Available online at www.sciencedirect.com

SCIENCE DIRECT®

ELSEVIER

C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 341 (2005) 333–337

COMPTES RENDUS MATHEMATIQUE

http://france.elsevier.com/direct/CRASS1/

Problèmes mathématiques de la mécanique/Équations aux dérivées partielles

Sensibilité de l'équation de la chaleur aux sauts de conductivité

Olivier Pantz

Centre de mathématiques appliquées, École polytechnique, 91128 Palaiseau cedex, France

Reçu le 22 juin 2005 ; accepté le 2 juillet 2005

Disponible sur Internet le 26 août 2005

Présenté par Philippe G. Ciarlet

Résumé

Nous étudions la dérivabilité de la solution de l'équation de la chaleur par rapport à la conductivité lorsque celle ci est constante par morceaux. Nous montrons que les dérivées Lagrangienne et ponctuelle sont correctement définies et en donnons l'expression. Enfin, on propose une application au calcul de la dérivée d'une fonctionnelle dépendant de la solution de l'équation de la chaleur. A cette occasion, on propose une alternative à la démarche classique de dérivation rapide, permettant de déterminer l'expression correcte de la dérivée de forme en deux lignes seulement. ***Pour citer cet article : O. Pantz, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 341 (2005).***

Abstract

Sensitivity of the heat equation to jumps of conductivity. We investigate the differentiability of the solution of the heat equation with respect to the conductivity when this is piecewise continuous. We prove the existence of Lagrangian and punctual differentials and give their respective expressions. Finally, an application to the identification of a discontinuity is presented. Here, we propose an alternative method to the classical fast derivative method, which greatly simplifies the computations. ***To cite this article: O. Pantz, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 341 (2005).***

Abridged English version

Let Ω be a domain of $\mathbb{R}^2$ and Γ be a closed curve included in Ω. We assume that Γ splits Ω into to open subsets Ω_1 and Ω_2 such that $\partial\Omega_1 = \Gamma$. We consider the differentiability of the map $\Gamma \to u(\Gamma)$, where $u(\Gamma)$ is the solution of the heat equation $-\nabla \cdot (D\nabla u) = 0$, where the diffusion D is constant over Ω_1 and Ω_2, but discontinuous at the interface Γ. The main result is Theorem 2.1 which states that $u(\Gamma)$ admits both Lagrangian and punctual derivatives. This theorem is applied to the classical problem of coefficients identification, that is, to the

Adresse e-mail : olivier.pantz@polytechnique.org (O. Pantz).

1631-073X/$ – see front matter © 2005 Académie des sciences. Publié par Elsevier SAS. Tous droits réservés.
doi:10.1016/j.crma.2005.07.005

minimization problem of J given by (2). We prove that J is differentiable. Moreover, the expression of $\langle J'(\Gamma),\theta\rangle$, that is, the variation of J under variations of Γ along a field θ, can be very simply computed by a formal method. In a first step, we assume that D is regular. The introduction of the Lagrangian (5) leads to the expression (6) of the derivative of J when D is regular, is not valid if D is piecewise constant. Let us assume that there exists a field of orthonormal basis (n,τ), such that n is the normal to Γ, and $D\partial u/\partial n$ and $\partial u/\partial\tau$ are regular and convergent as D converges toward a piecewise constant function. Then, the correct expression (3) of the derivative of J is simply obtained passing to the limit in (7).

1. Position du problème

On considère un domaine Ω de $\mathbb{R}^2$. On suppose que le domaine Ω est composé de deux ouverts réguliers distincts Ω_1 et Ω_2, séparés par une interface Γ incluse dans Ω. On désigne par Ω_1 le domaine intérieur, c'est à dire tel que $\partial\Omega_1=\Gamma$. La partition du domaine est complètement déterminée par la position de l'interface Γ. On note $u(\Gamma)$ la solution du problème elliptique

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(D_i\nabla u)=f & \text{dans } \Omega_i, \quad (i=1,2),\\ u=0 & \text{sur } \Gamma_D,\\ D_2\partial u/\partial n=g & \text{sur } \Gamma_N \end{cases} \tag{1}$$

où $\partial\Omega=\Gamma_D\cup\Gamma_N$, g est un élément de $L^2(\Gamma_N)$ et D_i $(i=1,2)$ sont des constantes strictement positives. On s'intéresse aux variations de $u(\Gamma)$ en fonction de la position de l'interface Γ. A cet effet, on introduit un champ $\theta\in W^{1,\infty}(\Omega;\mathbb{R}^2)$ tel que $\theta=0$ sur $\partial\Omega$. La fonction e^θ est l'application de l'ouvert Ω dans lui-même définie par $e^\theta(x)=X(x,1)$ où la fonction $X:\Omega\times[0,+\infty]\to\Omega$ est solution de l'équation différentielle

