Available online at www.sciencedirect.com

SCIENCE DIRECT®

C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 341 (2005) 103–106

COMPTES RENDUS MATHEMATIQUE

http://france.elsevier.com/direct/CRASS1/

Géométrie algébrique

Le théorème d'irréductibilité de Kolchin

Johannes Nicaise [a], Julien Sebag [b]

[a] *KU Leuven, Dept. de Mathématiques, Celestijnenlaan 200B, 3001 Leuven, Belgique*
[b] *Université Bordeaux I, institut mathématique de Bordeaux, laboratoire A2X, 351, cours de la Libération, 33405 Talence, France*

Reçu le 21 décembre 2004 ; accepté après révision le 17 mai 2005

Disponible sur Internet le 28 juin 2005

Présenté par Laurent Lafforgue

Résumé

Nous présentons une preuve géométrique du théorème de Kolchin qui utilise l'existence de résolutions des singularités en caractéristique nulle. Nous montrons également les limites de cette technique en caractéristique positive en donnant un contre-exemple. ***Pour citer cet article : J. Nicaise, J. Sebag, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 341 (2005).***

Abstract

Kolchin's irreducibility theorem. In this Note, we give a geometric proof of Kolchin's Theorem, using resolution of singularities. We give a counter-example in positive characteristic. ***To cite this article: J. Nicaise, J. Sebag, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 341 (2005).***

1. Introduction

Depuis une dizaine d'années, le schéma des arcs tracés sur une variété (algébrique) X, que l'on définit comme la limite des espaces de jets sur X (ou comme l'espace des jets de longueur infinie de X), est présent dans un grand nombre d'articles et est au cœur d'un grand nombre de questions profondes (problème de Nash, conjecture de la monodromie ...). Pourtant peu de résultats concernent l'espace des arcs lui-même ou étudient, de manière intrinsèque, les propriétés de permanence de cette construction fonctorielle. L'une des seules réponses positives à ce type de questions est le « théorème d'irréductibilité » de Kolchin. Originellement, ce théorème est un énoncé d'algèbre différentielle. Dans cette Note, nous donnons une preuve (strictement) géométrique d'une traduction, en termes de schémas des arcs, du théorème d'irréductibilité de Kolchin et un contre-exemple à cet énoncé en caractéristique $p > 0$.

Nous nous intéressons également à la question de la décomposition en composantes irréductibles « des » sché-

Adresses e-mail : johannes.nicaise@wis.kuleuven.ac.be (J. Nicaise), julien.sebag@math.u-bordeaux1.fr (J. Sebag).

1631-073X/$ – see front matter
doi:10.1016/j.crma.2005.05.019

mas des arcs tracés sur une variété algébrique sur $k[[t]]$ et montrons que cette question n'est pas sans rapport, via la théorie des dilatations, avec le problème de Nash.[1]

Notre point de vue permet, en particulier, de retrouver la finitude des familles de Nash sans passer (explicitement) par l'application de Nash (cf. Corollaire 4.7).

2. Schéma des arcs versus algèbre différentielle

Soit $R = k[[t]]$ un anneau de séries formelles à coefficients dans un corps k. Une k-variété est un schéma réduit, séparé et de type fini sur k. Pour l'étude du schéma des arcs on dispose de deux formalismes distincts :

(i) *L'algèbre différentielle*. On suppose que le corps k est de caractéristique 0. Plaçons-nous dans le cas d'une k-variété affine X, définie par un idéal (J) dans $\mathbf{A}_k^N := \operatorname{Spec} k[X_{1,0}, \ldots, X_{N,0}]$. Considérons la dérivation (i.e. l'application additive qui vérifie la règle de Leibnitz) $\delta : k[(X_{1,j})_{j\in\mathbf{N}}, \ldots, (X_{N,j})_{j\in\mathbf{N}}] \to k[(X_{1,j})_{j\in\mathbf{N}}, \ldots, (X_{N,j})_{j\in\mathbf{N}}]$ définie par $\delta(X_{i,j}) = X_{i,j+1}$, pour tout $1 \leqslant i \leqslant N$ et tout $j \in \mathbf{N}$. La donnée de δ permet de munir $k[(X_{1,j})_{j\in\mathbf{N}}, \ldots, (X_{N,j})_{j\in\mathbf{N}}]$ d'une structure d'anneau différentiel (au sens de Ritt, Kolchin ...). On note cet anneau différentiel $k\{\underline{X}\}$ et $\{J\}$ le radical de l'idéal différentiel engendré par (J). Dans ce formalisme, on dispose des énoncés suivants :

