Available online at www.sciencedirect.com
SCIENCE DIRECT
C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 340 (2005) 119–124
COMPTES RENDUS MATHEMATIQUE
http://france.elsevier.com/direct/CRASS1/

Équations aux dérivées partielles/Physique mathématique

Le problème de Cauchy local pour les plasmas dissipatifs

Vincent Giovangigli, Benjamin Graille

CMAP, École polytechnique, 91128 Palaiseau cedex, France

Reçu le 20 octobre 2004 ; accepté le 3 décembre 2004

Présenté par Pierre-Louis Lions

Résumé

On étudie un système d'équations aux dérivées partielles modélisant les plasmas réactifs dissipatifs. Les flux de transport comprennent des combinaisons linéaires anisotropes des gradients et des termes d'ordre zéro dus au champ électromagnétique et les termes sources dépendent des gradients. En utilisant les variables entropiques, on récrit le système de lois de conservation sous une forme partiellement symétrique, puis sous la forme d'un système quasi-linéaire partiellement symétrique hyperbolique-parabolique. En utilisant un résultats de Vol'Pert et Hudjaev, on démontre un théorème local d'existence et d'unicité d'une solution bornée et régulière pour le problème de Cauchy. ***Pour citer cet article : V. Giovangigli, B. Graille, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 340 (2005).***

Abstract

The local Cauchy problem for dissipative plasmas. We investigate a system of partial differential equations modeling dissipative plasmas. Transport fluxes are anisotropic linear combinations of gradients and also include zeroth order contributions due to electromagnetic forces. There are also source terms depending on the solution gradient. By using entropic variables, we first recast the system in a partially symmetric form and next in the form of a quasilinear partially symmetric hyperbolic-parabolic system. Using a result of Vol'Pert and Hudjaev, we prove local existence and uniqueness of a bounded smooth solution to the Cauchy problem. ***To cite this article: V. Giovangigli, B. Graille, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 340 (2005).***

Abridged English version

We consider the equations governing reactive ionized magnetized dissipative gas mixtures. These equations are derived from the kinetic theory of dilute polyatomic ionized reactive gas and can be split between conservation equations, transport fluxes, thermochemistry, and Maxwell's equations [8,3]. The conservation equations are given

Adresses e-mail : vincent.giovangigli@polytechnique.fr (V. Giovangigli), graille@cmapx.polytechnique.fr (B. Graille).

1631-073X/$ – see front matter
doi:10.1016/j.crma.2004.12.009

by (1), where ∂_t is the time derivative operator, ∂_i the space derivative operator in the ith direction, $\mathrm{C} = \{1, 2, 3\}$ the indexing set of spatial coordinates, U the conservative variable (2), $\Omega^{\boldsymbol{j}}$ the source term (3), F_i the convective flux in the ith direction (4), and $\mathsf{F}_i^{\mathrm{diss}}$ the dissipative flux in the ith direction (5). The diffusive fluxes are expressed in terms of the diffusion velocities (6), the heat flux (8), and the pressure tensor (9). We observe fundamental differences between the cases of nonionized and ionized mixtures. A first remarkable aspect of dissipative plasmas is that the dissipative terms $\mathsf{F}_i^{\mathrm{diss}}$ (10), $i \in \mathrm{C}$, are anisotropic linear combinations of the solution gradients [9,2,1,3]. These terms however contain the zeroth order contributions G_i, $i \in \mathrm{C}$, arising from the direct action of electromagnetic forces. A third aspect is that the source term $\Omega^{\boldsymbol{j}}$ (11) not only depends on U but also on its gradient $\boldsymbol{\partial}_x \mathsf{U}$ through the current $\boldsymbol{j}$ appearing in Maxwell's equations. These terms are also related through entropy.

In order to structure this system of partial differential equations, we introduce the vector of the entropic variables V (13). The resulting quasilinear system written in terms of V has symmetry properties that generalise that of Kawashima and Shizuta [9,10] to the situation of hyperbolic-parabolic systems with zeroth order contributions in dissipative fluxes and gradient dependent source terms (Theorem 2.1). We then obtain the conservation equation for the entropy upon multiplying the symmetrized system (14) by the entropic variable V (15) and it is fundamental to note that the zeroth order contributions are included in the entropy production term associated with dissipative processes [3,5,8]. We next rewrite this system by regrouping with the convective terms all first order derivatives arising from the zeroth order contributions of dissipative fluxes and from the gradient dependent source terms. In order to separate hyperbolic and parabolic variables, we investigate the nullspace invariance property [8] in Proposition 2.2. We then introduce the partial normal variables $\mathsf{W} = (\mathsf{W}_{\mathrm{I}}, \mathsf{W}_{\mathrm{II}})^{\mathsf{T}}$ where W_{I} corresponds to the hyperbolic variables and W_{II} to the parabolic variables (16). The system of dissipative plasmas can now be recast into a partially normal form (17), that is to say into a partially symmetric hyperbolic-parabolic composite form. We use the term partial symmetric since the resulting effective first order differential operators involve nonsymmetric matrices in contrast with the nonionized case [9,10,6,2]. However, the bloc structure of the additional first order differential operators insures that the symmetry properties concerning the hyperbolic subsystem are conserved.

