

Numerical Analysis

# Non-overlapping additive Schwarz methods tuned to highly heterogeneous media

Yvon Maday<sup>a,b</sup>, Frédéric Magoulès<sup>c</sup>

<sup>a</sup> *Laboratoire Jacques-Louis Lions, université Pierre et Marie Curie, BP 187, 75252 Paris cedex 05, France*

<sup>b</sup> *Division of Applied Mathematics, Brown University, 182 George Street, Providence, RI 02912, USA*

<sup>c</sup> *Institut Elie-Cartan de Nancy, université Henri-Poincaré, BP 239, 54506 Vandoeuvre-les-Nancy cedex, France*

Received 21 April 2005; accepted after revision 14 September 2005

Available online 2 November 2005

Presented by Olivier Pironneau

---

## Abstract

In this Note an improved version of the Schwarz domain decomposition method is introduced for highly heterogeneous media. This method uses new optimized interface conditions specially designed to take into account the heterogeneity between the sub-domains on the interfaces. The mathematical analysis of these interface conditions is first presented. Then the asymptotic analysis upon the mesh size parameter together with the heterogeneity ratio is detailed. *To cite this article: Y. Maday, F. Magoulès, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 341 (2005).*

© 2005 Académie des sciences. Published by Elsevier SAS. All rights reserved.

## Résumé

**Méthodes de Schwarz additives sans recouvrement pour des milieux très hétérogènes.** Dans cette Note une variante de l'algorithme de Schwarz est introduite pour des milieux très hétérogènes. Cette méthode utilise des conditions d'interfaces optimisées spécialement conçues pour tenir compte de l'hétérogénéité entre les sous-domaines. L'étude mathématique de ces conditions d'interfaces est dans un premier temps présentée. Une analyse asymptotique en fonction de la finesse du maillage et du rapport de l'hétérogénéité est ensuite détaillée. *Pour citer cet article : Y. Maday, F. Magoulès, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 341 (2005).*

© 2005 Académie des sciences. Published by Elsevier SAS. All rights reserved.

---

## Version française abrégée

Des variantes [10] de la méthode de Schwarz [15] ainsi que de nombreuses techniques de préconditionnement telles que des conditions d'interfaces [3,2], des conditions d'interfaces optimisées [1,9,4–6], ou des méthodes d'Aitken–Schwarz [7] ont été développées ces dernières années. Des travaux de recherches récents s'intéressent maintenant à l'extension et à l'amélioration de ces techniques dans le cas de milieux hétérogènes [8,11]. Les conditions d'interfaces sont d'une importance fondamentale pour la convergence de l'algorithme de Schwarz sans recouvrement des sous-domaines. Des conditions d'interfaces optimales qui conduisent à la meilleure convergence possible de l'algorithme peuvent être déterminées [14]. Ces conditions d'interfaces sont non-locales et de nombreux travaux continuent à être

---

*E-mail addresses:* [maday@ann.jussieu.fr](mailto:maday@ann.jussieu.fr) (Y. Maday), [frederic.magoules@iecn.u-nancy.fr](mailto:frederic.magoules@iecn.u-nancy.fr) (F. Magoulès).

menés afin de les utiliser efficacement d'un point de vue numérique [12]. Une autre approche consiste à approcher ces conditions d'interfaces optimales par des opérateurs locaux. Ces opérateurs locaux peuvent alors être optimisés, comme cela a été illustré pour d'autres équations [1,4,9,5,13]. Dans le cas de milieux hétérogènes, l'hétérogénéité entre les milieux nécessite un traitement spécial pour construire des conditions d'interfaces efficaces. Deux méthodes basées sur la minimisation du taux de convergence de l'algorithme de Schwarz et utilisant un ou deux paramètres respectivement sont ici proposées.

