



Probabilités

Marches aléatoires sur certains groupes unimodulaires p -adiques

Sami Mustapha

Institut mathématique de Jussieu, 175, rue du Chevaleret, 75013 Paris, France

Reçu le 3 novembre 2004 ; accepté le 20 décembre 2004

Disponible sur Internet le 2 février 2005

Présenté par Marc Yor

Résumé

On donne des estimations centrales et hors diagonales du noyau de transition d’une marche aléatoire simple sur certains groupes p -adiques unimodulaires résolubles. **Pour citer cet article :** *S. Mustapha, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 340 (2005).*
© 2005 Académie des sciences. Publié par Elsevier SAS. Tous droits réservés.

Abstract

Random walks on certain unimodular p -adic groups. We give central and off-diagonal estimates for the transition kernels corresponding to simple random walks on certain unimodular solvable p -adic groups. **To cite this article :** *S. Mustapha, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 340 (2005).*
© 2005 Académie des sciences. Publié par Elsevier SAS. Tous droits réservés.

1. Estimations centrales

On fixe p un nombre premier et on note \mathbf{Q}_p le corps des nombres p -adiques (cf. [2]). On suppose \mathbf{Q}_p muni de sa valeur absolue standard $|\cdot|$. On note $\mathbf{Z}_p^* = \{x \in \mathbf{Q}_p^*, |x| = 1\}$ où \mathbf{Q}_p^* désigne le groupe multiplicatif du corps \mathbf{Q}_p . On note $\mathbf{Z}_p = \{x \in \mathbf{Q}_p, |x| \leq 1\}$. On désigne par dx la mesure de Haar sur le groupe \mathbf{Q}_p normalisée par $dx(\mathbf{Z}_p) = 1$ et par d^*x la mesure de Haar sur \mathbf{Q}_p^* normalisée par $d^*x(\mathbf{Z}_p^*) = 1$. Pour $k \geq 2, l \geq 1$ fixés on considère le produit semi-direct

$$G = \mathbf{Q}_p^k \rtimes_{\sigma} (\mathbf{Q}_p^*)^l \tag{1}$$

où l’action σ de $(\mathbf{Q}_p^*)^l$ sur l’espace vectoriel \mathbf{Q}_p^k est définie par la donnée de k morphismes

$$\chi_1, \dots, \chi_k : (\mathbf{Q}_p^*)^l \longrightarrow \mathbf{Q}_p^*$$

le produit de deux élément $g, g' \in G$ étant défini par :

Adresse e-mail : sam@math.jussieu.fr (S. Mustapha).

$$g \cdot g' = (x_1 + \chi_1(y)x'_1, x_2 + \chi_2(y)x'_2, \dots, x_k + \chi_k(y)x'_k; y_1 \cdot y'_1, y_2 \cdot y'_2, \dots, y_l \cdot y'_l),$$

$$g = (x, y), \quad g' = (x', y') \in G; \quad x = (x_1, \dots, x_k), x' = (x'_1, \dots, x'_k) \in \mathbf{Q}_p^k;$$

$$y = (y_1, \dots, y_l), y' = (y'_1, \dots, y'_l) \in (\mathbf{Q}_p^*)^l.$$

Nous supposons que les $\chi_j, j = 1, \dots, k$, vérifient

$$|\chi_1(y)| \cdots |\chi_k(y)| = 1, \quad y \in (\mathbf{Q}_p^*)^l, \tag{2}$$

$$|\chi_j| \neq 1, \quad j = 1, \dots, k. \tag{3}$$

L'hypothèse (2) assure l'unimodularité du groupe G défini par (1) et l'hypothèse (3) assure que ce groupe est à génération compacte (cf. [1,3]). Nous noterons $dg = dx \, d^*y = dx_1 \cdots dx_k \, d^*y_1 \cdots d^*y_l$ la mesure de Haar sur G . Soit $d\mu(g) = \varphi(g) \, dg$ la mesure de probabilité sur G définie par

$$\varphi(g) = \alpha I_{\mathbf{Z}_p}(x_1) \cdots I_{\mathbf{Z}_p}(x_k) I_{\mathbf{Z}_p}(\chi_1(y)^{-1}x_1) \cdots I_{\mathbf{Z}_p}(\chi_k(y)^{-1}x_k) I_{(p^{-1}\mathbf{Z}_p^* \cup p\mathbf{Z}_p^*)}(y_1) \cdots I_{(p^{-1}\mathbf{Z}_p^* \cup p\mathbf{Z}_p^*)}(y_l),$$

