Available online at www.sciencedirect.com
SCIENCE DIRECT®
C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 340 (2005) 823–826
COMPTES RENDUS MATHEMATIQUE
http://france.elsevier.com/direct/CRASS1/

Géométrie différentielle/Systèmes dynamiques

# Sur la normalisation holomorphe de structures de Poisson à 1-jet nul

Philipp Lohrmann

*Université Paris 7, institut de mathématiques, géométrie et dynamique, case 7012, 2, place Jussieu, 75251 Paris cedex 05, France*

Reçu le 11 avril 2005 ; accepté le 20 avril 2005

Présenté par Bernard Malgrange

**Résumé**

Nous montrons qu'une structure de Poisson à 1-jet nul est holomorphiquement normalisable vers une forme normale au sens de Dufour–Wade, au voisinage de son point singulier $0 \in \mathbb{C}^n$, si sont vérifiées d'une part une condition diophantienne sur une algèbre de Lie associée à la partie quadratique, d'autre part certaines conditions sur la forme normale formelle. ***Pour citer cet article : P. Lohrmann, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 340 (2005).***


**Abstract**

**Holomorphic normalisation of Poisson structures whose 1-jet vanish.** We show that a Poisson structure whose linear part vanish can be holomorphically normalized in a neighbourhood of its singular point $0 \in \mathbb{C}^n$ if on the one hand, a Diophantine condition on a Lie algebra associated to the quadratic part is satisfied, and, on the other hand, the normal form satisfies some formal conditions. ***To cite this article: P. Lohrmann, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 340 (2005).***


## 1. Introduction

Soit $\Pi$ une structure de Poisson analytique au voisinage de 0 de $\mathbb{C}^r$. D'après [5], il existe des entiers $m$ et $n$ vérifiant $r = 2m + n$, tels que l'on peut trouver un bon système de coordonnées holomorphes $(p_1, \ldots, p_m, q_1, \ldots, q_m, x_1, \ldots, x_n)$, de façon à ce qu'au voisinage de 0 l'on ait $\Pi = \sum_{1 \leqslant i \leqslant m} \frac{\partial}{\partial p_i} \wedge \frac{\partial}{\partial q_i} + \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \pi_{i,j}(x) \frac{\partial}{\partial x_i} \wedge \frac{\partial}{\partial x_j}$, où les $\pi_{i,j}$ sont des fonctions holomorphes sur $\mathbb{C}^n$ s'annulant en 0. Dans la suite on supposera donc que $\Pi$ est une structure de Poisson sur $\mathbb{C}^n$ qui s'annule en 0. Pour les structures de Poisson dont la partie linéaire ne s'annule pas, Stolovitch, dans [4], a établi un résultat de conjuguaison holomorphe vers une

*Adresse e-mail :* lohrmann@math.jussieu.fr (P. Lohrmann).

1631-073X/$ – see front matter 
doi:10.1016/j.crma.2005.04.029

forme normale, qui en général diffère de la partie linéaire. Dans le cas où le 1-jet s'annule, il existe, d'après [1], génériquement une forme normale comme suit :

Posons $Y_i := x_i \frac{\partial}{\partial_i}$. Génériquement la partie quadratique $\Pi^2$ est diagonalisable, c'est-à-dire que $\Pi^2$ peut s'écrire $\sum_{i\neq j} a_{i,j} Y_i \wedge Y_j$, avec $a_{i,j} = -a_{j,i}$. Dorénavent on supposera que $\Pi^2$ est diagonal. Notons $\Pi = \Pi^2 + \sum_I x^I \Pi_I$, où pour tout multiindice $I \in (\mathbb{N} \cup \{-1\})^n$, $\Pi_I$ est quadratique diagonal. Une composante de I peut uniquement être égale à $-1$ si $x^I \Pi_I$ reste polynomial, et on peut en avoir au plus deux. Notons $A$ la matrice $(a_{i,j})$. Dufour et Wade ont montré que sous une hypothèse générique portant sur la partie quadratique, on a l'existence d'un difféomorphisme formel $\hat{\Phi}$ tel que l'on ait

$$\hat{\Phi}^* \Pi = \sum_{A.I=0} x^I \Pi_I,$$

où $A.I = 0$ signifie que $x^I$ vérifie la relation $\mathcal{L}_{(\sum_j a_{i,j} Y_j)} x^I = 0$ pour tout $i$. On dira alors que $\Pi$ est sous forme normale au sens de Dufour–Wade, et on appellera les termes $x^I \Pi_I$ tels que $A.I = 0$ termes resonnants.

