s}_q|$, and it equals the sum of its Fourier series. Thus for every integer $q > 1$ and every real α , we have

$$\frac{\tilde{s}_q(q\alpha)}{q} = \sum_{\substack{(n,q)=1 \\ n \leq q}} \frac{\sin(2\pi n\alpha)}{\pi n}.$$

By Parseval’s formula it follows that $A(q) \gg q$ (Proposition 2.2). However, we have not yet succeeded in proving that $A(q)/q \geq 1/2 + o(1)$.

A strong P-convergence theorem due to la Bretèche and Tenenbaum directly provides our Proposition 3.1: we have $\tilde{s}_{q_y}(q_y\alpha)/q_y = 1/\pi \sin(2\pi\alpha) + O(1/\log y)$ uniformly for $y \geq 2$ and α real, where $q_y = \prod_{p \leq y} p$ is set. Consequently we can see that $A(q_y) \sim 2q_y/\pi$ as $y \rightarrow +\infty$. With the help of Proposition 1.1 this result leads to our main upper bound (Theorem 3.2):

$$A(q) \ll q \min\left(\prod_{\substack{p|q \\ p \leq \log q}} \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{-1}, \prod_{\substack{p \nmid q \\ p \leq \log q}} \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{-1} \right),$$

uniformly in q . By Mersenne’s formula it can be shown that $A(q) \ll q\sqrt{\log \log q}$ for all q .

Let \mathcal{E} be a set of primes satisfying $\sum_{p \in \mathcal{E}} \frac{1}{p} = \kappa \log \log y + O(1)$ as $y \rightarrow +\infty$ with $\kappa \in (0, 1)$, and set $q_y = \prod_{p \in \mathcal{E}} p$. As a corollary of Theorem 3.2 we get $A(q_y) \ll q_y (\log \log q_y)^{\min(\kappa, 1-\kappa)}$. If we set $\mathcal{E} = \{p \equiv -1[n]\}$ (or $\mathcal{E} = \{p \not\equiv 1[n]\}$) with $n \geq 3$, we are able to estimate $\tilde{s}_{q_y}(q_y a/n)$ for every $a \in \mathbb{Z}$. From this, we deduce that in both cases we have $A(q_y) \asymp q_y (\log \log q_y)^{1/\varphi(n)}$ (Proposition 4.2). Hence the exponent $\min(\kappa, 1-\kappa)$ is the best possible for $\kappa = 1/\varphi(n)$ (and for $\kappa = 1 - 1/\varphi(n)$), with $n \geq 3$ any integer. We also construct for any given $\kappa \in (0, 1)$ a set of primes \mathcal{E} satisfying $\sum_{p \in \mathcal{E}} \frac{1}{p} = \kappa \log \log y + O(1)$ as $y \rightarrow +\infty$ and $A(q_y) \asymp q_y (\log \log q_y)^{\min(\kappa, 1-\kappa)}$.

0. Introduction

On définit les sommes de Ramanujan pour $q \in \mathbb{N}^*$ et $n \in \mathbb{Z}$ par $c_q(n) := \sum_{r \in (\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^*} e(nr/q)$, où $e(x) = e^{2\pi i x}$. On considère pour $q > 1$ la fonction sommatoire $s_q(x) := \sum_{0 < n \leq x} c_q(n)$, pour $x \in \mathbb{R}^+$. Cette fonction est q -périodique, et se prolonge donc à tout $x \in \mathbb{R}$. On s’intéresse à l’amplitude de ses variations

$$A(q) := \sup_{x < y} \left| \sum_{x < n \leq y} c_q(n) \right| = \sup_{x < y} |s_q(y) - s_q(x)|.$$

1. Propriétés élémentaires

La fonction s_q hérite des sommes de Ramanujan¹ une série de propriétés fondamentales :

- (i) Pour $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, on a $s_q(x) + s_q(-x) + \varphi(q) = 0$. Cela provient du fait que la somme $\sum_{n=1}^q c_q(n)$ est nulle pour $q > 1$.
- (ii) Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, on a $s_q(q\alpha)/q = s_{\bar{q}}(\bar{q}\alpha)/\bar{q}$, où \bar{q} est le noyau sans facteur carré de q . Cela se déduit de l’identité $c_q(n)/q = c_{\bar{q}}(n\bar{q}/q)/\bar{q}$ si $q \mid n\bar{q}$ et $c_q(n) = 0$ sinon.