We then investigate well posedness of the Cauchy problem by using a simplified quasilinear version of an existence theorem proved by Vol'Pert and Hudjaev [11,6] concerning symmetric hyperbolic-parabolic systems. The solutions are investigated in the space $V_l(\mathbb{R}^3)$ defined by the norm (18), where l is an integer greater than $9/2$. Using the partially normal form obtained previously, we prove local existence and uniqueness, in the space $V_l(\mathbb{R}^3)$, for the Cauchy problem (17) with an initial condition $\mathsf{W}^0 \in V_l(\mathbb{R}^3)$ such that $\inf_{\mathbb{R}^3} \rho^0 > 0$ and $\inf_{\mathbb{R}^3} T^0 > 0$. Moreover, the solution is continuous with its derivatives of first order in t and second order in x, and the quantities (19) are finite.

Consider an equilibrium state W^e such $\boldsymbol{E}^e = \boldsymbol{B}^e = \boldsymbol{v}^e = 0$. One can establish that the matrices $\bar{\mathsf{A}}_i^{\mathrm{ae}}$, $i \in \mathrm{C}$, are antisymmetric and never vanish, so that we cannot apply classical existence theorems [9,7,2]. Nevertheless, in the ambipolar approximation obtained for vanishing Debye length, the system can be recast into a full symmetric system and the asymptotic stability around constant equilibrium states is established in [4]. The ambipolar model is also stable when the electron mass goes to zero [4].

1. Equations pour les plasmas dissipatifs

On s'intéresse aux équations régissant les mélanges gazeux réactifs ionisés magnétisés et dissipatifs. Ces équations sont issues de la théorie cinétique des mélanges gazeux polyatomiques réactifs ionisés [8,3]. Elles se décomposent en équations de conservation, expressions des flux de transport, relations thermochimiques et équations de Maxwell. Les équations de conservation de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie s'écrivent sous la forme compacte

$$\partial_t \mathsf{U} + \sum_{i\in\mathrm{C}} \partial_i \mathsf{F}_i + \sum_{i\in\mathrm{C}} \partial_i \mathsf{F}_i^{\mathrm{diss}} = \Omega^{\boldsymbol{j}}, \tag{1}$$

où ∂_t est l'opérateur de dérivation temporelle, ∂_i l'opérateur de dérivation spatiale dans la i^{e} direction, $\mathrm{C}=\{1,2,3\}$ l'ensemble des indices des coordonnées spatiales, U la variable conservative, F_i le flux convectif dans la i^{e} direction, $\mathsf{F}_i^{\mathrm{diss}}$ le flux dissipatif dans la i^{e} direction et $\boldsymbol{\Omega}^{\boldsymbol{j}}$ le terme source. La variable U est définie par

$$\mathsf{U}=(\varrho,\rho\boldsymbol{v},\boldsymbol{E},\boldsymbol{B},\rho e^{\mathrm{t}})^{\mathsf{T}}, \tag{2}$$

où $\varrho=(\rho_1,\ldots,\rho_{n^s})^{\mathsf{T}}$ est le vecteur des masses volumiques, ρ_k, $k\in\mathrm{S}$, la masse volumique de la k^{e} espèce, $\mathrm{S}=\{1,\ldots,n^s\}$ l'ensemble des indices des espèces, n^s le nombre d'espèces dans le mélange, $\rho=\sum_{k\in\mathrm{S}}\rho_k$ la masse volumique totale, $\boldsymbol{v}$ la vitesse macroscopique, $\boldsymbol{E}$ le champ électrique, $\boldsymbol{B}$ le champ magnétique et $e^{\mathrm{t}}=e+\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}/2+\varepsilon_0\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{E}/2+\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{B}/2\mu_0$ l'énergie massique totale, e l'énergie interne massique, ε_0 la constante diélectrique du vide et μ_0 la perméabilité magnétique du vide. Le terme source $\boldsymbol{\Omega}^{\boldsymbol{j}}$ s'écrit

$$\boldsymbol{\Omega}^{\boldsymbol{j}}=\big(m_1\omega_1,\ldots,m_{n^s}\omega_{n^s},\rho\boldsymbol{g}+q(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{v}\wedge\boldsymbol{B})+\boldsymbol{j}\wedge\boldsymbol{B},-(q\boldsymbol{v}+\boldsymbol{j})/\varepsilon_0,0_{1,3},\rho\boldsymbol{g}\cdot\boldsymbol{v}\big)^{\mathsf{T}}, \tag{3}$$

où $m_k\omega_k$, $k\in\mathrm{S}$, est le taux massique de production chimique, $\boldsymbol{g}$ une force externe qui ne dépend pas des espèces, $q=\sum_{k\in\mathrm{S}}q_k$ la charge volumique totale, q_k, $k\in\mathrm{S}$, la charge volumique de la k^{e} espèce et $\boldsymbol{j}$ la densité de courant de conduction. Les flux convectifs F_i, $i\in\mathrm{C}$, sont donnés par

$$\mathsf{F}_i=\big(v_i\varrho,\rho v_i\boldsymbol{v}+p\boldsymbol{e}_i,-\boldsymbol{e}_i\wedge\boldsymbol{B}/(\varepsilon_0\mu_0),\boldsymbol{e}_i\wedge\boldsymbol{E},(\rho e^{\mathrm{t}}+p)v_i+P_i\big)^{\mathsf{T}}, \tag{4}$$

où $\boldsymbol{e}_i$, $i\in\mathrm{C}$, est le i^{e} vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^3$, p la pression thermodynamique, $\boldsymbol{P}=\boldsymbol{E}\wedge\boldsymbol{B}/\mu_0$ le vecteur de Poynting. Les flux dissipatifs $\mathsf{F}_i^{\mathrm{diss}}$, $i\in\mathrm{C}$, ont pour expression