Théorème 2.1 (Kolchin, [5], Chapitre IV, Proposition 10). *Si l'idéal (J) est premier, alors l'idéal différentiel $\{J\}$ est premier.*

Théorème 2.2 (théorème de décomposition). *L'idéal différentiel $\{J\}$ de $k\{\underline{X}\}$ peut s'écrire comme une intersection d'un nombre fini d'idéaux différentiels premiers.*

(ii) *La géométrie algébrique*. Soient $n \in \mathbf{N}$, X un R-schéma (formel) de type fini, séparé, et de fibre spéciale X_s. On note $L_n(X)$ la restriction de Weil de $X \times_R R_n$ par rapport au morphisme d'anneaux $k \hookrightarrow R_n := k[[t]]/(t^{n+1})$. Les k-schémas de type fini $L_n(X)$ forment un système projectif, dont la limite existe dans la catégorie des k-schémas (non de type fini en général). On note $L(X)$ cette limite que l'on appelle *schémas des arcs tracés sur X*. On dispose d'un k-morphisme de projection $\pi : L(X) \to X_s$. Si X est un k-schéma de type fini et séparé, on note $L(X)$ au lieu de $L(X \times_k R)$.

Les deux approches définissent bien le schéma des arcs tracés sur X : avec les notations ci-dessus, si k est un corps de caractéristique nulle et X une sous-k-variété fermée de $\mathbf{A}_k^N$, définie par un idéal (J), alors le k-schéma $(L(X))_{\mathrm{red}}$ s'identifie au spectre de l'anneau $k\{\underline{X}\}/\{J\}$.

3. Théorème de Kolchin

Dans ce paragraphe, on suppose que le corps k est de caractéristique 0.

Proposition 3.1. *Soient k un corps de caractéristique 0 et X une k-variété. Alors $L(X) \setminus L(\mathrm{Sg}(X))$ est un ouvert dense de $L(X)$.*

D'après le Lemme 2.12 de [4], tout arc passant par $\mathrm{Sg}(X)$ est la spécialisation d'un arc dans X dont le point générique est dans $X \setminus \mathrm{Sg}(X)$. La proposition en résulte.

---

[1] Rappelons que, dans les années 60 (cf. [6]), J. Nash a construit une application injective de l'ensemble des familles de Nash (cf. Définition 4.6) d'une k-variété irréductible dans l'ensemble des composantes essentielles (moralement la partie canonique) du diviseur exceptionnel de toute résolution de cette variété. On sait aujourd'hui (cf. Exemple 4.5 de [4]) que cette application n'est pas surjective en général (cette question de la surjectivité est généralement désignée comme le « problème de Nash »).

Théorème 3.2. *Soient k un corps de caractéristique 0 et X une k-variété. Alors X est irréductible si et seulement si $L(X)$ est irréductible.*

Il existe un morphisme $f : Y \to X$ propre de k-schémas induisant un isomorphisme au-dessus de $X \setminus \mathrm{Sg}(X)$, avec Y régulier (cf. [2]). Le critère valuatif de propreté assure que f induit une application surjective $L(Y) \setminus h^{-1}(L(\mathrm{Sg}(X))) \to L(X) \setminus L(\mathrm{Sg}(X))$. On en déduit que l'ouvert $L(X) \setminus L(\mathrm{Sg}(X))$ est irréductible. L'énoncé du théorème découle alors de la Proposition 3.1.

Remarque 1. Dans le cas de la surface (irréductible) $X \subset \mathbf{A}^3_{\mathbf{F}_2}$ définie par l'équation $X_{1,0}^2 - X_{3,0}X_{2,0}^2 = 0$, le $\mathbf{F}_2$-schéma $\pi^{-1}(\mathrm{Sg}(X))$ contient l'ouvert (non vide) de $L(X)$ défini par $X_{3,1} \neq 0$ (avec les notations de §1, (i)). Ceci implique que le théorème de Kolchin ne s'étend pas en caractéristique positive.

