Available online at www.sciencedirect.com
SCIENCE DIRECT®
ELSEVIER
C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 340 (2005) 665–670
COMPTES RENDUS MATHEMATIQUE
http://france.elsevier.com/direct/CRASS1/

Équations aux dérivées partielles

Borne sur l'advection et la hauteur d'eau du problème de shallow-water avec conditions aux limites de Dirichlet

Fabien Flori, Pierre Orenga

UMR 6134, université de Corse, quartier Grossetti, BP 52, 20250 Corte, France

Reçu le 13 décembre 2004 ; accepté le 22 mars 2005

Présenté par Pierre-Louis Lions

Résumé

En utilisant certaines propriétés des espaces de Hardy nous donnons un résultat de régularité sur le terme d'advection des équations de shallow-water. Une application de cette régularité est de permettre de montrer l'existence d'une borne dans L^2 valable jusqu'au bord sur la hauteur d'eau pour des conditions aux limites de Dirichlet. ***Pour citer cet article : F. Flori, P. Orenga, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 340 (2005).***

Abstract

Bound on the advection and the height of the shallow-water problem with Dirichlet boundary conditions. Using some properties of the Hardy spaces, we give a regularity result on the advection term of the shallow-water equations and we show a L^2 bound holding up to the boundary on the water height with Dirichlet boundary conditions. ***To cite this article: F. Flori, P. Orenga, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 340 (2005).***

Abridged English version

We consider solutions (h, u) of

$$(\mathcal{F})\quad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + (u\cdot\nabla)u - \mu\Delta u + a\nabla h = 0, & \text{in } Q = \Omega\times(0,T),\\ \dfrac{\partial h}{\partial t} + \operatorname{div}(hu) = 0, & \text{in } Q = \Omega\times(0,T),\\ u = 0, & \text{on } \Sigma = \Gamma\times(0,T),\\ u(t=0) = u_0(x), \quad h(t=0) = h_0(x) \geqslant 0 & \text{in } \Omega \end{cases} \tag{1}$$

Adresse e-mail : flori@univ-corse.fr (F. Flori).

1631-073X/$ – see front matter © 2005 Académie des sciences. Publié par Elsevier SAS. Tous droits réservés.
doi:10.1016/j.crma.2005.03.024

where $a>0$, $\mu>0$, $T>0$ and Ω is a smooth open domain of $\mathbb{R}^2$. We set $u_0\in L^2(\Omega_0)$, h_0 and $h_0\log h_0\in L^1(\Omega)$, moreover, as P.-L. Lions in [7] or Orenga in [9], we suppose that:

$$\frac{1}{2}\int_\Omega |u_0|^2\,\mathrm{d}x + a\int_\Omega h_0\log h_0\,\mathrm{d}x < \frac{\mu^2}{2C_0^2} + a\int_\Omega h_0\log\overline{h_0}\,\mathrm{d}x$$

where $\overline{h_0}=\frac{1}{\Omega}\int_\Omega h_0\,\mathrm{d}x$ and C_0 is the best constant of the Gagliardo–Niremberg inequality

$$\|u\|_{L^4(\Omega)}\leqslant C_0\|u\|^{1/2}_{L^2(\Omega)}\|u\|^{1/2}_{H^1_0(\Omega)}.$$

The notion of weak solutions we use is: $h\geqslant 0$, $h\log h\in L^\infty(0,T;L^1(\Omega))$, $u\in L^\infty(0,T;L^2(\Omega))\cap L^2(0,T;H^1_0(\Omega))$ and the above equations hold in the distribution sense. Our goal is to extend a bound on h in $L^2(Q)$ obtained by Pierre-Louis Lions [8] for a problem with low Reynolds number to a problem with advection (shallow-water). Let B^x_η be the ball of center $x\in\Omega$ and radius η. We notice $\mathcal{H}^1(\mathbb{R}^2)$ the Hardy space characterized as follows:

$$\mathcal{H}^1(\mathbb{R}^2)=\Big\{f\in L^1(\mathbb{R}^2)\;\Big|\;\sup_{\eta\geqslant 0}|h_\eta * f|\in L^1(\mathbb{R}^2)\Big\}$$

where $h_\eta(x)=\eta^{-2}h(\frac{x}{\eta})\geqslant 0$, belongs to $C^\infty_0(\mathbb{R}^2)$ and satisfies $\operatorname{supp} h_\eta(x)\subset B^x_\eta$, $\int_{\mathbb{R}^2}h_\eta(x)\,\mathrm{d}x=1$ (see Fefferman and Stein [5], Coifman and Weiss [3]). In [2] and [6], the authors introduce Hardy spaces defined on bounded domains. One such space is $\mathcal{H}^1_z(\Omega)=\{f\in L^1(\Omega)\mid f_z\in\mathcal{H}^1(\mathbb{R}^2)\}$ where f_z is the zero extension of f to $\mathbb{R}^2$. All function f of $\mathcal{H}^1_z(\Omega)$ verifies $\int_\Omega f\,\mathrm{d}x=0$. We set

$$u\nabla u_i=\sum_{k=1}^{2}u_k\frac{\partial u_k}{\partial x_i}+(-1)^i u_j\operatorname{rot}u=T_0+T_1$$

with $i\neq j$. Our first result is (Section 2)

Lemme 0.1. *Under the previous assumptions,* $T_0\in L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))$, $T_1\in L^2(0,T;\mathcal{H}^1_z(\Omega))+L^1(0,T,W^{1,1}(\Omega))$.

A consequence of this regularity on the advection is (Section 3)

Théorème 0.2. *There exists a solution* (h,u) *such that* $h\in L^2(Q)$ *and* $u\in C^0([0,T];L^2(\Omega))$.

A similar result is obtained by Chatelon and Orenga in [1] when the following boundary conditions are considered: $u\cdot n=\operatorname{Curl}u=0$ on Σ.

1. Introduction

On s'intéresse aux solutions (h,u) de $(\mathcal{F})$. On pose $u_0\in L^2(\Omega_0)$, h_0 et $h_0\log h_0\in L^1(\Omega)$, de plus, comme P.-L. Lions dans [7] ou Orenga dans [9], on suppose que :

$$\frac{1}{2}\int_\Omega |u_0|^2\,\mathrm{d}x + a\int_\Omega h_0\log h_0\,\mathrm{d}x < \frac{\mu^2}{2C_0^2} + a\int_\Omega h_0\log\overline{h_0}\,\mathrm{d}x$$

où $\overline{h_0}=\frac{1}{\Omega}\int_\Omega h_0\,\mathrm{d}x$ et C_0 est la meilleure constante de l'inégalité de Gagliardo–Niremberg

$$\|u\|_{L^4(\Omega)}\leqslant C_0\|u\|^{1/2}_{L^2(\Omega)}\|u\|^{1/2}_{H^1_0(\Omega)}.$$

La notion de solutions faibles utilisée est : $h \geqslant 0$, $h \log h \in L^\infty(0,T;L^1(\Omega))$, $u \in L^\infty(0,T;L^2(\Omega)) \cap L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$ et les équations précédentes sont vérifiées au sens des distributions. Notre but est d'étendre une borne sur h dans $L^2(Q)$ obtenue par Pierre-Louis Lions [8] dans le cas d'un fluide avec faible nombre de Reynolds à un problème avec advection tel que celui de shallow-water. En utilisant certaines propriétés des espaces de Hardy, on montre des résultats de régularité sur le terme d'advection $(u \cdot \nabla)u$. A la Section 3, en utilisant ces résultats sur le terme d'advection et en adaptant la méthode décrite dans [8] on obtient la borne annoncée sur h dans $L^2(Q)$. En appliquant le théorème des dérivées intermédiaires à l'équation des moments, on vérifie que $u \in C^0([0,T];L^2(\Omega))$.