Dans cette Note, l'équation  $(-\nabla \cdot (\mu \nabla))u = f$  est considérée dans le domaine  $\Omega = \mathbb{R}^2$  avec comme conditions limites à l'infini  $\lim_{r \rightarrow \infty} u = 0$  où  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$  et  $\mu \in \mathbb{R}^+$ . Le domaine  $\Omega$  est décomposé en deux sous-domaines sans recouvrement  $\Omega^{(1)} = ]-\infty, 0[ \times \mathbb{R}$  et  $\Omega^{(2)} = ]0, \infty[ \times \mathbb{R}$ , et  $\mu$  est supposée constante par sous-domaine. L'algorithme de Schwarz considéré [3] s'écrit équations (1)–(4), où  $n$  représente l'itération courante. Les opérateurs  $\mathcal{A}^{(1)}$  et  $\mathcal{A}^{(2)}$  sont à déterminer pour la meilleure performance de l'algorithme. Dans ce but, une transformée de Fourier dans la direction  $y$  est appliquée à l'algorithme de Schwarz, Éqs. (5)–(8). La solution à l'itération  $m + 1$  dans un sous-domaine est alors exprimée en fonction de la solution à l'itération  $m - 1$  dans ce même sous-domaine. Cette relation fait intervenir le taux de convergence  $\kappa$  de l'algorithme, Éq. (9). Les opérateurs utilisés  $\Theta^{(1)}$  et  $\Theta^{(2)}$ , dans l'espace de Fourier, sont associés aux opérateurs  $\mathcal{A}^{(1)}$  et  $\mathcal{A}^{(2)}$ , dans l'espace physique. L'expression des opérateurs  $\Theta^{(1)}$  et  $\Theta^{(2)}$  est cherchée sous la forme de polynômes, ce qui correspond à des opérateurs locaux dans l'espace physique. Puisque l'algorithme de Schwarz peut être interprété comme un algorithme itératif de type Jacobi, les coefficients de ces polynômes sont déterminés de façon à minimiser le maximum du taux de convergence de l'algorithme de Schwarz. Ce problème de minimisation s'effectue sur une plage de fréquence discrète  $(k_{\min}, k_{\max})$  où  $k_{\min}$  et  $k_{\max}$  sont respectivement la plus petite et la plus grande fréquence supportée par le maillage.

La première approximation proposée dans cette Note est basée sur un paramètre  $\alpha$  tel que  $\Theta^{(1)} = \mu^{(2)}\alpha$  et  $\Theta^{(2)} = -\mu^{(1)}\alpha$ . Le paramètre optimisé correspondant est égal à  $\alpha^* = \sqrt{k_{\min}k_{\max}}$ , cf. Théorème 2.1. Cette première approximation conduit à un taux de convergence asymptotique de l'algorithme de Schwarz de la forme  $\kappa = 1 - \zeta_0 h^{1/2} + O(h)$  où  $\zeta_0 \in \mathbb{R}^+$ . La seconde approximation proposée dans cet article considère deux paramètres  $\alpha$  et  $\beta$  tel que  $\Theta^{(1)} = \mu^{(2)}\alpha$  et  $\Theta^{(2)} = -\mu^{(1)}\beta$ . Les paramètres optimisés sont liés entre eux par la relation  $\beta^* = k_{\min}k_{\max}/\alpha^*$ , et  $\alpha^*$  est obtenu par la résolution d'une équation polynomiale de degré quatre, cf. Théorème 2.2. Cette seconde méthode conduit à un taux de convergence asymptotique de l'algorithme de Schwarz de la forme  $\kappa = \zeta_1 - \zeta_2 h + O(h^2)$  où  $\zeta_1, \zeta_2 \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ . Dans le cas de matériaux très hétérogènes  $\mu^{(1)} \ll \mu^{(2)}$ , la constante  $\zeta_1$  devient très petite devant un, et plus exactement est égale au ratio de l'hétérogénéité  $\mu^{(1)}/\mu^{(2)}$  entre les sous-domaines.

