Available online at www.sciencedirect.com
SCIENCE DIRECT®
ELSEVIER
C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 341 (2005) 179–184
COMPTES RENDUS MATHEMATIQUE
http://france.elsevier.com/direct/CRASS1/

Probabilités/Théorie du potentiel

Les équations de la chaleur et de Poisson pour le laplacien généralisé de Jacobi–Dunkl

Frej Chouchene [a], Léonard Gallardo [b], Maher Mili [a]

[a] *Département de mathématiques, faculté des sciences de Monastir, 5019 Monastir, Tunisie*
[b] *Laboratoire de mathématiques et physique théorique CNRS-UMR 6083, université de Tours, campus de Grandmont, 37200 Tours, France*

Reçu le 1er mars 2005 ; accepté après révision le 20 juin 2005

Présenté par Marc Yor

Résumé

Nous montrons que l'équation de la chaleur associée à l'opérateur de Jacobi–Dunkl, a une solution qui s'exprime à l'aide d'un semi-groupe d'opérateurs markoviens à noyau strictement positif. Nous utilisons ce résultat pour résoudre l'équation de Poisson et introduire une nouvelle classe de processus de Markov sur la droite. ***Pour citer cet article : F. Chouchene et al., C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 341 (2005).***

Abstract

The heat and Poisson equations for the Jacobi–Dunkl generalized Laplacian. We show that the heat equation for the Jacobi–Dunkl operator, has a solution in terms of a semigroup of Markovian operators with strictly positive kernel. This result is used to solve the Poisson equation and to introduce a new class of Markov processes on the real line. ***To cite this article: F. Chouchene et al., C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 341 (2005).***

Abridged English version

A complete spectral analysis of the Jacobi–Dunkl operator defined for $\alpha \geqslant \beta \geqslant -\frac{1}{2}$, $\alpha \neq -\frac{1}{2}$ by

$$\Lambda_{\alpha,\beta} f(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x) + \big[(2\alpha+1)\coth x + (2\beta+1)\tanh x\big]\frac{f(x)-f(-x)}{2} \quad \big(f \in C^1(\mathbb{R})\big), \tag{1}$$

has been performed in [2,3]. The eigenfunction $\psi_\lambda^{(\alpha,\beta)}(x)$ of $\Lambda_{\alpha,\beta}$ corresponding to the eigenvalue $-\mathrm{i}\lambda$ ($\lambda \in \mathbb{C}$) and normalized by $\psi_\lambda^{(\alpha,\beta)}(0) = 1$, is the kernel of a generalized Fourier transform defined by

Adresses e-mail : frej.chouchene@fsm.rnu.tn (F. Chouchene), gallardo@univ-tours.fr (L. Gallardo), maher.mili@fsm.rnu.tn (M. Mili).

1631-073X/$ – see front matter
doi:10.1016/j.crma.2005.06.016

$$\forall\lambda \in \mathbb{C},\quad \mathcal{F}f(\lambda) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\psi_\lambda^{(\alpha,\beta)}(x)A_{\alpha,\beta}(x)\,\mathrm{d}x \quad \bigl(f \in L^1_{\alpha,\beta}(\mathbb{R})\bigr), \tag{2}$$

where $A_{\alpha,\beta}(x) = 2^{2\rho}(\sinh^2 x)^{\alpha+1/2}(\cosh^2 x)^{\beta+1/2}$, $\rho = \alpha+\beta+1$ and $L^p_{\alpha,\beta}(\mathbb{R}) = L^p(\mathbb{R}, A_{\alpha,\beta}(x)\,\mathrm{d}x)$. This Fourier transform is in particular a topological isomorphism between the weighted Schwartz space $S^1(\mathbb{R}) = (\cosh x)^{-2\rho}\cdot S(\mathbb{R})$ and the Schwartz space $S(\mathbb{R})$ and it also extends to an isometric isomorphism from $L^2_{\alpha,\beta}(\mathbb{R})$ onto $L^2(\mathbb{R}, \mathrm{d}\sigma)$, where $\mathrm{d}\sigma$ is the generalized Plancherel measure defined in formula (9).

Moreover if $f \in L^1_{\alpha,\beta}(\mathbb{R})$ and $\mathcal{F}f \in L^1(\mathbb{R}, \mathrm{d}\sigma)$ then $f(x) = \int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}f(\lambda)\psi_{-\lambda}^{(\alpha,\beta)}(x)\,\mathrm{d}\sigma(\lambda)$, a.e. $x \in \mathbb{R}$.