$$\mathsf{F}_i^{\mathrm{diss}}=(\rho_1V_{1i},\ldots,\rho_{n^s}V_{n^si},\Pi_{i1},\Pi_{i2},\Pi_{i3},0_{1,3},0_{1,3},\mathcal{Q}_i+\boldsymbol{\Pi}_{i\cdot}\cdot\boldsymbol{v})^{\mathsf{T}}, \tag{5}$$

où $\boldsymbol{V}_k$, $k\in\mathrm{S}$, est la vitesse de diffusion de la k^{e} espèce, $\boldsymbol{\Pi}$ le tenseur de viscosité et $\boldsymbol{\mathcal{Q}}$ le flux de chaleur. Une des particularités des plasmas dissipatifs est l'anisotropie des flux de transport lorsque le champ magnétique est intense [1,3]. Pour la prendre en compte, on définit le vecteur unitaire $\boldsymbol{\mathcal{B}}=\boldsymbol{B}/B$, où B est la norme de $\boldsymbol{B}$, et pour un vecteur $\boldsymbol{X}$ de $\mathbb{R}^3$, on introduit les trois vecteurs associés $\boldsymbol{X}^{\parallel}=(\boldsymbol{\mathcal{B}}\cdot\boldsymbol{X})\boldsymbol{\mathcal{B}}$, $\boldsymbol{X}^{\perp}=\boldsymbol{X}-\boldsymbol{X}^{\parallel}$ et $\boldsymbol{X}^{\odot}=\boldsymbol{\mathcal{B}}\wedge\boldsymbol{X}$, qui sont deux à deux orthogonaux. Les vitesses de diffusion $\boldsymbol{V}_k$, $k\in\mathrm{S}$, s'écrivent alors

$$\boldsymbol{V}_k=-\sum_{l\in\mathrm{S}}\big(D_{kl}^{\parallel}\boldsymbol{d}_l^{\parallel}+D_{kl}^{\perp}\boldsymbol{d}_l^{\perp}+D_{kl}^{\odot}\boldsymbol{d}_l^{\odot}\big)-\big(\theta_k^{\parallel}(\boldsymbol{\partial}_x\log T)^{\parallel}+\theta_k^{\perp}(\boldsymbol{\partial}_x\log T)^{\perp}+\theta_k^{\odot}(\boldsymbol{\partial}_x\log T)^{\odot}\big), \tag{6}$$

où les forces de diffusion des espèces $\boldsymbol{d}_k$, $k\in\mathrm{S}$, sont données par

$$\boldsymbol{d}_k=\big(\boldsymbol{\partial}_xp_k-\rho_k\boldsymbol{g}-q_k(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{v}\wedge\boldsymbol{B})\big)/p, \tag{7}$$

et $D_{kl}^{\parallel}$, $D_{kl}^{\perp}$ et $D_{kl}^{\odot}$, $k,l\in\mathrm{S}$, les coefficients de diffusion multiespèces, $\theta_k^{\parallel}$, $\theta_k^{\perp}$ et $\theta_k^{\odot}$, $k\in\mathrm{S}$, les coefficients de diffusion thermique, T la température absolue et p_k, $k\in\mathrm{S}$, la pression partielle de la k^{e} espèce. Le flux de chaleur $\boldsymbol{\mathcal{Q}}$ a pour expression

$$\boldsymbol{\mathcal{Q}}=-\hat{\lambda}^{\parallel}(\boldsymbol{\partial}_xT)^{\parallel}-\hat{\lambda}^{\perp}(\boldsymbol{\partial}_xT)^{\perp}-\hat{\lambda}^{\odot}(\boldsymbol{\partial}_xT)^{\odot}-p\sum_{k\in\mathrm{S}}\big(\theta_k^{\parallel}\boldsymbol{d}_k^{\parallel}+\theta_k^{\perp}\boldsymbol{d}_k^{\perp}+\theta_k^{\odot}\boldsymbol{d}_k^{\odot}\big)+\sum_{k\in\mathrm{S}}\rho_kh_k\boldsymbol{V}_k, \tag{8}$$

où h_k est l'enthalpie massique de la k^{e} espèce et $\hat{\lambda}^{\parallel}$, $\hat{\lambda}^{\perp}$ et $\hat{\lambda}^{\odot}$ les conductivités thermiques partielles. Finalement, le tenseur visqueux $\boldsymbol{\Pi}$ peut s'écrire sous la forme

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\Pi}=&-\kappa(\boldsymbol{\partial}_x\cdot\boldsymbol{v})\mathbb{I}-\eta_1\mathsf{S}-\eta_2\big(\boldsymbol{M}^{\odot}\mathsf{S}-\mathsf{S}\boldsymbol{M}^{\odot}\big)-\eta_3\big(-\boldsymbol{M}^{\odot}\mathsf{S}\boldsymbol{M}^{\odot}+\boldsymbol{M}^{\parallel}\mathsf{S}\boldsymbol{M}^{\parallel}\big)\\&-\eta_4\big(\mathsf{S}\boldsymbol{M}^{\parallel}+\boldsymbol{M}^{\parallel}\mathsf{S}-2\boldsymbol{M}^{\parallel}\mathsf{S}\boldsymbol{M}^{\parallel}\big)-\eta_5\big(\boldsymbol{M}^{\parallel}\mathsf{S}\boldsymbol{M}^{\odot}-\boldsymbol{M}^{\odot}\mathsf{S}\boldsymbol{M}^{\parallel}\big),\end{aligned} \tag{9}$$