$$X(x,0)=x,$$
$$\dot X(x,t)=\theta\big(X(x,t)\big).$$

A cause des discontinuités des coefficients de diffusion, la fonction $u(e^\theta(\Gamma))$ n'est pas dérivable au sens classique. On peut par contre introduire les notions de dérivée Lagrangienne et ponctuelle. On note

$$U(\theta):W^{1,\infty}(\mathbb{R}^2)\to V:=\big\{v\in H^1(\Omega):\ v=0 \text{ sur } \Gamma_D\big\}$$

la fonction définie par $U(\theta)(x)=u(e^\theta(\Gamma))(e^\theta(x))$. L'application U ainsi définie de $W^{1,\infty}(\mathbb{R}^2)$ à valeur dans $H^1(\Omega)$ est dérivable par rapport à θ. On appelle dérivée Lagrangienne de u la dérivée $\langle U'(0),\theta\rangle$ de U en 0 suivant la direction θ. La dérivée ponctuelle W de u est définie sur $\Omega_1\cup\Omega_2$ par $W=U'-\nabla u\cdot\theta$ appartient a priori à $L^2(\Omega)$. Néanmoins, si la frontière Γ est $C^{1,1}$, W est un élément de $H^1(\Omega_1\cup\Omega_2)$.

2. Résultat principal

Notation. Pour toute fonction ψ définie sur Ω, ψ_i désigne la restriction de ψ à Ω_i $(i=1,2)$ et $[\psi]=\psi_2-\psi_1$ le saut de ψ à l'interface.

Théorème 2.1. *La fonction $U:W^{1,\infty}(\mathbb{R}^2)\to V$ est dérivable, de plus si Γ est $C^{1,1}$, la dérivée $U'_\theta=\langle U'(0),\theta\rangle$ de U en* 0 *suivant dans la direction θ est solution du problème variationnel*

$$\int_\Omega D\nabla U'_\theta\cdot\nabla v\,\mathrm{d}x=[D]\int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial\tau}\frac{\partial v}{\partial\tau}(\theta\cdot n)\,\mathrm{d}s+\int_{\Omega_1\cup\Omega_2} D\nabla(\nabla u\cdot\theta)\cdot\nabla v\,\mathrm{d}x.$$

pour toute fonction-test $v \in V$. Ainsi, la dérivée ponctuelle $W = U' - \nabla u \cdot \theta$ est solution du problème aux limites

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(D\nabla W) = 0 & \text{dans } \Omega_1 \cup \Omega_2, \\ [W] = [D^{-1}]\left(D\dfrac{\partial u}{\partial n}\right)(\theta \cdot n) & \text{sur } \Gamma, \\ \left[D\dfrac{\partial W}{\partial n}\right] = -[D]\dfrac{\partial}{\partial \tau}\left(\dfrac{\partial u}{\partial \tau}(\theta \cdot n)\right) & \text{sur } \Gamma, \\ W = 0 & \text{sur } \Gamma_D, \\ \dfrac{\partial W}{\partial n} = 0 & \text{sur } \Gamma_N. \end{cases}$$

La différentiabilité de U par rapport à θ s'établit en exhibant le problème variationnel vérifié par U. Ce dernier s'obtient simplement en effectuant un changement de variable par l'application e^θ sur le problème variationnel vérifié par $u(e^\theta(\Gamma))$. Ainsi, $U(\theta)$ est solution d'un problème elliptique dont les coefficients sont des fonctions différentiables de θ appartenant à $W^{1,\infty}$ dans $L^\infty(\Omega)$. On en déduit que $U(\theta)$ est dérivable par rapport à θ et que

$$\int_\Omega D\nabla U'_\theta \cdot \nabla v \,\mathrm{d}x = \int_\Omega D\big(\nabla\theta + \nabla\theta^{\mathrm{T}} - (\nabla \cdot \theta)\,\mathrm{Id}\big)\nabla u \cdot \nabla v \,\mathrm{d}x.$$

Si Γ est régulière, les restrictions u_i de u à Ω_i $(i = 1, 2)$ appartiennent à $H^2(\Omega_i)$. Suite à un calcul fastidieux utilisant le fait que u est solution de (1), on peut simplifier le second membre du problème variationnel vérifié par U'_θ pour obtenir le résultat souhaité. Le problème aux limites vérifié par W s'en déduit aisément.