Théorème 3.3. *Soient k un corps de caractéristique 0 et X une k-variété. Soient $(X_i)_{i\in I}$ les composantes irréductibles de X. Alors $L(X) = \bigcup_{i\in I} L(X_i)$ et les $L(X_i)$ sont* (*exactement*) *les composantes irréductibles de $L(X)$.*

Chaque $L(X_i)$ est un sous-schéma fermé irréductible de $L(X)$ (cf. Théorème 3.2). Supposons que $L(X_i) \subset L(X_j)$ (avec $i \neq j \in I$). Soit $x \in X_i$. Considérons x comme un arc constant sur X_i. Par hypothèse, $x \in L(X_j)$ et par suite $x \in X_j$. Donc $X_i \subset X_j$, ce qui est impossible.

Soient $\alpha \in X(F[[t]])$ un arc sur X, 0 le point fermé de Spec $F[[t]]$ et η le point générique. Comme $\alpha(0) \in \overline{\alpha(\eta)}$, $\alpha(0) \in X_i$ (et donc $\alpha \in L(X_i)$) dès que $\alpha(\eta) \in X_i$. Donc $L(X) = \bigcup_{i\in I} L(X_i)$.

4. Décomposition en composantes irréductibles et problème de Nash

On suppose que le corps k est parfait. Soit X un schéma de type fini, séparé sur R. On note X_s sa fibre spéciale. Le R-morphisme canonique $X_{\mathrm{red}} \to X$ induit un homéomorphisme $L(X_{\mathrm{red}}) \to L(X)$. On munit $L(X)$ et les sous-k-schémas de $L(X)$ de leurs structures réduites. Si X est réduit, on note $\mathrm{Sg}(X)$ l'ensemble des points singuliers de X, i.e. le complémentaire dans X de l'ensemble des points réguliers de X, et $\mathrm{Sm}(X)$ l'ensemble des points de X où le morphisme structural $X \to \mathrm{Spec}\, R$ est lisse.

Proposition 4.1. *Soient X est un R-schéma de type fini, séparé, lisse sur R, et $(C_s^i)_{i\in I}$ l'ensemble des composantes connexes de X_s. Alors l'ensemble des composantes irréductibles de $L(X)$ est égal à l'ensemble $\{\pi^{-1}(C_s^i) \mid i \in I\}$, où $\pi : L(X) \to X_s$ est le morphisme de projection canonique.*

Dans le cas où $X \to \mathrm{Spec}\, R$ est lisse, le morphisme π est une fibration localement triviale pour la topologie de Zariski (passage à la limite dans [7]/3.4.2/2).

Corollaire 4.2. *Si X est un R-schéma de type fini, séparé, régulier, alors l'ensemble des composantes irréductibles de $L(X)$ est fini.*

Il suffit de remarquer que, dans ce cas, le morphisme canonique $L(\mathrm{Sm}(X)) \to L(X)$ est un homéomorphisme, car c'est une immersion ouverte par construction, qui est bijective sur les points ([1], Lemme 3.6/2, [3], Propositions 6.5.2/(ii) et 6.8.2, [3], Corollaire 17.7.2 pour se ramener au cas de [1], Proposition 3.1/2).

Théorème 4.3. *Soient k un corps de caractéristique* 0 *et X un schéma réduit, de type fini et séparé sur R. L'ensemble des composantes irréductibles de $L(X)$ est fini.*

Comme $L(X_{\mathrm{plat}}) \to L(X)$ est un isomorphisme (X_{plat} désigne la réunion des composantes irréductibles de X, plates sur R), on peut supposer que X est plat. On prouve le résultat par récurrence sur la dimension de X. Comme R est excellent, il existe un R-morphisme propre $h : Y \to X$, tel que Y est régulier, et h est un isomorphisme sur $X \setminus \mathrm{Sg}(X)$ (cf. [2]). Le Corollaire 4.2 assure que $L(Y)$ n'a qu'un nombre fini de composantes irréductibles, et donc l'ouvert $L(Y) \setminus h^{-1}(L(\mathrm{Sg}(X))$ également. Par le critère valuatif de propreté, l'application $h : L(Y) \setminus h^{-1}(L(\mathrm{Sg}(X)) \to L(X) \setminus L(\mathrm{Sg}(X))$ est surjective.

On se ramène alors au cas de $L(\mathrm{Sg}(X))$, mais $\mathrm{Sg}(X)$ est de codimension au moins un dans X. Il suffit de prouver le résultat pour les R-schémas de type fini de dimension relative 0, ce qui est clair.