avec κ la viscosité volumique, η_1, η_2, η_3, η_4, η_5, les viscosités de cisaillement. On a noté S le tenseur des taux de déformation symétrique et à trace nulle $\mathsf{S}=\boldsymbol{\partial}_x\boldsymbol{v}+\boldsymbol{\partial}_x\boldsymbol{v}^{\mathsf{T}}-\frac{2}{3}(\boldsymbol{\partial}_x\cdot\boldsymbol{v})\mathbb{I}$, et $\boldsymbol{M}^{\parallel}$ et $\boldsymbol{M}^{\odot}$ les matrices qui décrivent l'anisotropie définies pour $x\in\mathbb{R}^3$ par $\boldsymbol{M}^{\parallel}x=\boldsymbol{\mathcal{B}}\cdot x\,\boldsymbol{\mathcal{B}}$ et $\boldsymbol{M}^{\odot}x=\boldsymbol{\mathcal{B}}\wedge x$. La régularité des flux de transport lorsque $\boldsymbol{B}$ tend vers zéro est due aux propriétés des coefficients de transport [3,8].

Les flux convectifs $\mathsf{F}_i(\mathsf{U})$, $i \in \mathrm{C}$, sont des fonctions $\mathcal{C}^\infty$ de la variable $\mathsf{U} \in \mathcal{O}_\mathsf{U}$ [8], où $\mathcal{O}_\mathsf{U}$ est un ouvert convexe de $\mathbb{R}^n$, $n = n^s + 10$, les flux dissipatifs $\mathsf{F}_i^{\mathrm{diss}}(\mathsf{U}, \boldsymbol{\partial}_x\mathsf{U})$, $i \in \mathrm{C}$, peuvent s'écrire sous la forme

$$\mathsf{F}_i^{\mathrm{diss}}(\mathsf{U}, \boldsymbol{\partial}_x\mathsf{U}) = -\sum_{j\in\mathrm{C}} \mathsf{B}_{ij}(\mathsf{U})\big(\partial_j\mathsf{U} + \mathsf{G}_j(\mathsf{U})\big), \quad i \in \mathrm{C}, \tag{10}$$

où les matrices de dissipation $\mathsf{B}_{ij}(\mathsf{U})$, $i, j \in \mathrm{C}$, et les contributions d'ordre zéro $\mathsf{G}_i(\mathsf{U})$, $i \in \mathrm{C}$, sont des fonctions $\mathcal{C}^\infty$ de $\mathsf{U} \in \mathcal{O}_\mathsf{U}$. Par ailleurs, le terme source $\varOmega^{\boldsymbol{j}}(\mathsf{U}, \boldsymbol{\partial}_x\mathsf{U})$ peut s'écrire

$$\varOmega^{\boldsymbol{j}}(\mathsf{U}, \boldsymbol{\partial}_x\mathsf{U}) = \sum_{i\in\mathrm{C}} \mathsf{M}_i(\mathsf{U})^\mathsf{T}\, \mathsf{F}_i^{\mathrm{diss}}(\mathsf{U}, \boldsymbol{\partial}_x\mathsf{U}) + \varOmega_0(\mathsf{U}), \tag{11}$$

où les matrices $\mathsf{M}_i(\mathsf{U})$, $i \in \mathrm{C}$, et le terme source d'ordre zéro $\varOmega_0(\mathsf{U})$ sont des fonctions $\mathcal{C}^\infty$ de $\mathsf{U} \in \mathcal{O}_\mathsf{U}$. On remarque que les termes dissipatifs $\mathsf{F}_i^{\mathrm{diss}}$ (10), $i \in \mathrm{C}$, sont des combinaisons linéaires anisotropes des gradients de la solution [9,2,1,3] et qu'ils contiennent des contributions d'ordre zéro G_i, $i \in \mathrm{C}$, provenant de l'action directe du champ électromagnétique. De plus, le terme source $\varOmega^{\boldsymbol{j}}$ (11) ne dépend pas uniquement de U mais aussi de son gradient $\boldsymbol{\partial}_x\mathsf{U}$. On verra que ces termes sont par ailleurs reliés par l'entropie. Finalement, en introduisant les matrices $\mathsf{A}_i(\mathsf{U}) = \partial_\mathsf{U}\mathsf{F}_i$, $i \in \mathrm{C}$, qui sont des fonctions $\mathcal{C}^\infty$ de $\mathsf{U} \in \mathcal{O}_\mathsf{U}$, le système (1) peut se récrire sous la forme

$$\partial_t\mathsf{U} + \sum_{i\in\mathrm{C}} \mathsf{A}_i(\mathsf{U})\partial_i\mathsf{U} = \sum_{i,j\in\mathrm{C}} \partial\big[\mathsf{B}_{ij}(\mathsf{U})\big(\partial_j\mathsf{U} + \mathsf{G}_j(\mathsf{U})\big)\big] - \sum_{i,j\in\mathrm{C}} \mathsf{M}_i(\mathsf{U})^\mathsf{T}\mathsf{B}_{ij}(\mathsf{U})\big(\partial_j\mathsf{U} + \mathsf{G}_j(\mathsf{U})\big) + \varOmega_0(\mathsf{U}). \tag{12}$$

2. Symétrisation partielle et forme normale partielle

On considère l'entropie mathématique σ, égale à l'opposé de l'entropie physique volumique, qui est une fonction $\mathcal{C}^\infty$ strictement convexe de $\mathsf{U} \in \mathcal{O}_\mathsf{U}$, et le vecteur des variables entropiques $\mathsf{V} = (\partial_\mathsf{U}\sigma)^\mathsf{T}$

$$\mathsf{V} = \tfrac{1}{T}\big(g_1 - \tfrac{1}{2}\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}, \ldots, g_{n^s} - \tfrac{1}{2}\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}, \varepsilon_0\boldsymbol{E}, \boldsymbol{B}/\mu_0, -1\big)^\mathsf{T}, \tag{13}$$

où g_k, $k \in \mathrm{S}$, est la fonction de Gibbs de la k^{e} espèce.