$$g = (x_1, \dots, x_k; y_1, \dots, y_l) \in G,$$

où $\alpha > 0$ est une constante de normalisation et où la notation I_A est utilisée pour désigner l'indicatrice d'un ensemble A . Nous appellerons la marche aléatoire sur G induite par μ la marche aléatoire simple sur le groupe G . Nous désignerons par $d\mu^{*n}(g) = d(\mu * \cdots * \mu)(g) = \varphi_n(g) \, dg, n = 1, 2, \dots$, les puissances de convolution successives de la mesure de probabilité μ . Il est facile de vérifier que G est engendré par le support de μ , i.e. $G = \bigcup_{n \geq 1} (\text{supp}(\mu))^n$.

Observons que l'hypothèse (3) implique que G est à croissance exponentielle du volume (cf. [5]). On a alors, d'après les résultats généraux de [4] :

$$\varphi_n(e) \leq C \exp(-cn^{1/3}), \quad n \geq 1, \tag{4}$$

où e désigne l'identité de G et où les constantes $C, c > 0$ sont indépendantes de n .

Théorème 1.1. Avec les notations ci-dessus on a :

$$\varphi_{2n}(e) \geq c \exp(-Cn^{1/3}), \quad n = 1, 2, \dots, \tag{5}$$

où les constantes $C, c > 0$ sont indépendantes de n .

2. Estimations hors diagonales

Les estimations centrales précédentes peuvent être complétées par des estimations hors diagonales.

Théorème 2.1. Soient $G = \mathbf{Q}_p^k \rtimes_{\sigma} (\mathbf{Q}_p^*)^l, \varphi_n$ comme ci-dessus. Alors

$$\varphi_n(g) \leq Cn^{-l/4} \prod_{j=1}^k \min(1, |\chi_j(y)^{-1}x_j|^{-1}) \exp\left(-\frac{\sum_{j=1}^k (\log^+ |\chi_j(y)^{-1}x_j|)^2 + \sum_{j=1}^l (\log |y_j|)^2}{Cn}\right),$$

$$g = (x_1, \dots, x_k; y_1, \dots, y_l) \in G, \quad n = 1, 2, \dots,$$

où la constante $C > 0$ est indépendante de n et g .

Observons que l'exposant $l/4$ dans l'estimation précédente n'est pas optimal. La preuve de cette estimation permet aussi d'établir

$$\varphi_n(g) \leq C_{\epsilon} n^{-l/2+\epsilon} \prod_{j=1}^k \min(1, |\chi_j(y)^{-1}x_j|^{-1}) \exp\left(-\frac{\sum_{j=1}^k (\log^+ |\chi_j(y)^{-1}x_j|)^2 + \sum_{j=1}^l (\log |y_j|)^2}{C_{\epsilon}}\right) \tag{6}$$

pour tout $\epsilon > 0$.

Si on suppose que le point $g \in G$ satisfait certaines hypothèses supplémentaires (par exemple,

$$\prod_{j=1}^k \min(1, |\chi_j(y)^{-1} x_j|^{-1}) \geq e^{-cn^{1/3}},$$

pour une constante $c > 0$ convenable) on peut alors améliorer substantiellement l'estimation hors diagonale et remplacer le facteur polynômial $n^{-l/2+\epsilon}$ apparaissant dans le membre de droite de (6) par un facteur $e^{-cn^{1/3}}$. Un tel facteur est naturel étant donné les estimations centrales (4) et (5). On a :

Théorème 2.2. Avec les notations ci-dessus on a :

$$\varphi_n(g) \leq C e^{-cn^{1/3}} \prod_{j=1}^k \min(1, |\chi_j(y)^{-1} x_j|^{-1/2}), \tag{7}$$

$$g = (x, y) \in G, \quad n = 1, 2, \dots,$$

où les constantes $C, c > 0$ sont indépendantes de n et g .