## 2. Le résultat principal

Soit $\Pi$ une structure de Poisson qui admet une forme normale au sens de Dufour–Wade. Les champs de vecteurs diagonaux $\sum_j a_{i,j} Y_j$ associés à sa partie quadratique engendrent une algèbre de Lie abelienne de dimension finie, qu'on appellera $S$. On notera $\mathfrak{S}$ l'espace vectoriel des champs de bivecteurs quadratiques sur $\mathbb{C}^n$ qui s'écrivent $\sum_i A_i \wedge Y_i$, où $A_i \in S$, et tels que si l'on pose $A_i := \sum_j a'_{i,j} Y_j$, on ait $a'_{i,j} = -a'_{j,i}$. La notation $\widehat{\mathcal{O}}^S$ désignera l'anneau des intégrales premières formelles de $S$.

Soit $S_1, \ldots, S_l$ une base de $S$ et $\mathcal{P}^{m+1,2m}$ l'espace vectoriel des champs de vecteurs polynomiaux d'ordres $> m$ et de degrés $\leqslant 2m$. Les applications $S_i \mapsto [S_i, \cdot]$ définissent une représentation $\rho^m$ de $S$ dans $\mathcal{P}^{m+1,2m}$. On dira qu'une forme linéaire $\alpha$ sur $S$ est un poids pour la représentation $\rho^m$, s'il existe $X$ non nul appartenant à $\mathcal{P}^{m+1,2m}$, tel que l'on ait pour tout $i$, $\alpha(S_i)X = [S_i, X]$.

$|\alpha|$ désignera le réel $\max_{1\leqslant j\leqslant l} |\alpha(S_j)|$, et on posera $\omega_k := \inf\{|\alpha|, \alpha$ poids non nul pour la représentation $\rho_j, 2 \leqslant j \leqslant 2^k\}$.

**Théorème 2.1.** *Supposons qu'il existe une forme normale formelle (au sens de Dufour–Wade) de $\Pi$, et supposons de plus qu'elle appartient à $\widehat{\mathcal{O}}^S \otimes \mathfrak{S}$, c'est-à-dire s'écrit $\sum_I x^I \Pi_I$, où $x^I \in \widehat{\mathcal{O}}^S$ et $\Pi^I \in \mathfrak{S}$. Alors*

1. *Toutes les autres formes normales de $\Pi$ appartiennent à $\widehat{\mathcal{O}}^S \otimes \mathfrak{S}$.*
2. *$\Pi$ est holomorphiquement normalisable si l'algèbre $S$ vérifie la condition diophantienne $\sum_{k\geqslant 0} \frac{-\ln(\omega_k)}{2^k} < +\infty$. Cela signifie : il existe un germe de difféomorphisme holomorphe $\Phi : (\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}^n, 0)$ qui conjugue $\Pi$ à une forme normale.*

On montre que la condition $\sum_{k\geqslant 0} \frac{-\ln(\omega_k)}{2^k} < +\infty$ est indépendante de la norme sur les formes linéaires sur $S$.

**Corollaire 2.2.** *Si $\Pi$ est diophantien et si $\Pi$ est formellement quadratisable, alors $\Pi$ est holomorphiquement quadratisable.*

## 3. Interpretation géométrique

Stolovitch, dans [3] 2.2, 5.3, 5.4 a établi les résultats suivants : $\widehat{\mathcal{O}}^S$ est une $\mathbb{C}$-algèbre de type fini, et il existe des monômes de $\mathbb{C}^n$ $u_1, \ldots, u_p$ tel que $\widehat{\mathcal{O}}^S = \mathbb{C}[[u_1, \ldots, u_p]]$. Les relations entre les $u_i$ définissent une variété algébrique $\mathcal{C}_S$ dans $\mathbb{C}^p$, de dimension $s$, où $s$ est le nombre maximal de $u_i$ algébriquement indépendants. L'application $\pi : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^p$ définie par $\pi(x) = (u_1(x), \ldots, u_p(x))$ est une fibration singulière au dessus de $\mathcal{C}_S$. De plus chaque $S_i$ est tangent aux fibres de $\pi$.