Théorème 2.1. *Le changement de variables* $\mathsf{U} \mapsto \mathsf{V}$ *transforme le système* (12) *en*

$$\begin{aligned}&\tilde{\mathsf{A}}_0(\mathsf{V})\,\partial_t\mathsf{V} + \sum_{i\in\mathrm{C}} \tilde{\mathsf{A}}_i(\mathsf{V})\partial_i\mathsf{V}\\ &\quad= \sum_{i,j\in\mathrm{C}} \partial_i\big[\widetilde{\mathsf{B}}_{ij}(\mathsf{V})\big(\partial_j\mathsf{V} + \widetilde{\mathsf{G}}_j(\mathsf{V})\big)\big] - \sum_{i,j\in\mathrm{C}} \widetilde{\mathsf{M}}_i(\mathsf{V})^\mathsf{T}\,\widetilde{\mathsf{B}}_{ij}(\mathsf{V})\big(\partial_j\mathsf{V} + \widetilde{\mathsf{G}}_j(\mathsf{V})\big) + \widetilde{\varOmega}_0(\mathsf{V}),\end{aligned} \tag{14}$$

avec $\tilde{\mathsf{A}}_0 = \partial_\mathsf{V}\mathsf{U}$, $\tilde{\mathsf{A}}_i = \mathsf{A}_i\partial_\mathsf{V}\mathsf{U}$, $\widetilde{\mathsf{B}}_{ij} = \widetilde{\mathsf{B}}_{ij}^{\mathrm{s}} + \widetilde{\mathsf{B}}_{ij}^{\mathrm{a}} = \mathsf{B}_{ij}\partial_\mathsf{V}\mathsf{U}$, $\widetilde{\mathsf{G}}_i = (\partial_\mathsf{V}\mathsf{U})^{-1}\mathsf{G}_i$, $\widetilde{\mathsf{M}}_i = \mathsf{M}_i$ *et* $\widetilde{\varOmega}_0 = \varOmega_0$, *où les matrices* $\tilde{\mathsf{A}}_0(\mathsf{V})$, $\tilde{\mathsf{A}}_i(\mathsf{V})$, $\widetilde{\mathsf{M}}_i(\mathsf{V})$, $i \in \mathrm{C}$, $\widetilde{\mathsf{B}}_{ij}^{\mathrm{s}}(\mathsf{V})$, $\widetilde{\mathsf{B}}_{ij}^{\mathrm{a}}(\mathsf{V})$, $i, j \in \mathrm{C}$, *et les vecteurs* $\widetilde{\mathsf{G}}_i(\mathsf{V})$, $i \in \mathrm{C}$, $\widetilde{\varOmega}_0(\mathsf{V})$ *sont des fonctions* $\mathcal{C}^\infty$ *de* $\mathsf{V} \in \mathcal{O}_\mathsf{V}$, $\mathcal{O}_\mathsf{V}$ *ouvert convexe de* $\mathbb{R}^n$. *Par ailleurs, le système* (14) *est sous forme partiellement symétrique, c'est-à-dire que la matrice* $\tilde{\mathsf{A}}_0(\mathsf{V})$ *est symétrique définie positive, les matrices* $\tilde{\mathsf{A}}_i(\mathsf{V})$, $i \in \mathrm{C}$, *sont symétriques, on a les relations* $\widetilde{\mathsf{B}}_{ij}^{\mathrm{s}}(\mathsf{V})^\mathsf{T} = \widetilde{\mathsf{B}}_{ji}^{\mathrm{s}}(\mathsf{V})$, $\widetilde{\mathsf{B}}_{ij}^{\mathrm{a}}(\mathsf{V})^\mathsf{T} = -\widetilde{\mathsf{B}}_{ji}^{\mathrm{a}}(\mathsf{V})$, $i, j \in \mathrm{C}$, *la matrice* $\widetilde{\mathsf{B}}(\mathsf{V}, \boldsymbol{\xi}) = \sum_{i,j\in\mathrm{C}} \widetilde{\mathsf{B}}_{ij}^{\mathrm{s}}(\mathsf{V})\xi_i\xi_j$ *est symétrique semi-définie positive pour* $\boldsymbol{\xi} \in \Sigma^2$, Σ^2 *sphère unité de* $\mathbb{R}^3$, *et* $\mathsf{V} \in \mathcal{O}_\mathsf{V}$. *Pour* x *dans le noyau* $N(\widetilde{\mathsf{B}})$, *on a* $\widetilde{\mathsf{B}}_{ij}^{\mathrm{s}}x = 0$ *et* $\widetilde{\mathsf{B}}_{ij}^{\mathrm{a}}x = 0$, $i, j \in \mathrm{C}$, *et les relations de compatiblité entropiques* $\widetilde{\mathsf{G}}_i(\mathsf{V}) = \widetilde{\mathsf{M}}_i(\mathsf{V})\mathsf{V}$, $i \in \mathrm{C}$, *sont vérifiées.*