¹ On consultera pour les propriétés classiques de ces sommes l’ouvrage de McCarthy [4, Chapitre 2].

(iii) Pour $x \in \mathbb{R}$ et pour $q > 1$ un entier, on a, grâce à la formule $c_q(n) = \sum_{d|(q,n)} \mu(q/d)d$,

$$s_q(x) = \sum_{d|q} \mu(q/d)d \lfloor x/d \rfloor = - \sum_{d|q} \mu(q/d)d \{x/d\}, \tag{1}$$

et, pour tout q' entier premier à q , on a

$$s_{q'q}(x) = \sum_{d'|q'} \mu(q'/d')d' s_q(x/d'). \tag{2}$$

De ces propriétés nous déduisons immédiatement une série de conséquences sur la fonction A .

Proposition 1.1. *Soit $q > 1$ un entier.*

- (a) *Pour p un nombre premier, on a $A(p) = p - 1$.*
- (b) *On a les relations $2 \sup_x s_q(x) = A(q) - \varphi(q)$ et $2 \inf_x s_q(x) = -A(q) - \varphi(q)$.*
- (c) *On a la relation $A(q)/q = A(\bar{q})/\bar{q}$.*
- (d) *On a l'encadrement $\varphi(q) \leq A(q) \leq \sigma(q)$.*
- (e) *Pour tout q' entier premier à q , on a $\varphi(q')A(q) \leq A(q'q) \leq \sigma(q')A(q)$.*

Démonstration. Les propriétés (a), (b) et (c) découlent des propriétés déjà énoncées. L'encadrement (d) provient pour la minoration de la propriété (b) et pour la majoration de l'Éq. (1). La majoration de la propriété (e) se déduit de la même façon de l'Éq. (2) : il reste à en montrer la minoration. L'Éq. (2) donne pour $q' = p$ un nombre premier ne divisant pas q , l'identité $s_{qp}(x) = p s_q(x/p) - s_q(x)$, donc $p \sup_x s_q(x) \leq \sup_x s_{qp}(x) + \sup_x s_q(x)$. À l'aide de la propriété (b), on a bien $A(qp) \geq (p - 1)A(q)$. La minoration s'en déduit par itération sur les diviseurs premiers de q' et par la propriété (c). \square

Remarque 1. Malgré sa simplicité, la Proposition 1.1(e) est particulièrement importante. Elle est, avec la relation $A(\prod_{p \leq y} p) \ll \prod_{p \leq y} p$,² l'ingrédient principal du Théorème 3.2. Cette dernière relation s'établit grâce à un puissant théorème de P-convergence dû à la Bretèche et Tenenbaum [2, Théorème 2.1].

2. Séries de Fourier et minoration

On définit la fonction \tilde{s}_q par $\tilde{s}_q(x) = \frac{1}{2}(s_q(x) - s_q(-x))$. Pour $x \notin \mathbb{Z}$, on a $\tilde{s}_q(x) = s_q(x) + \frac{1}{2}\varphi(q)$ et pour $x \in \mathbb{Z}$, éventuels points de discontinuité, on a $2\tilde{s}_q(x) = \tilde{s}_q(x^+) + \tilde{s}_q(x^-)$. On a donc $A(q) = 2 \sup |\tilde{s}_q|$ et \tilde{s}_q est somme de sa série de Fourier. On note par la suite B_1 la première fonction de Bernoulli.

Lemme 2.1. *Soient $q > 1$ un entier et α un réel. On a*

$$\tilde{s}_q(q\alpha)/q = - \sum_{d|q} \mu(d)B_1(d\alpha)/d = \sum_{(n,q)=1} \sin(2\pi n\alpha)/(\pi n).$$

Démonstration. Partant de l'identité (1), il s'agit d'une combinaison linéaire du développement en série de Fourier de la fonction de Bernoulli $\frac{1}{2}(\{x\} - \{-x\}) = B_1(x) = \sum_{n \geq 1} \frac{\sin(2\pi nx)}{\pi n}$. \square

Remarque 2. Davenport propose dans [1] de déterminer l'éventuel sens analytique de la relation formelle

$$\sum_{n=1}^{\infty} B_1(n\alpha)f(n)/n = - \sum_{m=1}^{\infty} g(m) \sin(2\pi m\alpha)/(\pi m),$$

² Cf. Proposition 3.1 infra.

où les fonctions f et g sont liées par $g(n) = \sum_{d|n} f(d)$. Le Lemme 2.1 n'énonce que la convergence ponctuelle d'un cas très simple d'identité de Davenport, ce qui permet tout de même d'obtenir une minoration.