Un résultat similaire est montré par Chatelon et Orenga dans [1] pour des conditions aux limites du type $u \cdot n = \operatorname{rot} u = 0$ sur Σ. Avec ces conditions, cette régularité permet d'obtenir la régularité L^p et l'unicité de la solution ce qui n'est pas le cas ici.

2. Une estimation sur le terme d'advection $(u \cdot \nabla)u$

Soit B_η^x la boule de centre x et de rayon η. Dans la suite, on note $\mathcal{W}(\mathbb{R}^2)$ l'espace des fonctions $f \in \mathcal{H}^1(\mathbb{R}^2)$ dont la dérivée au sens des distribtuions Df est encore dans $\mathcal{H}^1(\mathbb{R}^2)$ l'espace de Hardy défini par :

$$\mathcal{H}^1(\mathbb{R}^2) = \Big\{ f \in L^1(\mathbb{R}^2) \;\Big|\; \sup_{\eta \geqslant 0} |h_\eta * f| \in L^1(\mathbb{R}^2) \Big\}$$

où $h_\eta(x) = \eta^{-2} h(\frac{x}{\eta}) \geqslant 0$, appartient à $C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ et vérifie : $\operatorname{supp} h_\eta(x) \subset B_\eta^x$, $\int_{\mathbb{R}^2} h_\eta(x)\,\mathrm{d}x = 1$ (voir Fefferman and Stein [5], Coifman and Weiss [3]). Notons que $\mathcal{W}(\mathbb{R}^2)$ est un sous espace de l'espace de Sobolev $W^{1,1}(\mathbb{R}^2)$. Dans [2] et [6], les auteurs introduisent des espaces de Hardy définis sur des domaines bornés. Un de ces espaces est :

$$\mathcal{H}_z^1(\Omega) = \big\{ f \in L^1(\Omega) \mid f_z \in \mathcal{H}^1(\mathbb{R}^2) \big\}$$

où f_z est le prolongement par 0 de f dans $\mathbb{R}^2$. Toute fonction f de $\mathcal{H}_z^1(\Omega)$ vérifie $\int_\Omega f\,\mathrm{d}x = 0$. On réécrit le terme d'advection sous la forme : $u\nabla u_i = \sum_{k=1}^2 u_k \frac{\partial u_k}{\partial x_i} + (-1)^i u_j \operatorname{rot} u = T_0 + T_1$ avec $i \neq j$. On montre alors le résultat suivant :

Lemme 2.1. *Sous les hypothèses de la Section* 1, $T_0 \in L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))$, $T_1 \in L^2(0,T;\mathcal{H}_z^1(\Omega)) + L^1(0,T, W^{1,1}(\Omega))$.

Démonstration. Dans ce qui suit, on note (h,u) une solution de (1) prolongée par $(0,0)$ dans $\mathbb{R}^2$. En particulier, u étant borné dans $L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$, on peut le prolonger ainsi que ses dérivées $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ par 0 dans $\mathbb{R}^2$. On vérifie facilement que T_0 est borné dans $L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))$ car u_k est borné dans $L^4(Q)$. Pour estimer T_1 dans un Hardy, on remarque que sur toute boule B_η^x de centre x et de rayon η, la restriction de u à B_η^x est bornée dans $L^\infty(0,T;L^2(B_\eta^x)) \cap L^2(0,T;H^1(B_\eta^x))$ et u peut s'écrire sur toute boule B_η^x :

$$u = \nabla p_\eta^x + \operatorname{Rot} q_\eta^x \tag{2}$$

où $q_\eta^x \in L^2(0,T;H_0^1(B_\eta^x))$ et $\operatorname{Rot} q_\eta^x \cdot n = 0$ sur ∂B_η^x [4].