La Fig. 1 représente les taux de convergence optimisés dans le cas d'une procédure d'optimisation respectivement basée sur un paramètre  $\alpha$  ou deux paramètres  $\alpha, \beta$ . Les valeurs numériques considérées sont  $\mu^{(1)} = 1$ ,  $\mu^{(2)} = 10^2$ , et  $h = 10^{-2}$ . Cette figure illustre bien l'amélioration du taux de convergence de l'algorithme de Schwarz en fonction des conditions d'interfaces proposées et un rapport  $\mu^{(1)}/\mu^{(2)}$  apparaît clairement entre les maximums de ces deux courbes.

## 1. Introduction

The classical Schwarz algorithm [15] has a long history. Several variants of this algorithm have been developed and analyzed these last twenty years [10], and several preconditioning techniques have been investigated, as interface conditions [3,2], optimized interface conditions [1,9,4–6], Aitken like methods [7]. Recent areas of interests concern the improvement of these methods for highly heterogeneous media [8,11]. The interface conditions of the Schwarz algorithm without overlap have a strong influence on the convergence of the algorithm. Optimal interface conditions which lead to the best possible convergence of the Schwarz algorithm can be derived [14]. These optimal interface conditions however are non-local in nature and several works continue to be investigated in order to use them efficiently in numerical simulations [12]. Other approaches consist in approximating these optimal interface conditions with local operators. These local operators could then be optimized for performance of the Schwarz algorithm, similar to the previous works performed on other equations [1,4,9,5,13]. When dealing with heterogeneous media, the heterogeneity of the media between two subdomains requires a special treatment. In this paper, two techniques to design improved interface conditions are investigated. These techniques are based on the minimization of the convergence rate of the Schwarz algorithm, and are based on one or two parameters.

## 2. Optimized interface conditions

The following equation in an heterogeneous media is considered  $(-\nabla \cdot (\mu \nabla))u = f$  in the domain  $\Omega = \mathbb{R}^2$  with the condition at infinity  $\lim_{r \rightarrow \infty} u = 0$  where  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$  and  $\mu \in \mathbb{R}^+$ . The domain  $\Omega$  is decomposed into two non-overlapping subdomains  $\Omega^{(1)} = (-\infty, 0) \times \mathbb{R}$  and  $\Omega^{(2)} = (0, \infty) \times \mathbb{R}$ , and  $\mu$  is supposed to be constant over each subdomain. The Schwarz algorithm without subdomain overlap reads

$$(-\nabla \cdot (\mu^{(1)} \nabla))u_{2n+1}^{(1)}(x, y) = f(x, y), \quad x, y \in \Omega^{(1)}, \tag{1}$$

$$(\mu^{(1)} \partial_x + \mathcal{A}^{(1)})u_{2n+1}^{(1)}(0, y) = (\mu^{(2)} \partial_x + \mathcal{A}^{(1)})u_{2n}^{(2)}(0, y), \tag{2}$$

$$(-\nabla \cdot (\mu^{(2)} \nabla))u_{2n+2}^{(2)}(x, y) = f(x, y), \quad x, y \in \Omega^{(2)}, \tag{3}$$

$$(\mu^{(2)} \partial_x + \mathcal{A}^{(2)})u_{2n+2}^{(2)}(0, y) = (\mu^{(1)} \partial_x + \mathcal{A}^{(2)})u_{2n+1}^{(1)}(0, y) \tag{4}$$

where  $n$  represents the iteration parameter. The operators  $\mathcal{A}^{(1)}$  and  $\mathcal{A}^{(2)}$  are to be determined for the best performance of the algorithm. To analyze the convergence, it suffices to consider by linearity the case of  $f(x, y) = 0$  and to analyze the convergence to zero. For this purpose a Fourier transform in the  $y$  direction is classically applied to the system of Eqs. (1)–(4). Assuming that  $\mathcal{A}^{(s)}$ ,  $s = 1, 2$ , are diagonal in the Fourier basis:

$$(-\mu^{(1)} \partial_{xx}^2 + \mu^{(1)} k^2) \hat{u}_{2n+1}^{(1)}(x, k) = 0, \quad x < 0, \quad k \in \mathbb{R}, \tag{5}$$

$$(\mu^{(1)} \partial_x + \Theta^{(1)}) \hat{u}_{2n+1}^{(1)}(0, k) = (\mu^{(2)} \partial_x + \Theta^{(1)}) \hat{u}_{2n}^{(2)}(0, k), \tag{6}$$

$$(-\mu^{(2)} \partial_{xx}^2 + \mu^{(2)} k^2) \hat{u}_{2n+2}^{(2)}(x, k) = 0, \quad x > 0, \quad k \in \mathbb{R}, \tag{7}$$

$$(\mu^{(2)} \partial_x + \Theta^{(2)}) \hat{u}_{2n+2}^{(2)}(0, k) = (\mu^{(1)} \partial_x + \Theta^{(2)}) \hat{u}_{2n+1}^{(1)}(0, k) \tag{8}$$

where  $\Theta^{(s)}(k)$ ,  $s = 1, 2$ , denotes the symbol of operator  $\mathcal{A}^{(s)}$  and  $k$  is the Fourier variable, also called frequency. Solving this system of ordinary differential equations, taking into account the condition at infinity, and using the interface conditions leads to  $\hat{u}_{n+1}^{(1)}(0, k) = \kappa(k) \hat{u}_{n-1}^{(1)}(0, k)$ , and  $\hat{u}_{n+1}^{(2)}(0, k) = \kappa(k) \hat{u}_{n-1}^{(2)}(0, k)$  where the convergence rate  $\kappa(k)$  is defined by

$$\kappa(k) = \frac{\mu^{(2)} \Lambda^{(2)}(k) - \Theta^{(1)}(k)}{\mu^{(1)} \Lambda^{(1)}(k) + \Theta^{(1)}(k)} \frac{\mu^{(1)} \Lambda^{(1)}(k) + \Theta^{(2)}(k)}{\mu^{(2)} \Lambda^{(2)}(k) - \Theta^{(2)}(k)} \tag{9}$$

and where  $\Lambda^{(s)} = |k|$ , for  $s = 1, 2$ .

With the selection  $\Theta^{(1)}(k) = \mu^{(2)} \Lambda^{(2)}(k)$  and  $\Theta^{(2)}(k) = -\mu^{(1)} \Lambda^{(1)}(k)$  the Schwarz algorithm defined by Eqs. (1)–(4) converges in two iterations [14]. This choice in the Fourier space leads to non-local operator in the physical space, and several approximations of this operator [3,1,4,9,6] have been proposed for other equations. Due to the heterogeneity of the media and in order to keep this heterogeneity on the interface, the following approximation can be considered [11]

$$\Theta^{(1)}(k) = \mu^{(2)} \alpha, \quad \Theta^{(2)}(k) = -\mu^{(1)} \alpha, \tag{10}$$

where  $\alpha$  is a constant. This constant is selected in such a way to minimize the convergence rate of the Schwarz algorithm i.e. that  $\alpha$  is solution of the min–max problem

$$\min_{\alpha \in \mathbb{R}} \max_{k \in (k_{\min}, k_{\max})} |\kappa(\alpha, \beta, k)|, \tag{11}$$

where  $k_{\min}$  and  $k_{\max}$  are respectively the smallest and highest frequencies of interest. The optimized value of the parameter  $\alpha$  is given by the following:

**Theorem 2.1.** *Under the assumptions  $0 < \mu^{(1)} < \mu^{(2)}$ , and  $0 < k_{\min} < \alpha < k_{\max}$  the solution of the min–max problem (11) with  $\Theta^{(1)}$  and  $\Theta^{(2)}$  given by (10) is unique and the optimized parameter is given by  $\alpha^* = \sqrt{k_{\min} k_{\max}}$ .*