In this Note we study the square $\Lambda^2_{\alpha,\beta}$ of the Jacobi–Dunkl operator which we call generalized Jacobi–Dunkl Laplacian. Our main result is the following:

Theorem 0.1. *The closure of $\Lambda^2_{\alpha,\beta}$ on $C_0(\mathbb{R})$ generates a positive continuous contraction semigroup $\{H_t^{(\alpha,\beta)}, t \geqslant 0\}$ of the form $H_t^{(\alpha,\beta)}f(x) = \int_{\mathbb{R}} h_t^{(\alpha,\beta)}(x,y)f(y)A_{\alpha,\beta}(y)\,\mathrm{d}y$, with a strictly positive kernel*

$$h_t^{(\alpha,\beta)}(x,y) = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-t\lambda^2}\psi_\lambda^{(\alpha,\beta)}(x)\psi_{-\lambda}^{(\alpha,\beta)}(y)\,\mathrm{d}\sigma(\lambda), \quad x,y \in \mathbb{R},\ t > 0.$$

Moreover the operators $H_t^{(\alpha,\beta)}$ also act on $C_b(\mathbb{R})$, are Markovian (i.e. $H_t^{(\alpha,\beta)}\mathbf{1} = \mathbf{1}$), and for all $f \in C_b(\mathbb{R})$, the function $u(t,x) = H_t^{(\alpha,\beta)}f(x) \in C^2(]0,T[\times\mathbb{R}) \cap C([0,T]\times\mathbb{R})$ solves the 'heat equation':

$$\left(\Lambda^2_{\alpha,\beta} - \frac{\partial}{\partial t}\right)u = 0, \quad u(0,\cdot) = f. \tag{3}$$

We can now derive the solution of the Poisson equation:

Theorem 0.2. *Let $f \in L^1_{\alpha,\beta}(\mathbb{R})$ such that $\mathcal{F}f \in L^1(\mathbb{R}, \mathrm{d}\sigma)$. The function*

$$Gf(x) = \int_0^{+\infty}\int_{\mathbb{R}} h_t^{(\alpha,\beta)}(x,y)f(y)A_{\alpha,\beta}(y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}t$$

is bounded, belongs to $C^2(\mathbb{R})$ and satisfies the Poisson equation $\Lambda^2_{\alpha,\beta}Gf = -f$. Moreover every bounded solution in $C^2(\mathbb{R})$ of this equation is of the form $u = Gf + C$ where C is a constant.

To prove the last assertion of Theorem 0.2 we need the following Liouville's property:

Theorem 0.3. *Let u be a bounded C^2 function on $\mathbb{R}$ such that $\Lambda^2_{\alpha,\beta}u = 0$. Then u is constant.*

Application. We can associate to the heat semigroup $(H_t^{(\alpha,\beta)})_{t\geqslant 0}$, defined in Theorem 0.1, the transition kernels $P_t^{(\alpha,\beta)}(x,\mathrm{d}y) = h_t^{(\alpha,\beta)}(x,y)A_{\alpha,\beta}(y)\,\mathrm{d}y$ $(t > 0)$ which are probability measures on the Borel σ-field $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$, for every $x \in \mathbb{R}$ and $t > 0$. Now we will say that a Markov process $X = (X_t)_{t\geqslant 0}$ with such transition kernels (defined on some filtered probability space $(\Omega, \mathbb{F}, (\mathbb{F}_t)_{t\geqslant 0}, \mathbb{P})$) is a Jacobi–Dunkl process (of index (α,β)). Some immediate properties of the Jacobi–Dunkl processes follow from the structure of the semigroup $(H_t^{(\alpha,\beta)})_{t\geqslant 0}$. For example, $(H_t^{(\alpha,\beta)})_{t\geqslant 0}$ being a Feller-semigroup, Jacobi–Dunkl processes always have a version with cádlàg trajectories. An interesting fact is:

Proposition 0.4. *The absolute value $(|X_t|)_{t\geqslant 0}$ of X, is a diffusion process on $\mathbb{R}_+$ with infinitesimal generator the Jacobi operator $\Delta_{\alpha,\beta} = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + [(2\alpha+1)\coth x + (2\beta+1)\tanh x]\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$.*

As a last remark, note that $(|X_t|)_{t\geqslant 0}$ being a continuous process, this immediately implies that if the Jacobi–Dunkl process has a jump at time s, necessarily $X_s = -X_{s^-}$.