Remarque 1. Soient B_η^x et $B_{\eta'}^{x'}$ deux boules telles que $B_\cap = B_\eta^x \cap B_{\eta'}^{x'} \neq \emptyset$. Sur chacune de ces boules u peut être décomposé de façon unique en utilisant (2). Il est clair que $\operatorname{Rot} q_\eta^x \neq \operatorname{Rot} q_{\eta'}^{x'}$ sur $B_\cap$, toutefois on a : $\operatorname{rot} u = \operatorname{rot}\operatorname{Rot} q_\eta^x = \operatorname{rot}\operatorname{Rot} q_{\eta'}^{x'}$ sur $B_\cap$.

En utilisant la décomposition (3) et la Remarque 1, sur toute boule B_η^x, il vient :

$$T_1 = -\operatorname{rot}(u_j \operatorname{Rot} q_\eta^x) + \operatorname{Rot} u_j \operatorname{Rot} q_\eta^x = A_\eta^x + C_\eta^x \tag{3}$$

où A_η^x vérifie :

$$\int\limits_\Omega A_\eta^x \,\mathrm{d}x = 0 \quad \text{and} \quad A_\eta^x = 0 \quad \text{on } \mathbb{R}^2 \backslash \Omega. \tag{4}$$

Pour établir le résultat annoncé sur T_1, on pose $I_1(x) = h_\eta * A_\eta^x(x)$ et $I_2(x) = h_\eta * \frac{\partial C_\eta^x}{\partial y}(x)$ puis on montre successivement que $\int \sup_{\eta>0} |I_1(x)| \,\mathrm{d}x \in L^2(0,T)$ et $\int \sup_{\eta>0} |I_2(x)| \,\mathrm{d}x \in L^1(0,T)$. Traitons en premier lieu le terme $I_1(x)$. On a :

$$I_1(x) = -\int\limits_{B_\eta^x} \frac{1}{\eta^2} \operatorname{Rot} h\left(\frac{x-y}{\eta}\right) u_j(y) \frac{\operatorname{Rot} q_\eta^x(y)}{\eta} \,\mathrm{d}y$$

et avec l'inégalité de Holder, il vient :

$$I_1(x) \leqslant C_1 \Bigg(\fint\limits_{B_\eta^x} |u_j|^\beta \Bigg)^{1/\beta} \Bigg(\fint\limits_{B_\eta^x} \big(|\operatorname{Rot} q_\eta^x| \eta^{-1}\big)^{\beta'} \Bigg)^{1/\beta'}.$$

Or, la moyenne de $\operatorname{Rot} q_\eta^x$ étant nulle sur B_η^x et sachant que $\operatorname{Rot} q_\eta^x \cdot n = 0$ sur ∂B_η^x, en utilisant l'inégalité de Poincaré–Sobolev et la remarque précédente, on obtient :

$$\Bigg(\fint\limits_{B_\eta^x} \big(|\operatorname{Rot} q_\eta^x| \eta^{-1}\big)^{\beta'} \Bigg)^{1/\beta'} \leqslant C_2 \Bigg(\fint\limits_{B_\eta^x} |\operatorname{rot} \operatorname{Rot} q_\eta^x|^\alpha \Bigg)^{1/\alpha} = C_2 \Bigg(\fint\limits_{B_\eta^x} |\operatorname{rot} u|^\alpha \Bigg)^{1/\alpha}$$

avec $\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{\beta} = \frac{1}{\beta'}$. Ainsi, en posant $\sup_{\eta>0} \fint_{B_\eta^x} |f| = M(f)$, il vient :

$$\int \sup_{\eta>0} \big|I_1(x)\big| \,\mathrm{d}x \leqslant C_3 \int\limits_\Omega \big(M\big(|u_j|^\beta\big)\big)^{1/\beta} \big(M\big(|\operatorname{rot} u|^\alpha\big)\big)^{1/\alpha} \,\mathrm{d}x$$

et avec l'inégalité de Holder :

$$\int \sup_{\eta>0} \big|I_1(x)\big| \,\mathrm{d}x \leqslant C_3 \big\| M\big(|u_j|^\beta\big)\big\|_{L^{p/\beta}}^{1/\beta} \big\| M\big(|\operatorname{rot} u|^\alpha\big)\big\|_{L^{p'/\beta}}^{1/\alpha}, \qquad \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1.$$