3. Application à l'identification d'une discontinuité

On cherche à déterminer la position de l'interface Γ par minimisation d'un critère de moindre carré. Soit

$$J(\Gamma) = \int_\omega \big|u(\Gamma) - u_0\big|^2 \,\mathrm{d}x, \tag{2}$$

où ω est un ouvert inclus dans Ω.

Corollaire 3.1. *La fonction J est dérivable par rapport aux variations de l'interface Γ. De plus, si Γ est $C^{1,1}$, on a*

$$\big\langle J'(\Gamma), \theta\big\rangle = [D]\int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial \tau}\frac{\partial p}{\partial \tau}(\theta \cdot n)\,\mathrm{d}s - [D^{-1}]\int_\Gamma D\frac{\partial u}{\partial n} D\frac{\partial p}{\partial n}(\theta \cdot n)\,\mathrm{d}s. \tag{3}$$

où l'état adjoint $p \in V$ est solution du problème variationnel

$$\int_\Omega D\nabla p \cdot \nabla q \,\mathrm{d}x = 2\int_\omega \big(u(\Gamma) - u_0\big) q \,\mathrm{d}x, \tag{4}$$

pour tout $q \in V$.

D'après le Théorème 2.1, la fonction J est dérivable par rapport aux variations de Γ. De plus, la dérivée de J suivant la direction θ est telle que

$$\big\langle J'(\Gamma), \theta\big\rangle = 2\int_\omega \big(u(\Gamma) - u_0\big)\big\langle u'(\Gamma), \theta\big\rangle \,\mathrm{d}x = 2\int_\omega \big(u(\Gamma) - u_0\big) W \,\mathrm{d}x = 2\int_\omega \big(u(\Gamma) - u_0\big)(U'_\theta - \nabla u \cdot \theta)\,\mathrm{d}x.$$

En utilisant la formulation variationnelle vérifiée par l'état adjoint p,

$$\langle J'(\Gamma),\theta\rangle = \int_\Omega D\nabla p\cdot\nabla U'_\theta\,\mathrm{d}x - 2\int_\omega \big(u(\Gamma)-u_0\big)\nabla u\cdot\theta\,\mathrm{d}x.$$

Enfin, d'après le Théorème 2.1, il vient

$$\langle J'(\Gamma),\theta\rangle = [D]\int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial\tau}\frac{\partial p}{\partial\tau}(\theta\cdot n)\,\mathrm{d}s + \int_{\Omega_1\cup\Omega_2} D\nabla(\nabla u\cdot\theta)\cdot\nabla p\,\mathrm{d}x - 2\int_\omega \big(u(\Gamma)-u_0\big)\nabla u\cdot\theta\,\mathrm{d}x.$$

En intégrant par partie le second terme de cette expression sur Ω_1 et Ω_2, on obtient

$$\langle J'(\Gamma),\theta\rangle = [D]\int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial\tau}\frac{\partial p}{\partial\tau}(\theta\cdot n)\,\mathrm{d}s + \int_\Gamma D\frac{\partial p}{\partial n}(\nabla u_1\cdot\theta - \nabla u_2\cdot\theta)\,\mathrm{d}s.$$

Enfin, de $[\partial u/\partial\tau]=0$ et $[D\partial u/\partial n]=0$, on en déduit (3).

Remarque 1. Lorsque Γ n'est pas régulière, la fonction J est tout de même différentiable. Cependant, l'expression donnée par le corollaire n'a plus de sens. Dans ce cas,

$$\langle J'(\Gamma),\theta\rangle = \int_\Omega D\big(\nabla\theta + \nabla\theta^{\mathrm{T}} - (\nabla\cdot\theta)\,\mathrm{Id}\big)\nabla u\cdot\nabla p\,\mathrm{d}x - 2\int_\omega (u-u_0)\nabla u\cdot\theta\,\mathrm{d}x.$$

4. Calcul formel

La méthode de dérivation rapide de Céa [3] peut être utilisée afin de calculer la dérivée de J. Cependant, il faut l'appliquer avec précaution. Par exemple, l'introduction du Lagrangien

$$\mathcal{L}_0(\Gamma,u,p) = \int_\omega |u-u_0|^2\,\mathrm{d}x - \int_\Omega D\nabla u\cdot\nabla p\,\mathrm{d}x + \int_\Gamma gp\,\mathrm{d}s \tag{5}$$

conduit à la bonne expression de l'état adjoint, mais à une valeur erronée de la dérivée de forme. En l'occurrence, si les deux termes de l'expression (3) y sont présents, le deuxième terme apparaît avec le signe opposé. Ceci provient du fait que $u(\Gamma)$ n'est pas dérivable. Afin de résoudre ce problème, il faut introduire un Lagrangien dépendant des restrictions u_1 et u_2 de u à Ω_1 et Ω_2. L'expression correcte du Lagrangien associée au problème de minimisation de J est