1. Généralités sur l'opérateur de Jacobi–Dunkl

Pour $\alpha \geqslant \beta \geqslant -\frac{1}{2}$, $\alpha \neq -\frac{1}{2}$, l'opérateur différentiel et aux différences sur $\mathbb{R}$, donné par

$$\Lambda_{\alpha,\beta} f(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x) + \big[(2\alpha+1)\coth x + (2\beta+1)\tanh x\big]\frac{f(x)-f(-x)}{2}, \tag{4}$$

est appelé opérateur de Jacobi–Dunkl. C'est l'analogue hyperbolique de l'opérateur de Dunkl [9] :

$$Tf(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x) + \frac{2\alpha+1}{x}\,\frac{f(x)-f(-x)}{2}, \tag{5}$$

puisque les deux opérateurs sont de la forme $\Lambda f(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x) + \frac{A'(x)}{A(x)}\frac{f(x)-f(-x)}{2}$, avec $A(x) = (\sinh^2 x)^{\alpha+1/2} \times (\cosh^2 x)^{\beta+1/2}$ pour (4) et $A(x) = (x^2)^{\alpha+1/2}$ pour (5). Ces opérateurs sont bien définis pour $f \in C^1(\mathbb{R})$, car la singularité de $\frac{A'(x)}{A(x)}$ est de la forme $\frac{2\alpha+1}{x}$ en $x=0$. Dans la suite, on aura besoin de multiplier A par une constante pour des raisons de normalisations dans l'étude spectrale et on notera

$$A_{\alpha,\beta}(x) = |x|^{2\alpha+1}B(x), \qquad \text{où } B(x) = 2^{2\rho}\left(\frac{\sinh x}{x}\right)^{2\alpha+1}(\cosh x)^{2\beta+1} \text{ et } \rho = \alpha+\beta+1. \tag{6}$$

Une étude spectrale complète de l'opérateur de Jacobi–Dunkl a été réalisée dans les articles [2,3]. La fonction propre $\psi_\lambda^{(\alpha,\beta)}$ de $\Lambda_{\alpha,\beta}$ correspondant à la valeur propre $-\mathrm{i}\lambda$ ($\lambda \in \mathbb{C}$) et normalisée par $\psi_\lambda^{(\alpha,\beta)}(0) = 1$, vérifie la propriété suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \exists C_n > 0, \quad \left|\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\psi_\lambda^{(\alpha,\beta)}(x)\right| \leqslant C_n\big(1+|x|\big)\frac{(1+\rho+|\lambda|)^{n+2}}{|\lambda|} \quad \big(\forall x \in \mathbb{R},\ \forall \lambda \in \mathbb{R}\setminus\{0\}\big). \tag{7}$$

De plus la fonction $\psi_\lambda^{(\alpha,\beta)}$ est le noyau d'une transformation de Fourier généralisée définie par

$$\forall \lambda \in \mathbb{C}, \quad \mathcal{F}f(\lambda) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\psi_\lambda^{(\alpha,\beta)}(x)A_{\alpha,\beta}(x)\,\mathrm{d}x \quad \big(f \in L^1_{\alpha,\beta}(\mathbb{R})\big), \tag{8}$$

où $L^p_{\alpha,\beta}(\mathbb{R}) = L^p(\mathbb{R}, A_{\alpha,\beta}(x)\,\mathrm{d}x)$. Cette transformation de Fourier est un isomorphisme topologique entre l'espace de Schwartz à poids $S^1(\mathbb{R}) = (\cosh x)^{-2\rho}\cdot S(\mathbb{R})$ et l'espace de Schwartz $S(\mathbb{R})$. Elle se prolonge en une isométrie de $L^2_{\alpha,\beta}(\mathbb{R})$ sur $L^2(\mathbb{R}, d\sigma)$, où $d\sigma$ est la mesure de Plancherel généralisée donnée par

$$d\sigma(\lambda) = \frac{1}{8\pi}\left(\frac{2^{\rho-\mathrm{i}\mu}\Gamma(\alpha+1)\mu^2\Gamma(\mathrm{i}\mu)}{\Gamma[(\rho+\mathrm{i}\mu)/2]\Gamma[(\alpha-\beta+1+\mathrm{i}\mu)/2]}\right)^{-2}|\lambda|\mathbf{1}_{\mathbb{R}\setminus]-\rho,\rho[}(\lambda)\,\mathrm{d}\lambda, \tag{9}$$

où on a posé $\mu = \sqrt{\lambda^2-\rho^2}$ pour simplifier l'écriture. De plus si $f \in L^1_{\alpha,\beta}(\mathbb{R})$ et $\mathcal{F}f \in L^1(\mathbb{R}, d\sigma)$ alors on a la formule d'inversion