Proposition 2.2. *Pour tout entier $q > 1$ on a $A(q) \geq q \frac{1}{\sqrt{3}} \prod_{p|q} (1 - p^{-2})^{1/2}$.*

Démonstration. On a, par la formule de Parseval et le Lemme 2.1,

$$\frac{A(q)^2}{4q^2} = \left(\frac{\sup |\tilde{s}_q|}{q} \right)^2 \geq \int_0^1 \left| \frac{\tilde{s}_q(q\alpha)}{q} \right|^2 d\alpha = \sum_{(n,q)=1} \frac{1}{2\pi^2 n^2} = \frac{\zeta(2)}{2\pi^2} \prod_{p|q} \left(1 - \frac{1}{p^2} \right). \quad \square$$

Remarque 3. On a en particulier $A(q)/q \geq \sqrt{2}/\pi \approx 0,450$. Puisque $A(2p) = p + 1$ pour tout p premier impair, on ne peut espérer une meilleure constante que $1/2$. D'autre part, pour les nombres impairs, on a $A(q)/q \geq 2\pi^{-1} \sqrt{2/3} \approx 0,520$.

3. P-convergence et majoration

Le théorème de P-convergence de [2, Théorème 2.1], qui établit uniformément en $y \geq 2$ et en $\alpha \in \mathbb{R}$ l'inégalité

$$\sum_{P(n) \leq y} \frac{\mu(n)}{n} B_1(n\alpha) + \frac{\sin(2\pi\alpha)}{\pi} \ll \frac{1}{\log y}, \tag{3}$$

où $P(n) := \max\{p \mid n, p \text{ premier}\}$, se traduit directement, grâce au Lemme 2.1, en termes de la fonction \tilde{s}_q .

Proposition 3.1. *Posons $q_y = \prod_{p \leq y} p$. On a $\tilde{s}_{q_y}(q_y\alpha)/q_y = \frac{1}{\pi} \sin(2\pi\alpha) + O(1/\log y)$ uniformément en $y \geq 2$ et en $\alpha \in \mathbb{R}$. Par conséquent, $A(q_y) \sim \frac{2}{\pi} q_y$ pour $y \rightarrow +\infty$.*

Remarque 4. Un argument de P-sommation supplémentaire permet de généraliser le résultat de la proposition : on a, uniformément pour $q > 1$, $\alpha \in \mathbb{R}$ et $y \geq P(q)$,

$$\frac{\tilde{s}_q(q\alpha)}{q} = \sum_{\substack{(n,q)=1 \\ P(n) \leq y}} \frac{\sin(2\pi n\alpha)}{\pi n} + O\left(\prod_{\substack{p|q \\ p \leq y}} \left(1 - \frac{1}{p} \right)^{-1} \frac{1}{\log y} \right). \tag{4}$$

Théorème 3.2. *On a, uniformément pour $q > 1$,*

$$A(q) \ll q \min\left(\prod_{\substack{p|q \\ p \leq \log q}} \left(1 - \frac{1}{p} \right)^{-1}, \prod_{\substack{p|q \\ p \leq \log q}} \left(1 - \frac{1}{p} \right)^{-1} \right).$$

En particulier, on a $A(q) \ll q \sqrt{\log_2 q}$.