Finalement, si on choisit $\beta < p$ et $\alpha < p'$, le théorème du maximum de Hardy–Littlewood montre que :

$$\int \sup_{\eta>0} \big|I_1(x)\big| \,\mathrm{d}x \leqslant C_3 \|u_j\|_{L^p(\Omega)} \|\operatorname{rot} u\|_{L^{p'}(\Omega)}. \tag{5}$$

Si on pose $p = p' = 2$, alors (5) montre que :

$$\int \sup_{\eta>0} \big|I_1(x)\big| \,\mathrm{d}x \in L^2(0,T). \tag{6}$$

Ainsi $A_\eta^x \in L^2(0,T;\mathcal{H}^1(\mathbb{R}^2))$ et compte tenu des propriétés (4), $A_\eta^x \in L^2(0,T;\mathcal{H}_z^1(\Omega))$. Estimons maintenant $I_2(x)$. On a :

$$I_2(x) = \int\limits_{B_\eta^x} \frac{1}{\eta^2} \frac{\partial h}{\partial y}\left(\frac{x-y}{\eta}\right) \operatorname{Rot} u_j(y) \frac{\operatorname{Rot} q_\eta^x(y)}{\eta} \,\mathrm{d}y.$$

En utilisant les mêmes arguments que pour $I_1(x)$, on montre que

$$\int \sup_{\eta>0} \big|I_2(x)\big| \,\mathrm{d}x \leqslant C_4 \|\operatorname{Rot} u_j\|_{L^2(\Omega)} \|\operatorname{rot} u\|_{L^2(\Omega)}.$$

Ainsi :

$$\int \sup_{\eta>0} \left| I_2(x) \right| \mathrm{d}x \in L^1(0,T) \tag{7}$$

et $C_\eta^x \in L^1(0,T;\mathcal{W}(\mathbb{R}^2))$. Comme $\mathcal{W}(\mathbb{R}^2) \subset W^{1,1}(\mathbb{R}^2)$ il est clair que $C_\eta^x \in L^1(0,T;W^{1,1}(\Omega))$. Des résultats (6) et (7) on déduit l'estimation annoncée sur T_1 dans $L^2(0,T;\mathcal{H}_z^1(\Omega)) + L^1(0,T,W^{1,1}(\Omega))$. □

3. Une borne sur h dans L^2

L'estimation obtenue sur $(u\cdot\nabla)u$ permet de montrer le résultat :

Théorème 3.1. *Il existe une solution (h,u) de $(\mathcal{F})$ telle que $h \in L^2(Q)$ et $u \in C^0([0,T];L^2(\Omega))$.*

Démonstration. Pour obtenir une borne sur h dans $L^2(Q)$ on s'inspire des travaux de P.-L. Lions dans [8]. On introduit l'opérateur de Stokes $S(\Pi) = p$ où (s,p) est l'unique solution de $-\Delta s + \nabla p = \Pi$ dans Ω, $\operatorname{div} s = 0$ dans Ω, $s = 0$ sur $\partial\Omega$ et $\int_\Omega p\,\mathrm{d}x = 0$. On sait que S est borné de $W^{-1,r}(\Omega)$ dans $L^r(\Omega)$ et de $L^r(\Omega)$ dans $W^{1,r}(\Omega)$ avec $1 < r < \infty$. On pose $\Pi = -\mu\Delta u \in L^2(0,T;W^{-1,2}(\Omega))$, alors $p = S(-\mu\Delta u) \in L^2(\Omega\times(0,T))$ et l'équation des moments sur $\Omega\times(0,T)$ s'écrit :

$$-\Delta s + \nabla(p + ah) = -\frac{\partial u}{\partial t} - (u\cdot\nabla)u.$$