En interpolant entre (6) et (7) on déduit alors facilement que $\varphi_n(g)$ vérifie l'estimation

$$\begin{aligned} \varphi_n(g) &\leq C \prod_{j=1}^k \min(1, |\chi_j(y)^{-1} x_j|^{-1/2}) \min\left(\prod_{j=1}^k \min(1, |\chi_j(y)^{-1} x_j|^{-1/2}), e^{-cn^{1/3}}\right) \\ &\quad \times \exp\left(-\frac{\sum_{j=1}^k (\log^+ |\chi_j(y)^{-1} x_j|)^2 + \sum_{j=1}^l (\log |y_j|)^2}{Cn}\right) \\ g &= (x_1, \dots, x_k; y_1, \dots, y_l) \in G, \quad n = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Les preuves des estimations précédentes reposent sur l'utilisation d'une formule explicite pour $\varphi_n(g)$ que nous donnons dans le paragraphe suivant.

3. Une formule explicite

En plus des notations précédentes nous allons utiliser les notations suivantes. Nous noterons $y_i = (y_{i,1}, \dots, y_{i,l})$ une suite d'éléments $y_i \in (\mathbf{Q}_p^*)^l, i = 1, 2, \dots$. Pour $j = 1, \dots, k; y, y_1, \dots, y_n \in (\mathbf{Q}_p^*)^l (n = 1, 2, \dots)$ nous désignerons par $S_j(y; y_1, \dots, y_n) \subset \mathbf{Q}_p$ la partie de \mathbf{Q}_p définie par

$$\begin{aligned} S_j(y; y_1, \dots, y_n) &= \min\left(\max(1, |\chi_j(y_1)|^{-1}); \min_{2 \leq i \leq n} |\chi_j(y_1 \cdots y_{i-1})^{-1}| \max(1, |\chi_j(y_i)|^{-1}); \right. \\ &\quad \left. \max(1, |\chi_j(y_1 \cdots y_n y)|^{-1})\right) \mathbf{Z}_p. \end{aligned}$$

Nous désignerons enfin par $Y_1, Y_2, \dots \in (\mathbf{Q}_p^*)^l$ une suite de variables aléatoires indépendantes équidistribuées à valeurs $\in (\mathbf{Q}_p^*)^l$ dont la loi est donnée par

$$\mathbf{P}[Y_1 \in dy] = \alpha \left(\prod_{j=1}^k \min(1, |\chi_j(y)|) \right) I_{(p^{-1}\mathbf{Z}_p^* \cup p\mathbf{Z}_p^*)}(y_1) \cdots I_{(p^{-1}\mathbf{Z}_p^* \cup p\mathbf{Z}_p^*)}(y_l) d^* y.$$

Soit $g = (x, y) \in G$ et $n = 1, 2, \dots$. On a :

$$\varphi_{n+1}(g) = \alpha \mathbf{E} \left(\prod_{j=1}^k \min \left[1; \min(\max(1, |\chi_j(Y_1)|^{-1}), \right. \right. \\ \left. \left. \min_{2 \leq i \leq n} |\chi_j(Y_1 \cdots Y_{i-1})|^{-1} \max(1, |\chi_j(Y_i)|^{-1}) \min(1, |\chi_j(Y_1 \cdots Y_n y)|) \right] \right. \\ \left. \prod_{j=1}^k I_{S_j(y; Y_1, \dots, Y_n)}(\chi_j(Y_1 \cdots Y_n) x_j) \prod_{j=1}^l I_{(p^{-1}\mathbf{Z}_p^* \cup p\mathbf{Z}_p^*)}(Y_{1,j} \cdots Y_{n,j} y_j) \right).$$

Références

- [1] A. Borel, J. Tits, Groupes réductifs, Publ. Math. IHES 27 (1965) 55–150.
- [2] J.W.S. Cassels, Local Fields, Cambridge University Press, Cambridge, 1986.
- [3] Y. Guivarc’h, Croissance polynomiale et périodes des fonctions harmoniques, Bull. Soc. Math. France 101 (1973) 333–379.
- [4] W. Hebisch, L. Saloff-Coste, Gaussian estimates for Markov chains and random walks on groups, Ann. Probab. 21 (1993) 673–709.
- [5] C.R.E. Raja, On classes of p -adic Lie groups, New York J. Math. 5 (1999) 101–105.