On obtient l'équation de conservation de l'entropie en multipliant à gauche l'équation (14) par V^T

$$\partial_t\sigma + \sum_{i\in\mathrm{C}} \partial_i\mathfrak{q}_i + \sum_{i\in\mathrm{C}} \partial_i\mathfrak{p}_i = -\sum_{i,j\in\mathrm{C}} \big\langle \partial_i\mathsf{V} + \widetilde{\mathsf{M}}_i\mathsf{V}, \widetilde{\mathsf{B}}_{ij}^{\mathrm{s}}(\partial_i\mathsf{V} + \widetilde{\mathsf{M}}_i\mathsf{V})\big\rangle + \langle\widetilde{\varOmega}_0, \mathsf{V}\rangle, \tag{15}$$

où $\mathfrak{q}_i$, $i \in \mathrm{C}$, est le flux convectif d'entropie et $\mathfrak{p}_i$, $i \in \mathrm{C}$, le flux dissipatif d'entropie dans la i^{e} direction, $\mathfrak{p}_i = \langle \mathsf{V}, \mathsf{F}_i^{\mathrm{diss}} \rangle$. Il est fondamental de remarquer que les contributions d'ordre zéro sont incluses dans le terme de production d'entropie associé à la dissipation [3,5,8].

On récrit alors le système partiellement symétrique (14) en regroupant d'une part les termes d'ordre zéro avec le terme source et d'autre part toutes les dérivées du premier ordre provenant des termes d'ordre zéro $\widetilde{\mathsf{G}}_i$, $i \in \mathrm{C}$, dans les flux dissipatifs et des termes sources en gradient $\sum_{i\in\mathrm{C}} \widetilde{\mathsf{M}}_i{}^{\mathsf{T}} \widetilde{\mathsf{B}}_{ij}$, $j \in \mathrm{C}$, avec les contributions convectives. On définit ainsi les matrices $\tilde{\mathsf{A}}_i^{\mathrm{a}}$, $i \in \mathrm{C}$, et le terme source $\widetilde{\Omega}$ par

$$\tilde{\mathsf{A}}_i^{\mathrm{a}}(\mathsf{V}) = \sum_{j\in\mathrm{C}} \big((\widetilde{\mathsf{M}}_j)^{\mathsf{T}} \widetilde{\mathsf{B}}_{ji} - \widetilde{\mathsf{B}}_{ij} \widetilde{\mathsf{M}}_j - \partial_{\mathsf{V}} (\widetilde{\mathsf{B}}_{ij} \widetilde{\mathsf{M}}_j) \mathsf{V} \big), \qquad \widetilde{\Omega}(\mathsf{V}) = -\sum_{i,j\in\mathrm{C}} \widetilde{\mathsf{M}}_i{}^{\mathsf{T}} \widetilde{\mathsf{B}}_{ij} \widetilde{\mathsf{M}}_j \mathsf{V} + \widetilde{\Omega}_0(\mathsf{V}).$$

Le système symétrique obtenu reste intermédiaire entre un système hyperbolique et un système fortement parabolique. Afin de le récrire sous la forme d'un système partiellement symétrique composite hyperbolique-parabolique, dite partiellement normale, on établit la propriété d'invariance des noyaux [8].

Proposition 2.2. *Le noyau de la matrice symétrique* $\widetilde{\mathsf{B}}(\mathsf{V}, \boldsymbol{\xi}) = \sum_{i,j\in\mathrm{C}} \widetilde{\mathsf{B}}_{ij}^{\mathrm{s}}(\mathsf{V}) \xi_i \xi_j$, *noté* N, *ne dépend pas de* $\mathsf{V} \in \mathcal{O}_{\mathsf{V}}$ *ni de* $\boldsymbol{\xi} \in \Sigma^2$. *Il est de dimension* 7 *et est engendré par les vecteurs colonnes* $(1, \ldots, 1, 0_{1,10})^{\mathsf{T}}$ *et* e^{n^s+k}, $k = 1, \ldots, 6$, *où* $(\mathsf{e}^k)_{k=1,\ldots,n^s+10}$ *est la base canonique de* $\mathbb{R}^{n^s+10}$.

Pour séparer les variables hyperboliques et paraboliques, on introduit la partition de $\{1, \ldots, n\}$ en $\mathrm{I} = \{1, \ldots, 7\}$ et $\mathrm{II} = \{8, \ldots, n\}$, et on utilise la structure blocs induite. On définit en particulier la variable $\mathsf{W} = (\mathsf{W}_{\mathrm{I}}, \mathsf{W}_{\mathrm{II}})^{\mathsf{T}}$ où W_{I} correspond aux variables hyperboliques et W_{II} aux variables paraboliques,

$$\mathsf{W}_{\mathrm{I}} = (\rho, \boldsymbol{E}, \boldsymbol{B})^{\mathsf{T}}, \qquad \mathsf{W}_{\mathrm{II}} = \big(\log(\rho_2^{r_2}/\rho_1^{r_1}), \ldots, \log(\rho_{n^s}^{r_{n^s}}/\rho_1^{r_1}), \boldsymbol{v}, T \big)^{\mathsf{T}}. \tag{16}$$