Ainsi :

$$p + ah - a\bar{h} = -S\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right) - S\big((u\cdot\nabla)u\big) \tag{8}$$

où $\bar{h} = \frac{1}{\Omega}\int_\Omega h_0\,\mathrm{d}x$. Le domaine Ω étant indépendant du temps, alors $S(\frac{\partial u}{\partial t}) = \frac{\partial S(u)}{\partial t}$ et l'Éq. (7) conduit à :

$$a\|h\|^2_{L^2(\Omega\times(0,T))} = \int\limits_{\Omega\times(0,T)} (-p + a\bar{h})h - \int\limits_{\Omega\times(0,T)} h\frac{\partial S(u)}{\partial t} - \int\limits_{\Omega\times(0,T)} S\big((u\cdot\nabla)u\big)h. \tag{9}$$

Dans le second membre de (8), le premier terme s'estime aisément en fonction de $\|h\|_{L^2(\Omega\times(0,T))}$. Pour le second, on a :

$$-\int\limits_{\Omega\times(0,T)} h\frac{\partial S(u)}{\partial t} = -\int_0^T \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega S(u)h + \int\limits_{\Omega\times(0,T)} S(u)\frac{\partial h}{\partial t}. \tag{10}$$

On introduit les espaces de Orlicz $L_{\mathcal{A}}(\Omega)$, $L_{\mathcal{A}'}(\Omega)$ et $L_{\tilde{\mathcal{A}}'}(\Omega)$ où $\mathcal{A}$ est la N-fonction définie par $\mathcal{A}(t) = \exp(t^2) - 1$ et $\mathcal{A}'$ est la N-fonction complémentaire à $\mathcal{A}$, équivalente à la N-fonction $\tilde{\mathcal{A}}'$ définie par $\tilde{\mathcal{A}}'(t) = t\sqrt{\log^+(t)}$. Or $h\log h \in L^\infty(0,T;L^1(\Omega))$ et $S(u) \in L^\infty(0,T;V)$ où V est l'ensemble des fonctions de $H^1(\Omega)$ de moyenne nulle. Ainsi, en utilisant l'inégalité de Trudinger, $\|S(u)\|_{L_{\mathcal{A}}(\Omega)} \leqslant k\|u\|_{L^2(\Omega)}$ et on obtient :

$$\int_\Omega S(u)h \leqslant C_5\big\|S(u)\big\|_{L_{\mathcal{A}}(\Omega)}\|h\|_{L_{\mathcal{A}'}(\Omega)} \quad \text{borné dans } L^\infty(0,T). \tag{11}$$

En outre, on a $u\nabla S(u) \in L^2(\Omega\times(0,T))$ et en utilisant l'équation de continuité :

$$\int\limits_{\Omega\times(0,T)} S(u)\frac{\partial h}{\partial t} = \int\limits_{\Omega\times(0,T)} \nabla S(u)uh \leqslant C_6\big(1 + \|h\|_{L^2(\Omega\times(0,T))}\big). \tag{12}$$

En portant (10)–(12) dans (9), il vient :

$$a\|h\|^2_{L^2(\Omega\times(0,T))}\leqslant C_7\big(1+\|h\|_{L^2(\Omega\times(0,T))}\big)+\int\limits_{\Omega\times(0,T)} S\big((u\cdot\nabla)u\big)h. \tag{13}$$

La principale difficulté concerne l'estimation du dernier terme de (13) et pour le majorer, le résultat sur le terme d'advection s'avère utile. En décomposant le terme d'advection comme à la Section 2, il vient :

$$\int\limits_{\Omega\times(0,T)} S\big((u\cdot\nabla)u\big)h=\sum_{i=0}^{1}\int\limits_{\Omega\times(0,T)} S(T_i)h. \tag{14}$$