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}f(\lambda)\psi_{-\lambda}^{(\alpha,\beta)}(x)\,\mathrm{d}\sigma(\lambda), \quad \text{p.p. } x \in \mathbb{R}. \tag{10}$$

2. Le semi-groupe de la chaleur

Dans cette Note on étudie le carré $\Lambda^2_{\alpha,\beta}$ de l'opérateur de Jacobi–Dunkl, qu'on appelle laplacien généralisé de Jacobi–Dunkl. Il est donné explicitement par :

$$\Lambda^2_{\alpha,\beta} f(x) = \Delta_{\alpha,\beta} f(x) + \big[2\rho - (2\alpha+1)\coth^2 x - (2\beta+1)\tanh^2 x\big]\frac{f(x)-f(-x)}{2} \quad \big(f \in C^2(\mathbb{R})\big), \tag{11}$$

où $\Delta_{\alpha,\beta}=\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}+[(2\alpha+1)\coth x+(2\beta+1)\tanh x]\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ est l'opérateur de Jacobi. Dans le cas de Dunkl, le carré de l'opérateur T donné en (5), a été étudié dans [11]. Notre résultat principal est le suivant :

Théorème 2.1. *L'extension de $\Lambda^2_{\alpha,\beta}$ à $(C_0(\mathbb{R}),\|\cdot\|_\infty)$ est le générateur d'un semi-groupe de contractions $(H_t^{(\alpha,\beta)})_{t\geqslant 0}$, positif, fortement continu de la forme $H_t^{(\alpha,\beta)}f(x)=\int_{\mathbb{R}}h_t^{(\alpha,\beta)}(x,y)f(y)A_{\alpha,\beta}(y)\,\mathrm{d}y$, avec un noyau (appelé noyau de la chaleur de Jacobi–Dunkl)*

$$h_t^{(\alpha,\beta)}(x,y)=\int_{\mathbb{R}}\mathrm{e}^{-t\lambda^2}\psi_\lambda^{(\alpha,\beta)}(x)\psi_{-\lambda}^{(\alpha,\beta)}(y)\,\mathrm{d}\sigma(\lambda)\geqslant 0\quad(\forall x,y\in\mathbb{R},\ t>0),\tag{12}$$

qui satisfait les propriétés de symétrie suivantes :

$$\forall t>0,\ \forall x,y\in\mathbb{R},\quad h_t^{(\alpha,\beta)}(x,y)=h_t^{(\alpha,\beta)}(y,x)=h_t^{(\alpha,\beta)}(-x,-y).\tag{13}$$

De plus les opérateurs $H_t^{(\alpha,\beta)}$ agissent aussi sur $C_b(\mathbb{R})$, sont markoviens (i.e. $H_t^{(\alpha,\beta)}\mathbf{1}=\mathbf{1}$), et pour toute $f\in C_b(\mathbb{R})$, la fonction $u(t,x)=H_t^{(\alpha,\beta)}f(x)\in C^2(]0,T[\times\mathbb{R})\cap C([0,T]\times\mathbb{R})$ est solution de l'équation de la chaleur de Jacobi–Dunkl :

$$\left(\Lambda^2_{\alpha,\beta}-\frac{\partial}{\partial t}\right)u=0,\quad u(0,\cdot)=f.\tag{14}$$

Démonstration. Il est clair que le semi-groupe est bien défini sur $S^1(\mathbb{R})$ qui est dense dans $C_0(\mathbb{R},\|\cdot\|_\infty)$. L'opérateur $\Lambda^2_{\alpha,\beta}$ est dispersif dans le sens où : si $f\in S^1(\mathbb{R})$ est telle que $\max\{f(x)\colon x\in\mathbb{R}\}=f(x_0)$ alors $\Lambda^2_{\alpha,\beta}f(x_0)\leqslant 0$. De plus, on montre que pour tout $\lambda>0$, $(\lambda I-\Lambda^2_{\alpha,\beta})S^1(\mathbb{R})=S^1(\mathbb{R})$. La première partie du théorème découle alors du théorème de Phillips [1] qui caractérise les générateurs des semi-groupes de contractions positives. D'après les estimations de $\psi_\lambda^{(\alpha,\beta)}$ (7), on peut dériver $u(t,x)$ sous le signe intégral et (14) découle aussitôt. □