In order to improve the quality of the approximation, following [8] where they consider the choices

$$\Theta^{(1)} = \mu^{(2)} \alpha, \quad \Theta^{(2)} = -\mu^{(1)} \beta \tag{12}$$

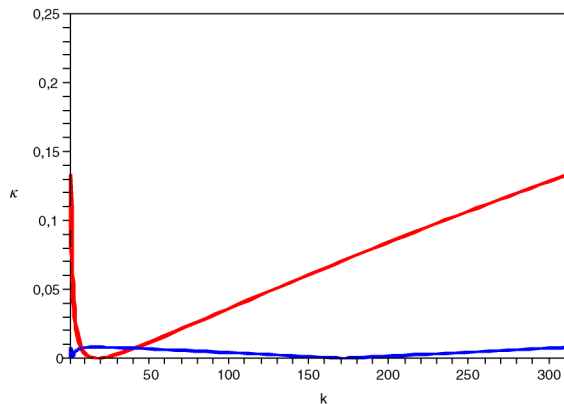


Fig. 1. Optimized convergence rate upon the frequency. On the top when the optimization is based on one parameter and on the bottom when the optimization is based on two parameters.

where  $\alpha$  and  $\beta$  are two constants that are selected so as to minimize a simplified version of the convergence rate, and, as is done in [11] for this heterogeneous diffusion problem, we propose to work here with (12) and optimize over  $\alpha$  and  $\beta$  solution of the (true) min–max problem

$$\min_{\alpha \in \mathbb{R}, \beta \in \mathbb{R}} \max_{k \in (k_{\min}, k_{\max})} |\kappa(\alpha, \beta, k)|. \quad (13)$$

The optimized values of the parameters  $\alpha$  and  $\beta$  are given by the following:

**Theorem 2.2.** Under the assumptions  $0 < \mu^{(1)} < \mu^{(2)}$ , and  $0 < k_{\min} < \beta < \alpha < k_{\max}$  the solution of the min–max problem (13) with  $\Theta^{(1)}$  and  $\Theta^{(2)}$  given by (12) is unique and the optimized parameters are linked by the relation  $\beta^* = \frac{k_{\min} k_{\max}}{\alpha^*}$  where  $\alpha^*$  is the largest solution of the equation of degree four  $AX^4 + BX^3 + CX^2 + DX + E = 0$  and where the real coefficients  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$ , and  $E$  are given by

$$\begin{aligned} A &= 2\mu^{(2)2} k_{\max}^{1/2} k_{\min}^{1/2}, \\ B &= \mu^{(2)} \mu^{(1)} (2k_{\min} k_{\max} + k_{\min}^{3/2} k_{\max}^{1/2} + k_{\min}^{1/2} k_{\max}^{3/2}) + \mu^{(2)2} (-k_{\max}^{3/2} k_{\min}^{1/2} - 2k_{\min} k_{\max} - k_{\min}^{3/2} k_{\max}^{1/2}), \\ C &= 2k_{\min}^{3/2} k_{\max}^{3/2} \mu^{(2)2} + 2\mu^{(1)2} k_{\min}^{3/2} k_{\max}^{3/2} + \mu^{(2)} \mu^{(1)} (-4k_{\min}^2 k_{\max} - 4k_{\max}^2 k_{\min}), \\ D &= \mu^{(1)2} (-2k_{\min}^2 k_{\max}^2 - k_{\max}^{5/2} k_{\min}^{3/2} - k_{\min}^{5/2} k_{\max}^{3/2}) + \mu^{(1)} \mu^{(2)} (+k_{\min}^{5/2} k_{\max}^{3/2} + 2k_{\min}^2 k_{\max}^2 + k_{\min}^{3/2} k_{\max}^{5/2}), \\ E &= 2k_{\min}^{5/2} k_{\max}^{5/2} \mu^{(1)2}. \end{aligned}$$

Fig. 1 shows the corresponding optimized convergence rate (as a function of the frequency  $k$ ) obtained for a model problem on the unit square with two subdomains for  $\mu^{(1)} = 1$ ,  $\mu^{(2)} = 10^2$  and  $h = 10^{-2}$ . The improvement of the two parameters optimization compare to the one parameter optimization is clearly outlined in this figure.