Lemme 3.3. *On a, uniformément pour $q \geq 3$ entier, $\prod_{\log q < p}^{p|q} (1 - 1/p)^{-1} = 1 + O(1/\log_2 q)$.*

Démonstration du Théorème 3.2. On peut, par la Proposition 1.1(d), supposer q sans facteur carré. On note $Q = \prod_{p \leq P(q)} p$. En utilisant la Proposition 1.1(b) puis le Lemme 3.3, on a

$$A(q) \leq \sigma(q) \asymp q \prod_{p|q} \left(1 - \frac{1}{p} \right)^{-1} \sim q \prod_{\substack{p|q \\ p \leq \log q}} \left(1 - \frac{1}{p} \right)^{-1},$$

et en utilisant la Proposition 1.1(e), la Proposition 3.1 puis le Lemme 3.3, on a

$$A(q) \leq \frac{A(Q)}{\varphi(Q/q)} \asymp q \prod_{\substack{p \nmid q \\ p \leq P(q)}} \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{-1} \sim q \prod_{\substack{p \nmid q \\ p \leq \log q}} \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{-1}.$$

L'encadrement $A(q) \ll q \left(\prod_{p \leq \log q} (1 - 1/p)^{-1}\right)^{1/2} \ll q \sqrt{\log_2 q}$ en résulte par la formule de Mertens. \square

4. Quelques exemples

Nous commençons par donner une version réduite du Théorème 3.2, qui nous paraît plus « visuelle ». On dit qu'un ensemble d'entiers premiers \mathcal{E} possède une densité logarithmique forte $\kappa \in [0, 1]$ (ou plus sommairement, que \mathcal{E} est de densité κ) si l'on a $\sum_{p \in \mathcal{E}, p \leq y} p^{-1} = \kappa \log_2 y + O(1)$ pour $y \rightarrow +\infty$.

Proposition 4.1. *Soit $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}$ un ensemble d'entiers premiers de densité $\kappa \in [0, 1]$. Posons $q_y = \prod_{p \in \mathcal{E}, p \leq y} p$. On a $A(q_y) \ll q_y (\log_2 q_y)^{\min(\kappa, 1-\kappa)}$.*

Proposition 4.2. *Soit $n \geq 3$ un entier. Posons $q_y = \prod_{p \equiv -1[n], p \leq y} p$ et $q'_y = \prod_{p \not\equiv 1[n], p \leq y} p$. On a, pour $y \geq 3$,*

$$A(q_y) \asymp q_y (\log_2 q_y)^{1/\varphi(n)} \quad \text{et} \quad A(q'_y) \asymp q'_y (\log_2 q'_y)^{1/\varphi(n)}.$$

Lemme 4.3. *Soit $n \geq 3$ un entier.*

– Soient $p_1 < p_2 < \dots < p_k$ des entiers premiers congrus à -1 modulo n . Posons $q = p_1 p_2 \dots p_k$. On a pour tout $a \in \mathbb{Z}$

$$\tilde{s}_q(qa/n) = -\sigma(q) B_1(a/n).$$

– Soient $p_1 < p_2 < \dots < p_k$ des entiers premiers congrus à 1 modulo n . Posons $q = (\prod_{p \leq p_k} p) / (\prod_{i=1}^k p_i)$. On a

$$\tilde{s}_q(qa/n) = \pi^{-1} q \prod_{i=1}^k (1 - 1/p_i)^{-1} (\sin(2\pi a/n) + O(1/\log p_k))$$

pour tout $a \in \mathbb{Z}$, où la constante implicite ne dépend que de n .

Démonstration. Les deux parties se démontrent de façon similaire et symétrique.

– Puisque $p_i \equiv -1[n]$, on a $d \equiv \mu(d)[n]$ pour tout $d \mid q$, donc $d \frac{a}{n} \equiv \mu(d) \frac{a}{n} [1]$ pour tout $a \in \mathbb{Z}$. Par imparité et 1-périodicité de la fonction B_1 , on obtient, en partant de l'égalité du Lemme 2.1,

$$\tilde{s}_q\left(q \frac{a}{n}\right) = - \sum_{d \mid q} \mu(d) \frac{q}{d} B_1\left(d \frac{a}{n}\right) = - \sum_{d \mid q} \frac{q}{d} B_1\left(\frac{a}{n}\right) = -\sigma(q) B_1\left(\frac{a}{n}\right).$$

– De l'Éq. 4, on déduit que, pour tout $a \in \mathbb{Z}$,

$$\tilde{s}_q\left(q \frac{a}{n}\right) = q \sum_{\substack{(m,q)=1 \\ P(m) \leq p_k}} \frac{\sin(2\pi m \frac{a}{n})}{\pi m} + O\left(q \prod_{\substack{p \nmid q \\ p \leq p_k}} \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{-1} \frac{1}{\log p_k}\right).$$