Proposition 2.3. *Le changement de variables* $\mathsf{V} \mapsto \mathsf{W}$ *transforme le système* (14) *en*

$$\bar{\mathsf{A}}_0 \partial_t \mathsf{W} + \sum_{i\in\mathrm{C}} (\bar{\mathsf{A}}_i + \bar{\mathsf{A}}_i^{\mathrm{a}}) \partial_i \mathsf{W} = \sum_{i,j\in\mathrm{C}} \partial_i (\overline{\mathsf{B}}_{ij} \partial_j \mathsf{W}) + \overline{\mathcal{T}} + \overline{\Omega}, \tag{17}$$

avec $\bar{\mathsf{A}}_0 = (\partial_{\mathsf{W}} \mathsf{V})^{\mathsf{T}} \tilde{\mathsf{A}}_0 (\partial_{\mathsf{W}} \mathsf{V})$, $\bar{\mathsf{A}}_i = (\partial_{\mathsf{W}} \mathsf{V})^{\mathsf{T}} \tilde{\mathsf{A}}_i (\partial_{\mathsf{W}} \mathsf{V})$, $\bar{\mathsf{A}}_i^{\mathrm{a}} = (\partial_{\mathsf{W}} \mathsf{V})^{\mathsf{T}} \tilde{\mathsf{A}}_i^{\mathrm{a}} (\partial_{\mathsf{W}} \mathsf{V})$, $\overline{\mathsf{B}}_{ij} = (\partial_{\mathsf{W}} \mathsf{V})^{\mathsf{T}} \widetilde{\mathsf{B}}_{ij} (\partial_{\mathsf{W}} \mathsf{V})$, $\overline{\Omega} = (\partial_{\mathsf{W}} \mathsf{V})^{\mathsf{T}} \widetilde{\Omega}$, $\overline{\mathcal{T}} = -\sum_{i,j\in\mathrm{C}} \partial_i (\partial_{\mathsf{W}} \mathsf{V})^{\mathsf{T}} \widetilde{\mathsf{B}}_{ij} (\partial_{\mathsf{W}} \mathsf{V}) \partial_j \mathsf{W}$, *où matrices* $\bar{\mathsf{A}}_0(\mathsf{W})$, $\bar{\mathsf{A}}_i(\mathsf{W})$, $\bar{\mathsf{A}}_i^{\mathrm{a}}(\mathsf{W})$, $i \in \mathrm{C}$, $\overline{\mathsf{B}}_{ij}(\mathsf{W})$, $i, j \in \mathrm{C}$, *et les vecteurs* $\overline{\Omega}(\mathsf{W})$, $\overline{\mathcal{T}}(\mathsf{W}, \boldsymbol{\partial}_x \mathsf{W})$ *sont des fonctions* $\mathcal{C}^\infty$ *de* $\mathsf{W} \in \mathcal{O}_{\mathsf{W}}$ *et de* $\boldsymbol{\partial}_x \mathsf{W} \in \mathbb{R}^{3n}$. *Par ailleurs, le système* (17) *est sous forme partiellement normale, c'est-à-dire que la matrice* $\bar{\mathsf{A}}_0(\mathsf{W})$ *est symétrique définie positive, les matrices* $\bar{\mathsf{A}}_i(\mathsf{W})$ *sont symétriques pour* $\mathsf{W} \in \mathcal{O}_{\mathsf{W}}$, *les matrices* $\bar{\mathsf{A}}_0$, $\bar{\mathsf{A}}_i^{\mathrm{a}}$, $i \in \mathrm{C}$, *et* $\overline{\mathsf{B}}_{ij}$, $i, j \in \mathrm{C}$, *ont la structure blocs suivantes*

$$\bar{\mathsf{A}}_0 = \begin{pmatrix} \bar{\mathsf{A}}_0^{\mathrm{I,I}} & 0 \\ 0 & \bar{\mathsf{A}}_0^{\mathrm{II,II}} \end{pmatrix}, \quad \bar{\mathsf{A}}_i^{\mathrm{a}} = \begin{pmatrix} 0 & \bar{\mathsf{A}}_i^{\mathrm{aI,II}} \\ \bar{\mathsf{A}}_i^{\mathrm{aII,I}} & \bar{\mathsf{A}}_i^{\mathrm{aII,II}} \end{pmatrix}, \quad \overline{\mathsf{B}}_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \overline{\mathsf{B}}_{ij}^{\mathrm{II,II}} \end{pmatrix},$$

la matrice $\overline{\mathsf{B}}^{\mathrm{II,II}}(\mathsf{W}, \boldsymbol{\xi}) = \sum_{i,j\in\mathrm{C}} \overline{\mathsf{B}}_{ij}^{\mathrm{II,II}}(\mathsf{W}) \xi_i \xi_j$ *vérifie* $\mathsf{X}^{\mathsf{T}}\, \overline{\mathsf{B}}(\mathsf{W}, \boldsymbol{\xi})\, \mathsf{X} > 0$, *pour* $\mathsf{X} \in \mathbb{R}^{n-7}$, $\mathsf{X} \neq 0$, $\boldsymbol{\xi} \in \Sigma^2$ *et* $\mathsf{W} \in \mathcal{O}_{\mathsf{W}}$ *et on a* $\overline{\mathcal{T}}(\mathsf{W}, \boldsymbol{\partial}_x \mathsf{W}) = (\overline{\mathcal{T}}_{\mathrm{I}}(\mathsf{W}, \boldsymbol{\partial}_x \mathsf{W}_{\mathrm{II}}), \overline{\mathcal{T}}_{\mathrm{II}}(\mathsf{W}, \boldsymbol{\partial}_x \mathsf{W}))^{\mathsf{T}}$.

3. Théorème d'existence locale

On introduit les espaces fonctionnels de Vol'Pert $V_l(\mathbb{R}^3)$ de norme

$$\|\phi\|_l^2 = \sum_{i\in[\![1,n]\!]} \|\phi_i\|_l^2, \quad \|\phi_i\|_l = |\phi_i|_{0,\infty} + \sum_{k\in[\![1,l]\!]} |\phi_i|_{k,2}, \tag{18}$$

où $\phi = (\phi_1, \ldots, \phi_n)^{\mathsf{T}}$ et $|\phi_i|_{k,p}$ désigne la semi-norme classique de l'espace de Sobolev $W_p^k(\mathbb{R}^3)$. En utilisant un résultat de Vol'Pert et Hudjaev [11], on obtient un théorème d'existence et d'unicité locale en temps pour le problème de Cauchy avec conditions initiales régulières.