### 3. Asymptotic analysis

The asymptotic convergence rate of these Schwarz algorithms is now analyzed when the mesh size parameter  $h$  tends to zero. A first theorem is now introduced when the optimization procedure is based on one parameter

**Theorem 3.1.** Under the assumptions  $0 < \mu^{(1)} < \mu^{(2)}$ , and  $0 < k_{\min} < k_{\max}$  the asymptotic convergence rate of the Schwarz algorithm with optimized interface conditions based on one parameter, discretized with mesh parameter  $h$  is given by

$$\kappa = 1 - \left( 2 + \frac{\mu^{(1)}}{\mu^{(2)}} + \frac{\mu^{(2)}}{\mu^{(1)}} \right) \sqrt{k_{\min}} \sqrt{\frac{h}{\pi}} + O(h).$$

A second theorem is now announced when the optimization procedure is based on two parameters

**Theorem 3.2.** Under the assumptions  $0 < \mu^{(1)} < \mu^{(2)}$ , and  $0 < k_{\min} < k_{\max}$  the asymptotic convergence rate of the Schwarz algorithm with optimized interface conditions based on two parameters, discretized with mesh parameter  $h$  is given by  $\kappa = \zeta_1 - \zeta_2 h + O(h^2)$  where the constants  $\zeta_1$  and  $\zeta_2$  are given by

$$\begin{aligned} \zeta_1 &= \left( \mu^{(1)} k_{\min} - \frac{3\mu^{(1)} k_{\min} \pi}{4(\gamma/(24\mu^{(2)}) + \delta/(8\mu^{(2)}\gamma) + \pi(-\mu^{(1)} + \mu^{(2)})/(8\mu^{(2)}))} \right) \\ &\quad \times \left( -\mu^{(2)} k_{\min} - \frac{3\mu^{(1)} k_{\min} \pi}{4(\gamma/(24\mu^{(2)}) + \delta/(8\mu^{(2)}\gamma) + \pi(-\mu^{(1)} + \mu^{(2)})/(8\mu^{(2)}))} \right)^{-1}, \\ \zeta_2 &= \left[ 3(\mu^{(2)} k_{\min} + \mu^{(1)} k_{\min}) \left( \mu^{(1)} k_{\min} - \frac{3\mu^{(1)} k_{\min} \pi}{4(\gamma/(24\mu^{(2)}) + \delta/(8\mu^{(2)}\gamma) + \pi(-\mu^{(1)} + \mu^{(2)})/(8\mu^{(2)}))} \right) \right] \\ &\quad \times \left( 4\mu^{(2)} \left( \frac{\gamma}{24\mu^{(2)}} + \frac{\delta}{8\mu^{(2)}\gamma} + \frac{\pi(-\mu^{(1)} + \mu^{(2)})}{8\mu^{(2)}} \right) \right)^{-1} \\ &\quad \times \left( -\mu^{(2)} k_{\min} - \frac{3\mu^{(1)} k_{\min} \pi}{4(\gamma/(24\mu^{(2)}) + \delta/(8\mu^{(2)}\gamma) + \pi(-\mu^{(1)} + \mu^{(2)})/(8\mu^{(2)}))} \right)^{-1}. \end{aligned}$$

and where

$$\begin{aligned} \gamma &= (-81\mu^{(1)}\pi^3\mu^{(2)2} - 27\pi^3\mu^{(1)3} + 81\pi^3\mu^{(1)2}\mu^{(2)} + 27\pi^3\mu^{(2)3})^{1/3}, \\ \delta &= 3\pi^2\mu^{(1)2} - 6\pi^2\mu^{(1)}\mu^{(2)} + 3\pi^2\mu^{(2)2}. \end{aligned}$$