Or, on sait que $T_0\in L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))$ et que $T_1=T_{11}+T_{12}$ avec $T_{11}\in L^2(0,T;\mathcal{H}^1_z(\Omega))$ et $T_{12}\in L^1(0,T;W^{1,1}(\Omega))$. Comme $\mathcal{H}^1_z(\Omega)\subset H^{-1}(\Omega)$ alors $S(T_0)$ et $S(T_{11})$ sont bornés dans $L^2(\Omega\times(0,T))$. Ainsi :

$$\sum_{i=0}^{1}\int\limits_{\Omega\times(0,T)} S(T_i)h\leqslant\big(\big\|S(T_0)\big\|_{L^2(\Omega\times(0,T))}+\big\|S(T_{11})\big\|_{L^2(\Omega\times(0,T))}\big)\|h\|_{L^2(\Omega\times(0,T))}+\int\limits_{\Omega\times(0,T)} S(T_{12})h. \tag{15}$$

En outre, comme $W^{1,1}(\Omega)\subset L^2(\Omega)$, alors $S(T_{12})$ est borné dans $L^1(0,T;V)$. En utilisant le fait que $\|S(T_{12})\|_{L^1(0,T;L_{\mathcal{A}}(\Omega))}\leqslant k\|T_{12}\|_{L^1(0,T;L^2(\Omega))}$, il vient :

$$\int\limits_{\Omega\times(0,T)} S(T_{12})h\leqslant 2\int_0^T\big\|S(T_{12})\big\|_{L_{\mathcal{A}}(\Omega)}\|h\|_{L_{\mathcal{A}'}(\Omega)}\leqslant C_8\|T_{12}\|_{L^1(0,T;L^2(\Omega))}\sup_\tau\bigg(\int\limits_\Omega\tilde{\mathcal{A}}'\big(h(\tau)\big)\,\mathrm{d}x+1\bigg) \tag{16}$$

d'où l'on tire une borne sur $\int_{\Omega\times(0,T)} S(T_{12})h$. Finalement, en portant (14)–(15) dans (12), on parvient à :

$$\|h\|^2_{L^2(\Omega\times(0,T))}-C_9\|h\|_{L^2(\Omega\times(0,T))}-C_{10}\leqslant 0 \tag{17}$$

d'où l'on déduit que h est borné dans $L^2(Q)$. La borne sur u dans $C^0([0,T];L^2(\Omega))$ est une conséquence directe du théorème des dérivées intermédiaires appliqué à l'équation des moments. □

Remerciement

Les auteurs remercient Benoît Desjardins du CEA de Bruyères-le-Chatel pour ses commentaires et ses conseils. Ce travail est soutenu par le programme Interreg III Sardaigne-Corse-Toscane.

Références

[1] F.-J. Chatelon, P. Orenga, Some smoothness and uniqueness results for a shallow water problem, Adv. Differential Equations 3 (1998) 155–176.
[2] D.C. Chang, S.G. Krantz, E.M. Stein, H^p theory on a smooth domain in $\mathbb{R}^N$ and elliptic boundary problems, J. Funct. Anal. 115 (1993) 425–431.
[3] R. Coifman, G. Weiss, Extensions of Hardy spaces and their use in analysis, Bull. Amer. Math. Soc. 83 (1977) 569–645.
[4] R. Dautray, J.L. Lions, Analyse mathématique, calcul numrique pour les sciences et techniques. Tome 5, Masson, Paris, 1985.
[5] C. Fefferman, E. Stein, H^p spaces of several variables, Acta Math. 228 (1972) 137–193.
[6] J. Hogan, C. Li, A. McIntosh, K. Zhang, Global higher integrability of Jacobians on bounded domains, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire 17 (2000) 193–217.
[7] P.-L. Lions, Mathematical Topics in Fluid Mechanics, vol. 2, Oxford University Press, 1998.
[8] P.-L. Lions, Bornes sur la densité pour les équations de Navier–Stokes compressibles isentropiques avec conditions aux limites de Dirichlet, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 328 (1999) 659–662.
[9] P. Orenga, Un théorème d'existence de solutions d'un problème de shallow water, Arch. Ration. Mech. Anal. 130 (1995) 183–204.