Corollaire 2.2. *Le noyau de la chaleur $h_t^{(\alpha,\beta)}(x,y)$ ($t>0$) est strictement positif sur $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$.*

Démonstration. D'après la propriété de semi-groupe,

$$\forall t>0,\ x,y\in\mathbb{R},\quad h_t^{(\alpha,\beta)}(x,y)=\int_{\mathbb{R}}h_{t/2}^{(\alpha,\beta)}(x,r)h_{t/2}^{(\alpha,\beta)}(r,y)A_{\alpha,\beta}(r)\,\mathrm{d}r,$$

s'il existe $\gamma\geqslant 0$ et $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ tels que $h_\gamma^{(\alpha,\beta)}(x,y)=0$, la fonction $r\mapsto h_{\gamma/2}^{(\alpha,\beta)}(x,r)h_{\gamma/2}^{(\alpha,\beta)}(r,y)$ est égale à 0 sur $\mathbb{R}$. Ceci est impossible car la fonction $x\mapsto h_t^{(\alpha,\beta)}(0,x)$ est strictement positive. En effet, si $E_\alpha(t,x,y)=(\frac{1}{2t})^{\alpha+1}\exp(-\frac{x^2+y^2}{4t})I_\alpha(\frac{xy}{2t})/(\frac{xy}{2t})^\alpha$ désigne le noyau de Bessel (voir [4]), qu'on prolonge sur $\mathbb{R}$, on peut montrer qu'il existe $\mu\in\mathbb{R}_+$ tel que pour toute fonction $f\in\mathcal{D}(\mathbb{R})$ positive, paire, la fonction $w_\mu(t,x)=\mathrm{e}^{\mu t}\sqrt{B(x)}H_t^{(\alpha,\beta)}(\frac{f}{\sqrt{B}})(x)-\int_{\mathbb{R}}E_\alpha(t,x,y)f(y)|y|^{2\alpha+1}\,\mathrm{d}y$ vérifie l'inéquation

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}w_\mu(t,x)+\frac{2\alpha+1}{x}\frac{\partial}{\partial x}w_\mu(t,x)-\frac{\partial}{\partial t}w_\mu(t,x)\leqslant 0.$$

Alors, le principe du maximum ([5], p. 43), montre que $w_\mu\geqslant 0$. En appliquant ce résultat à $f(x)=g(x)+g(-x)$ pour toute fonction $g\in\mathcal{D}(\mathbb{R})$, positive, on obtient

$$\mathrm{e}^{\mu t}\sqrt{B(x)B(y)}\big(h_t^{(\alpha,\beta)}(x,y)+h_t^{(\alpha,\beta)}(x,-y)\big)\geqslant E_\alpha(t,x,y)+E_\alpha(t,x,-y).$$

En prenant $y=0$, on obtient immédiatement $h_t^{(\alpha,\beta)}(x,0)>0$. □

Exemple 1. Dans le cas $\alpha = \frac{1}{2}$ et $\beta = -\frac{1}{2}$, le noyau de la chaleur s'écrit sous la forme

$$h_t^{(\frac{1}{2},-\frac{1}{2})}(x,y) = \frac{\mathrm{e}^{-t}}{16\sqrt{\pi t}} \frac{1}{\sinh^2 x \sinh^2 y} \int_{x-y}^{x+y} \sinh v \big[\mathrm{e}^{-(x-y)^2/(4t)} - \mathrm{e}^{-v^2/(4t)}\big] \, \mathrm{d}v, \tag{15}$$

où il est sous entendu que cette expression est définie par continuité si $x = 0$ ou $y = 0$.

Si $0 \leqslant x - y < x + y$ ou si $0 \leqslant x + y < x - y$, il est clair que $h_t^{(\frac{1}{2},-\frac{1}{2})}(x,y) > 0$. On vérifie alors en utilisant la propriété de symétrie (13) que $h_t^{(\frac{1}{2},-\frac{1}{2})}$ est strictement positif sur $\mathbb{R}^2$.