In case  $\mu^{(1)} \ll \mu^{(2)}$ , the asymptotic convergence rate (in the limit  $h \ll \frac{\mu^{(1)}}{\mu^{(2)}} \rightarrow 0$ ) is

$$\kappa = \frac{\mu^{(1)}}{\mu^{(2)}} - \frac{2k_{\min}}{\pi} \frac{\mu^{(1)}}{\mu^{(2)}} h + O(h^2) + O\left(\frac{\mu^{(1)2}}{\mu^{(2)2}}\right).$$

## References

- [1] P. Chevalier, F. Nataf, Symmetrized method with optimized second-order conditions for the Helmholtz equation, in: Domain Decomposition Methods, 10, Boulder, CO, 1997, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1998, pp. 400–407.
- [2] F. Collino, S. Ghanemi, P. Joly, Domain decomposition methods for harmonic wave propagation: a general presentation, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 2 (4) (2000) 171–211.
- [3] B. Després, Domain decomposition method and the Helmholtz problem. II, in: Second International Conference on Mathematical and Numerical Aspects of Wave Propagation, Newark, DE, 1993, SIAM, Philadelphia, PA, 1993, pp. 197–206.
- [4] V. Dolean, S. Lanteri, F. Nataf, Construction of interface conditions for solving compressible Euler equations by non-overlapping domain decomposition methods, *Int. J. Numer. Methods Fluids* 40 (2002) 1485–1492.
- [5] M.J. Gander, L. Halpern, F. Nataf, Optimized Schwarz methods, in: T. Chan, T. Kako, H. Kawarada, O. Pironneau (Eds.), Twelfth International Conference on Domain Decomposition Methods, Chiba, Japan, Domain Decomposition Press, Bergen, 2001, pp. 15–28.
- [6] M.J. Gander, F. Magoulès, F. Nataf, Optimized Schwarz methods without overlap for the Helmholtz equation, *SIAM J. Sci. Statist. Comput.* 24 (1) (2002) 38–60.
- [7] M. Garbey, D. Tromeur-Dervout, On some Aitken like acceleration of the Schwarz method, *Int. J. Numer. Methods Fluids* 40 (12) (2002) 1493–1513.
- [8] L. Gerardo Giorda, F. Nataf, Optimized Schwarz methods for unsymmetric layered problems with strongly discontinuous and anisotropic coefficients, RR 561, CMAP, 2004.
- [9] C. Japhet, F. Nataf, F. Rogier, The optimized order 2 method: application to convection–diffusion problems, *Future Generation Computer Systems* 18 (2001).
- [10] P.-L. Lions, On the Schwarz alternating method. III: A variant for nonoverlapping subdomains, in: T. Chan, R. Glowinski, J. Périaux, O. Widlund (Eds.), Third International Symposium on Domain Decomposition Methods for Partial Differential Equations, held in Houston, TX, March 20–22, 1989, SIAM, Philadelphia, PA, 1990.
- [11] Y. Maday, F. Magoulès, Multilevel optimized Schwarz methods without overlap for highly heterogeneous media, RR-05015, Université Pierre & Marie Curie, Laboratoire Jacques-Louis Lions, 2005.
- [12] F. Magoulès, I. Harari (Eds.), Absorbing boundary conditions, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 2005, in press.
- [13] F. Magoulès, P. Iványi, B.H.V. Topping, Non-overlapping Schwarz methods with optimized transmission conditions for the Helmholtz equation, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 193 (45–47) (2004) 4797–4818.
- [14] F. Nataf, F. Rogier, E. de Sturler, Optimal interface conditions for domain decomposition methods, RR 301, CMAP, 1994.
- [15] H.A. Schwarz, Über einen Grenzübergang durch alternierendes Verfahren, *Vierteljahrsschrift der Naturforschenden Gesellschaft in Zürich* 15 (May 1870) 272–286.