Renvenons à $\Pi$. Sous les conditions du Théorème 2.1, il existe au voisinage de 0 un système de coordonnées holomorphe tel que $\Pi \in \mathcal{O}^S \otimes \mathfrak{S}$, où $\mathcal{O}^S$ désigne les intégrales premières holomorphes de $S$. Dans ces coordonnées, la restriction de $\Pi$ à une fibre de $\pi$ est alors un élément de $\mathfrak{S}$ dont la matrice dépend uniquement de la fibre.

De plus, sur chaque fibre $F$, pour toute fonction holomorphe $f$, le champ hamiltonien de $f$ relativement à $\Pi$ est tangent à $F$. On en déduit que les feuillets symplectiques de $\Pi$ sont, au voisinage de 0, incluses dans les fibres de $\pi$. Ces feuillets symplectiques ont la dimension de l'algèbre $S$. Si la dimension de $S$ est égal à $n-s$, alors aux points réguliers de $\pi$, les feuillets symplectiques de $\Pi$ coïncident avec les fibres.

## 4. Notations

Appelons *écriture de reférence* d'un champ de bivecteurs ou d'une structure de Poisson une écriture de la forme $\sum_{I,i<j} x^I \alpha^I_{i,j} Y_i \wedge Y_j$.

Pour $\Pi$ holomorphe (donc aussi pour $\Pi$ polynômial) définissons $\|\Pi\|_r$ comme $\max_{i,j} \sum_I (r^{|I|+2} |\alpha^I_{i,j}|)$. Si $a = \sum_I a_I x^I$ est une fonction holomorphe, alors définissons $|a|_r = \sum_I |a_I| r^{|I|}$. Si $X$ est un champ de vecteurs holomorphe alors $\|X\|_r$ désigne le maximum de la norme $|\ |_r$ des coordonnées. On définira également $\|A\|_r$ comme maximum de la norme des coordonnées, si $A$ est un champ holomorphe d'endomorphismes de $\mathbb{C}^n$. On notera $D_r$ le polydisque de rayon $r$ de $\mathbb{C}^n$.

## 5. Esquisse de démonstration [2]

### 5.1. L'equation cohomologique et la majoration de ces solutions

Supposons que $\Pi$ soit normalisé à l'ordre $m+1$. Soit $\Pi^m$ sa forme normale partielle de degré $m+1$. Appellons $B^m_*$ les termes non résonnants de $\Pi$ qui sont d'ordre $> m+1$ et de degré $\leqslant 2m+1$. Soit $\Phi_i$ un difféomorphisme formel tangent à l'identité qui normalise du degré $m+1$ à celui de $2m+1$. $\Phi_i$ est de la forme $\mathrm{Id} + Z^m + R$, où $R$ est d'ordre strictement supérieur à $2m$ quelconque, et $Z^m \in \mathcal{P}^{m,2m}$ est un champ qui vérifie l'équation cohomologique $J^{2m+1}([Z^m, \Pi^m]) = B^m_*$.

**Proposition 5.1.** *On peut determiner un $Z^m$ tel que l'on ait la propriété suivante : il existe indépendament de $m$ un réel positif $\eta$ et une constante $c(\eta)$, tel que l'on ait pour tout $r$ dans l'intervalle $]\frac{1}{2}, 1]$, l'implication suivante : si $\|\Pi^m - \Pi^2\|_r < \eta$ et si $\|D(\Pi^m - \Pi^2)\|_r < \eta$, alors $\|Z^m\|_r \leqslant \frac{c(\eta)}{\omega^2} \|B^m_*\|_r$, avec $\omega = \inf\{|\alpha|, \alpha$ poids non nul pour la représentation $\rho_m\}$.*

On va choisir $Z^m$ d'une part sans composante resonnante. Mais $Z^m$ n'est toujours pas unique.