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(\Gamma,u_1,u_2,p_1,p_2) = {}& \int_{\Omega_1\cap\omega} |u_0-u_1|^2\,\mathrm{d}x + \int_{\Omega_2\cap\omega} |u_0-u_2|^2\,\mathrm{d}x \\ & - \int_{\Omega_1} D_1\nabla u_1\cdot\nabla p_1\,\mathrm{d}x - \int_{\Omega_2} D_2\nabla u_2\cdot\nabla p_2\,\mathrm{d}x + \int_{\Gamma_N} gp_2\,\mathrm{d}s \\ & - \frac{1}{2}\int_\Gamma \left(D_1\frac{\partial p_1}{\partial n} + D_2\frac{\partial p_2}{\partial n}\right)(u_2-u_1) + \left(D_1\frac{\partial u_1}{\partial n} + D_2\frac{\partial u_2}{\partial n}\right)(p_2-p_1)\,\mathrm{d}s,\end{aligned}$$

et permet de déterminer l'expression de J'. On propose une nouvelle approche formelle, à notre connaissance inédite. Elle consiste à supposer que le champ de diffusion D est régulier, puis à passer à la limite dans l'expression de J' lorsque D converge vers un champ discontinu. C'est une méthode très rapide qui s'applique dans de nombreuses situations (cette dernière permet également de déterminer l'expression correcte de la dérivée Lagrangien de $u(\Gamma)$). Supposons donc D régulier. L'expression (5) est alors valide. L'état adjoint est donné par (4) et

$$\langle J'(\Gamma), \theta\rangle = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla p (\nabla D \cdot \theta)\, \mathrm{d}x. \tag{6}$$

On rappelle que dans l'équation ci-dessus, u et p dépendent de D. De plus, on ne peut pas passer directement à la limite lorsque D converge vers un champ discontinu, car ∇u et ∇p ne sont pas réguliers. En revanche, il est raisonnable de supposer qu'il existe un champ (n, τ) de vecteurs orthonormaux, tels que n et τ soient des extensions de la normale et du vecteur tangent à l'interface Γ et tels que $D\partial u/\partial n$ et $\partial u/\partial \tau$ soient réguliers et convergent dans $H^1(\Omega)$. On a donc

$$\langle J'(\Gamma), \theta\rangle = \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial \tau}\frac{\partial p}{\partial \tau}(\nabla D \cdot \theta)\, \mathrm{d}x - \int_\Omega D\frac{\partial u}{\partial n} D\frac{\partial p}{\partial n}(\nabla D^{-1} \cdot \theta)\, \mathrm{d}x \tag{7}$$

et il suffit de passer à la limite lorsque D converge vers un champ continu par morceaux pour obtenir (3). Le raisonnement formel ainsi exposé permet donc de déterminer l'expression correcte de la dérivée de forme en deux lignes seulement. On peut aussi justifier une dérivation directe comme dans Bernardi et al. [1,2]. Cependant, dans cet article, une hypothèse, non vérifiée, de continuité de $D\partial W/\partial n$ à l'interface est effectuée. Ainsi, il manque un terme dans l'expression finale de la dérivée de J.

Remerciement

L'auteur tient à remercier le GdR Momas pour son soutient, G. Allaire et F. Jouve qui ont eu la gentillesse de relire attentivement cette note et m'ont permis de corriger certaines imprécisions, ainsi que O. Pironneau pour les discussions enrichissantes que nous avons eu sur le sujet.

Références

[1] C. Bernardi, O. Pironneau, Sensitivity of Darcy's law to discontinuities, Chinese Ann. Math. Ser. B 24 (2) (2003) 205–214.
[2] C. Bernardi, O. Pironneau, Derivation with respect to discontinuities in the porosity, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 335 (2002) 661–666.
[3] J. Cea, Conception optimale ou identification de forme, calcul rapide de la dérivée directionnelle de la fonction coût, Math. Model. Numer. Anal. 20 (3) (1986) 371–402.

Further reading

[1] G. Allaire, Shape Optimization by the Homogenization Method, Appl. Math. Sci., vol. 146, Springer-Verlag, New York, 2002.
[2] G. Allaire, O. Pantz, D. Silva, Sur un problème inverse de détermination de coefficients de diffusion CMAP, Ecole Polytechique, RI 560, 2004.
[3] F. Murat, J. Simon, Etudes de problèmes d'optimal design, in: Lecture Notes in Comput. Sci., vol. 41, Springer-Verlag, Berlin, 1976, pp. 54–62.