Proposition 2.3. $(H_t^{(\alpha,\beta)})_{t\geqslant 0}$ *se prolonge en un semi-groupe* $(\overline{H}_t^{(\alpha,\beta)})_{t\geqslant 0}$ *de contractions, positif, fortement continu sur* $L^2_{\alpha,\beta}(\mathbb{R})$ *dont le générateur est la fermeture autoadjointe* $\overline{\Lambda^2_{\alpha,\beta}}$ *de* $\Lambda^2_{\alpha,\beta}$ *sur* $L^2_{\alpha,\beta}(\mathbb{R})$ *et dont l'action est donnée par.*

$$\overline{H}_t^{(\alpha,\beta)} f(x) = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-t\lambda^2} \mathcal{F} f(\lambda) \psi_{-\lambda}^{(\alpha,\beta)}(x) \, \mathrm{d}\sigma(\lambda). \tag{16}$$

Démonstration. Ceci découle du théorème de Plancherel et de la densité de $S^1(\mathbb{R})$ dans $L^2_{\alpha,\beta}(\mathbb{R})$. □

3. L'équation de Poisson

Théorème 3.1 (Propriété de Liouville). *Soit* u *une fonction de classe* C^2*, bornée sur* $\mathbb{R}$ *et telle que* $\Lambda^2_{\alpha,\beta} u = 0$*. Alors* u *est constante.*

Démonstration. On décompose $u = u_e + u_o$ où u_e (resp. u_o) est la partie paire (resp. impaire) de u. Le résultat de [6] montre que u_e est constante. De plus, on montre qu'il existe une constante C telle que $u_o(x) = C(\int_0^x A_{\alpha,\beta}(t)\,\mathrm{d}t)/A_{\alpha,\beta}(x)$. Mais la continuité de u_o'' en $x = 0$ impose $C = 0$. □

Théorème 3.2. *Soit* $f \in L^1_{\alpha,\beta}(\mathbb{R})$ *telle que* $\mathcal{F} f \in L^1(\mathbb{R}, \mathrm{d}\sigma)$*. La fonction*

$$Gf(x) = \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} h_t^{(\alpha,\beta)}(x,y) f(y) A_{\alpha,\beta}(y) \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}t$$

est bornée, de classe C^2 *sur* $\mathbb{R}$ *et satisfait l'équation de Poisson* $\Lambda^2_{\alpha,\beta} Gf = -f$*. De plus, toute solution bornée et de classe* C^2 *de cette équation est de la forme* $u = Gf + C$ *où* C *est une constante.*

Démonstration. Par le théorème de Fubini et la formule d'inversion on a

$$Gf(x) = \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-t\lambda^2} \psi_\lambda^{(\alpha,\beta)}(x) \mathcal{F} f(-\lambda) \, \mathrm{d}\sigma(\lambda) \, \mathrm{d}t.$$

D'où on déduit que $|Gf(x)| \leqslant \int_{\mathbb{R}} \frac{|\mathcal{F} f(-\lambda)|}{\lambda^2} \mathrm{d}\sigma(\lambda) < +\infty$ puis que $Gf(x) = \int_{\mathbb{R}} \frac{\mathcal{F} f(-\lambda)}{\lambda^2} \psi_\lambda^{(\alpha,\beta)}(x) \, \mathrm{d}\sigma(\lambda)$. On montre alors facilement qu'on peut permuter le signe intégral et l'opérateur $\Lambda^2_{\alpha,\beta}$, ce qui donne $\Lambda^2_{\alpha,\beta} Gf = -f$ en utilisant $\Lambda^2_{\alpha,\beta} \psi_\lambda^{(\alpha,\beta)} = -\lambda^2 \psi_\lambda^{(\alpha,\beta)}$ et la formule d'inversion. Toute autre solution bornée et de classe C^2, est de la forme $Gf + C$, d'après la propriété de Liouville. □

4. Le processus de Jacobi–Dunkl sur $\mathbb{R}$

Etant donné le semi-groupe $(H_t^{(\alpha,\beta)})_{t\geqslant 0}$ défini dans le Théorème 2.1, on peut lui associer les noyaux de transition $P_t^{(\alpha,\beta)}(x,dy) = h_t^{(\alpha,\beta)}(x,y)A_{\alpha,\beta}(y)\,\mathrm{d}y$ $(t>0)$ qui sont des mesures de probabilité sur la tribu de Borel $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$, pour tout $x\in\mathbb{R}$ et $t>0$. On dit qu'un processus de Markov $X=(X_t)_{t\geqslant 0}$ avec de tels noyaux de transition est un processus de Jacobi–Dunkl (d'indice (α,β)) sur $\mathbb{R}$. Des propriétés immédiates de ce processus proviennent de la structure du semi-groupe $(H_t^{(\alpha,\beta)})_{t\geqslant 0}$. Par exemple, ces processus ont toujours une version à trajectoires cádlàg car le semi-groupe $(H_t^{(\alpha,\beta)})_{t\geqslant 0}$ est de Feller. Pour une étude analogue dans le cas des processus de Dunkl voir [7]. Pour terminer, on mentionne le résultat suivant :