Théorème 3.1. *On considère le problème de Cauchy pour le système* (17) *dans* $\mathbb{R}^3$ *avec pour conditions initiales* $\mathsf{W}(0,x) = \mathsf{W}^0(x)$, $x \in \mathbb{R}^3$, *où* $\mathsf{W}^0 \in V_l(\mathbb{R}^3)$, $l > 9/2$, $\inf_{\mathbb{R}^3} \rho^0 > 0$ *et* $\inf_{\mathbb{R}^3} T^0 > 0$. *Il existe alors* $t_0 > 0$, *tel que ce problème de Cauchy admette une unique solution* $\mathsf{W} = (\mathsf{W}_{\mathrm{I}}, \mathsf{W}_{\mathrm{II}})^{\mathsf{T}}$ *avec* $\mathsf{W}(t,x) \in \mathcal{O}_{\mathsf{W}}$ *définie sur le domaine* $\overline{Q}_{t_0} = [0, t_0] \times \mathbb{R}^3$, *continue dans* $\overline{Q}_{t_0}$ *ainsi que ses dérivées du premier ordre en* t *et du second ordre en* x, *et pour laquel les quantités suivantes restent finies*

$$\begin{gathered}
\sup_{0 \leqslant t \leqslant t_0} \left\| \left(\mathsf{W}_{\mathrm{I}}(t), \mathsf{W}_{\mathrm{II}}(t)\right) \right\|_l, \quad \sup_{\overline{Q}_{t_0}} (1/\rho + 1/T), \quad \sup_{0 \leqslant t \leqslant t_0} \left\| \partial_t \mathsf{W}_{\mathrm{I}}(t) \right\|_{l-1}, \\
\int_0^{t_0} \left(\left\| \partial_t \mathsf{W}_{\mathrm{II}}(\tau) \right\|_{l-1}^2 + \left\| \mathsf{W}_{\mathrm{II}}(\tau) \right\|_{l+1}^2 \right) \mathrm{d}\tau.
\end{gathered} \tag{19}$$

Par ailleurs, soit t_0 *est aussi grand que l'on veut, soit il existe* t_1 *tel que le théorème est vrai pour tout* $t_0 < t_1$ *et tel que lorsque* $t_0 \to t_1^-$, *l'une au moins des quantités* $\|\mathsf{W}_{\mathrm{I}}(t_0)\|_{1,\infty} + \|\mathsf{W}_{\mathrm{II}}(t_0)\|_{2,\infty}$, $\sup_{\overline{Q}_{t_0}} 1/T$ *n'est pas bornée.*

En considérant un état d'équilibre W^e tel que $\boldsymbol{E}^e = \boldsymbol{B}^e = \boldsymbol{v}^e = 0$, on peut montrer que les matrices $\bar{\mathsf{A}}_i^{\mathrm{ae}}$, $i \in \mathrm{C}$, sont antisymétriques et jamais nulles, ce qui empêche d'appliquer les théorèmes d'existence [9,7,2]. Cependant, dans l'approximation ambipolaire obtenue en faisant tendre la longueur de Debye vers zéro, on obtient un système entièrement symétrique et la stabilité asymptotique autour des états d'équilibre constants est établie. Par ailleurs, le modèle ambipolaire est stable lorsque la masse de l'électron tend vers zéro [4].

Références

[1] J.H. Ferziger, H.G. Kaper, Mathematical Theory of Transport Processes in Gases, North-Holland, 1972.
[2] V. Giovangigli, Multicomponent Flow Modeling, Birkhäuser, 1999.
[3] V. Giovangigli, B. Graille, Kinetic theory of partially ionized reactive gas mixtures, Physica A 327 (2003) 313–348.
[4] V. Giovangigli, B. Graille, Asymptotic stability of equilibrium states for ambipolar plasmas, Math. Mod. Meth. Appl. Sci. 14 (9) (2004) 1361–1399.
[5] V. Giovangigli, B. Graille, The local Cauchy problem for ionized magnetized reactive gas mixtures, Internal Report 532, Centre de Mathématiques Appliquées, Ecole Polytechnique, 2004.
[6] V. Giovangigli, M. Massot, The local Cauchy problem for multicomponent reactive flows in full vibrational non-equilibrium, Math. Meth. Appl. Sci. 21 (1998) 1415–1469.
[7] V. Giovangigli, M. Massot, Asymptotic stability of equilibrium states for multicomponent reactive flows, Math. Mod. Meth. Appl. Sci. 8 (1998) 251–297.
[8] B. Graille, Modélisation de mélanges gazeux réactifs ionisés dissipatifs, Doctoral Thesis, Ecole Polytechnique, 2004.
[9] S. Kawashima, Systems of a hyperbolic-parabolic composite type, with applications to the equations of magnetohydrodynamics, Doctoral Thesis, Kyoto University, 1984.
[10] S. Kawashima, Y. Shizuta, On the normal form of the symmetric hyperbolic-parabolic systems associated with the conservation laws, Tôhoku Math. J. 40 (1988) 449–464.
[11] A.I. Vol'Pert, S.I. Hudjaev, On the Cauchy problem for composite systems of nonlinear differential equations, Math. USSR-Sb. 16 (1972) 517–544.