Les nombres premiers p intervenant dans le produit sont exactement les p_i ; de même, les entiers m intervenant dans la somme sont des produits de ces p_i , donc vérifient $m \equiv 1 [n]$ et $m \frac{a}{n} \equiv \frac{a}{n} [1]$. On conclut grâce à la 1-périodicité de la fonction $x \mapsto \sin(2\pi x)$. \square

Démonstration de la Proposition 4.2. Si $q_y = \prod_{\substack{p \leq y \\ p \equiv -1 [n]}} p$, le Lemme 4.3 donne pour $a = 1$ la minoration

$$A(q_y) \gg q_y \prod_{\substack{p \equiv -1 [n] \\ p \leq y}} \left(1 + \frac{1}{p}\right) \asymp q_y \exp\left(\sum_{\substack{p \equiv -1 [n] \\ p \leq \log q_y}} \frac{1}{p}\right) \asymp q_y (\log_2 q_y)^{1/\varphi(n)},$$

où le Lemme 3.3 fournit la seconde estimation ; l'estimation de la somme harmonique est classique.³ La majoration est due au Théorème 3.2. Le cas $q_y = \prod_{p \neq 1 [n]}^{p \leq y} p$ se traite de façon similaire. \square

Remarque 5. Ces exemples fournissent l'optimalité de l'exposant $\min(\kappa, 1 - \kappa)$ dans la Proposition 4.1 pour des ensembles d'entiers premiers de densité $1/\varphi(n)$ et $1 - 1/\varphi(n)$ pour $n \geq 3$, par exemple $\kappa = 1/6, 1/4, 1/2, 3/4, 5/6, \dots$. Mais le Lemme 4.3 permet de choisir plus généralement des sous-ensembles de $\{p, p \equiv -1 [n]\}$ ou des sur-ensembles de $\{p, p \not\equiv 1 [n]\}$. Grâce au lemme suivant, on peut construire, pour tout $\kappa \in [0, 1]$, des ensembles d'entiers premiers de densité κ tels que $A(q_y) \asymp q_y (\log_2 q_y)^{\min(\kappa, 1-\kappa)}$.

Lemme 4.4. Soit $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}$ un ensemble d'entiers premiers de densité logarithmique forte $\kappa \in [0, 1]$. Pour tout $\kappa' \in]0, \kappa[$, il existe $\mathcal{E}' \subset \mathcal{E}$ un ensemble d'entiers premiers de densité logarithmique forte κ' .

Ce lemme se prouve en définissant récursivement

$$e'_0 := \min \mathcal{E}, \quad e'_{n+1} := \min \left\{ e \in \mathcal{E}, e > e'_n, \kappa' \log_2 e \geq \sum_{i \leq n} 1/e'_i \right\},$$

et en montrant que l'ensemble $\mathcal{E}' := \{e'_n; n \in \mathbb{N}\}$ possède effectivement la densité κ' voulue.

5. Questions ouvertes

Au cours de notre étude, nous sont apparues différentes questions auxquelles nous n'avons pu répondre.

- A-t-on $\liminf_q A(q)/q = 1/2$?
- A-t-on $A(q) \asymp q \min(\prod_{p \leq \log q}^{p \nmid q} (1 - \frac{1}{p})^{-1}, \prod_{p \leq \log q}^{p \mid q} (1 - \frac{1}{p})^{-1})$ uniformément pour $q > 1$?
- À l'inverse, existe-t-il pour tout $\kappa \in]0, 1[$ un ensemble de nombres premiers \mathcal{E} de densité logarithmique forte κ avec $A(q_y) \asymp q_y$?

Références

- [1] H. Davenport, On some infinite series involving arithmetical functions, Quart. J. Math. Oxford 8 (1937) 8–13.
- [2] R. de la Bretèche, G. Tenenbaum, Séries trigonométriques à coefficients arithmétiques, J. Anal. Math. 92 (2004) 1–79.
- [3] E. Landau, Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen, 3^e éd., Chelsea, New York, 1974.
- [4] P.J. McCarthy, Introduction to Arithmetic Functions, Springer-Verlag, New York, 1986.

³ Voir par exemple Landau [3, §111].