Proposition 4.1. *La valeur absolue $(|X_t|)_{t\geqslant 0}$ de X, est un processus de diffusion sur $\mathbb{R}_+$ dont le générateur infinitésimal est l'opérateur de Jacobi* $\Delta_{\alpha,\beta} = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + [(2\alpha+1)\coth x + (2\beta+1)\tanh x]\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$.

Cette diffusion a été étudiée dans [8], voir aussi [10]. Par exemple, en utilisant (15), on vérifie que

$$h_t^{(\frac{1}{2},-\frac{1}{2})}(x,y)A_{\frac{1}{2},-\frac{1}{2}}(y) + h_t^{(\frac{1}{2},-\frac{1}{2})}(x,-y)A_{\frac{1}{2},-\frac{1}{2}}(-y) = \frac{\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{\pi t}}\frac{\sinh y}{\sinh x}\sinh\left(\frac{xy}{2t}\right)\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)/(4t)}, \tag{17}$$

sont bien les densités de transition du processus de Jacobi d'indice $(\frac{1}{2},-\frac{1}{2})$ appelé également processus de Bessel hyperbolique de dimension 3 dont le générateur infinitésimal est

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + 2\coth x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}.$$

(En général, ce générateur est multiplié par le facteur $\frac{1}{2}$ et dans (17) t est remplacé par $\frac{t}{2}$.) Enfin, on remarque que $(|X_t|)_{t\geqslant 0}$ étant un processus continu, ceci implique immédiatement que si le processus de Jacobi–Dunkl saute à l'instant s, alors nécessairement $X_s = -X_{s^-}$.

Une étude détaillée des processus de Jacobi–Dunkl sera publiée prochainement.

Références

[1] W. Arendt, Characterization of positive semi-groups on Banach lattices, in: R. Nagel (Ed.), One-Parameter Semigroups of Positive Operators, in: Lecture Notes in Math., vol. 1184, Springer-Verlag, Berlin, 1986, pp. 247–291.
[2] F. Chouchane, M. Mili, K. Trimèche, Positivity of the intertwining operator and harmonic analysis associated with the Jacobi–Dunkl operator on $\mathbb{R}$, Anal. Appl. 1 (4) (2003) 387–412.
[3] F. Chouchane, M. Mili, K. Trimèche, An L^p version of Hardy's theorem for the Jacobi–Dunkl transform, J. Integral Transforms and Special Functions 15 (3) (2004) 225–237.
[4] A. Fitouhi, Heat polynomials for a singular differential operator on $(0,\infty)$, J. Constr. Approx. 5 (1989) 241–270.
[5] A. Freedman, Partial Differential Equations of Parabolic Type, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1964.
[6] L. Gallardo, K. Trimèche, L'équation de Poisson et les noyaux de Green associés à un opérateur différentiel singulier sur $\mathbb{R}$, C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. I 324 (3) (1997) 259–264.
[7] L. Gallardo, M. Yor, Some remarkable properties of the Dunkl martingales, Sem. Probab. XXXIX, in hommage to P.A. Meyer; Springer, 2005, in press.
[8] J.C. Gruet, Windings of hyperbolic Brownian motion, in: Exponential Functionals and Principal Values Related to Brownian Motion, in: Bibl. Rev. Math. Iberoamericana, Rev. Math. Iberoamericana, Madrid, 1997, pp. 35–72.
[9] M.A. Mourou, K. Trimèche, Transmutation operators and Paley–Wiener theorem associated with a differential-difference operator on the real line, Anal. Appl. (Singap.) 1 (1) (2003) 43–70.
[10] D. Revuz, M. Yor, Continuous Martingales and Brownian Motion, third ed., second printing, Springer, 2001.
[11] M. Rösler, Generalized Hermite polynomials and the heat equation for Dunkl operators, Commun. Math. Phys. 192 (1998) 519–542.