Définition 4.4. Si X est un R-schéma de type fini et Z un sous-schéma fermé de X_s, on appelle dilatation de centre Z un X-schéma X_t plat sur R qui vérifie les propriétés suivantes :

(i) la réduction modulo t du morphisme structural $(X_t)_s \to X_s$ se factorise par Z ;

(ii) tout X-schéma $u : Y \to X$ plat sur R, tel que u_s se factorise par Z, se factorise par X_t de manière unique.

Un tel objet existe toujours et est unique. Une construction explicite est donnée dans [1] au Paragraphe 3.2.

Théorème 4.5. *Soit X un R-schéma de type fini, séparé, et X_t la dilatation de X de centre* $\mathrm{Sg}((X_s)_{\mathrm{red}})$. *Le R-morphisme canonique $u' : L(X_t) \to L(X)$ est une immersion fermée, qui induit un homéomorphisme sur* $\pi^{-1}(\mathrm{Sg}((X_s)_{\mathrm{red}}))$, *où $\pi : L(X) \to X_s$ est le morphisme de projection canonique.*

Cette assertion est locale. On peut donc supposer que $X = \mathrm{Spec}\, R[\underline{X}]/I$. Dans ce cas, $L(X_t)$ s'identifie à $Y := L(\mathrm{Spec}\, R[\underline{X}, \underline{T}]/((g_i - tT_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}, I))$, si $(t, g_1, \ldots, g_n)$ définit $\mathrm{Sg}((X_s)_{\mathrm{red}})$ dans $\mathrm{Spec}\, R[\underline{X}]$. Le morphisme u induit alors un isomorphisme de Y sur $\pi^{-1}(\mathrm{Sg}((X)_{\mathrm{red}}))$.

Définition 4.6. Soient k un corps de caractéristique 0 et X un k-schéma de type fini. On appelle *famille de Nash* toute composante irréductible de $\pi^{-1}(\mathrm{Sg}((X)_{\mathrm{red}}))$.

Corollaire 4.7. *Soit X une k-variété et X_t la dilatation de $X \times_k R$ de centre* $\mathrm{Sg}(X)$. *Le schéma X n'a qu'un nombre fini de familles de Nash et ce nombre est égal au nombre de composantes irréductibles de $L(X_t)$.*

Corollaire 4.8. *Si X est le cône affine d'une k-variété projective et lisse sur k, alors le nombre de familles de Nash de X est égal au nombre c de composantes irréductibles de X. En particulier, l'application de Nash est bijective.*

L'éclatement du point singulier dans X fournit une résolution dont le nombre de composantes exceptionnelles est égal à c. Par ailleurs, dans ce cas, $X_t \cong X \times_k R$ et l'on conclut grâce aux Théorèmes 3.3 et 4.5.

Remerciements

Le second auteur souhaite remercier Bernard Malgrange pour lui avoir parlé d'algèbre différentielle et du livre de Kaplansky. Nous tenons à remercier Antoine Chambert-Loir, Michel Hickel et François Loeser pour les discussions enrichissantes que les auteurs ont pu avoir avec eux.

Références

[1] S. Bosch, W. Lütkebohmert, M. Raynaud, Néron Models, Ergeb. Math. Genzgeb., 3. Folge, vol. 21, Springer-Verlag, 1990.
[2] J. Giraud, Résolution des singularités (d'après Heisuke Hironaka) [Resolution of singularities (after Heisuke Hironaka)], in : Séminaire Bourbaki, vol. 10, Exp. No. 320, Soc. Math. France, Paris, 1995, pp. 101–113 (in French).
[3] A. Grothendieck, J. Dieudonné, Éléments de géométrie algébrique, IV : Étude locale des schémas et des morphismes de schémas, Pub. Inst. Hautes Études Sci. 24 (1965), et 32 (1967).
[4] S. Ishii, J. Kollár, The Nash problem on arc families of singularities, Duke Math. J. 120 (3) (2003) 601–620.
[5] E.R. Kolchin, Differential Algebra and Algebraic Groups, Pure Appl. Math., vol. 54, Academic Press, New York, 1973.
[6] J.F. Nash Jr., Arc structure of singularities, A celebration of John F. Nash, Jr., Duke Math. J. 81 (1) (1995) 31–38.
[7] J. Sebag, Intégration motivique sur les schémas formels, Bull. Soc. Math. France 132 (1) (2004) 1–54.