Afin de majorer les solutions de l'équation cohomologique $J^{2m+1}([Z^m, \Pi^m]) = B^m_*$, on cherche n champs de vecteurs $B_i$ qui vérifient $\sum_i B_i \wedge Y_i = B^m_*$, et qui sont tels que $J^{2m+1}([Z^m, \Pi^m]) = B^m_*$ se décompose selon les $Y_i$ du deuxième facteur du produit exterieur.

Plus précisément, soit $\Pi^m$ donné dans l'écriture $\sum_I x^I \Pi_I$, et soient alors $Nf_i$ des champs de vecteurs tels que $\Pi^m = \sum_i Nf_i \wedge Y_i$. La condition sur la forme normale fait que $Nf_i \in \widehat{\mathcal{O}}^S \otimes S$.

On demande aux $B_i$ que l'equation cohomologique se décompose en $n$ équations de la forme $\theta(Nf_i, Z^m) = B_i$, où $\theta$ est défini comme suit : si $A$ est un champ de vecteurs linéaire, et $B$ un champ de vecteurs quelconque, alors $\theta(A, B) = 2[A, B]$. Si $f$ est une fonction, alors $\theta(fA, B) = f\theta(A, B) + \mathcal{L}_B f A$.

Notons $A_i := \sum_i a_{i,j} Y_i$. Soit $\nu \subseteq \{1, \ldots, n\}$ tel que la famille de champs $(A_i)_{i\in\nu}$ soit une base de $S$. $A_i \to \theta(Nf_i, \cdot)$ définit une certaine représentation de $S$ dans $\mathcal{P}^{m,2m}$. On obtient, en adaptant des démonstrations de résultats de Stolovitch [3], le lemme suivant :

**Lemme 5.2.** *Soit $\beta$ un poids non nul pour la représentation $\rho^m$. Pour tout i qui vérifie $\beta(A_i) \neq 0$, l'application $\theta_i := \theta(Nf_i, \cdot)$ est inversible sur l'espace de poids $\mathcal{P}_\beta$ associé. Soit $i_0 \in \nu$ un indice tel que $|\beta| = |\beta(Ai_0)|$. Soit $\Gamma \in \mathcal{P}^{m,2m} \cap \mathcal{P}_\beta$ et $\Delta = \theta_{i_0}^{-1}(\Gamma)$. Il existe, indépendament de m, un réel positif $\eta$ et une constante $c(\eta)$, tel que l'on ait pour tout r dans l'intervalle $]\frac{1}{2}, 1]$ l'implication suivante : si $\|NF_{i_0}^m - Nf_{i_0}^2\|_r < \eta$ et si $\|D(NF_{i_0}^m - Nf_{i_0}^2)\|_r < \eta$, alors $\|\Delta\|_r \leqslant \frac{c(\eta)}{|\beta|^2}\|\Gamma\|_r$.*

Soit $\beta$ un poids non nul pour la représentation $\rho^m$. Notons $\mathcal{P}_\beta$ l'espace de poids associé, et $\widetilde{\mathcal{P}_\beta}$ l'espace des bivecteurs polynômiaux qui ont une écriture de la forme $\sum_{i \neq j} f_{i,j} Y_i \wedge Y_j$, tel que $\mathcal{L}_{A_k} f_{i,j} = \beta(A_k) f_{i,j}$ pour tout $k$. On peut décomposer l'équation cohomologique selon les poids non nuls $\beta$, en projetant $B_*^m$ sur $\widetilde{\mathcal{P}_\beta}$, et $Z^m$ sur $\mathcal{P}_\beta$. Ceci correspond, au niveau des équations $\theta(Nf_i, Z^m) = B_i$, à une décomposition selon les espaces de poids $\mathcal{P}_\beta$.

On obtient, en se restreignant aux $\mathcal{P}_\beta$ et aux $\widetilde{\mathcal{P}_\beta}$, le résultat suivant : il existe des champs $B_{i,\beta}$, tels que $\sum_i B_{i,\beta} \wedge Y_i$ soit la projection sur $\widetilde{\mathcal{P}_\beta}$ de $B_*^m$, et tels que les équations $\theta(Nf_i, Z_\beta^m) = B_{i,\beta}$ aient une unique solution commune sans termes resonnants, c'est-à-dire dans le noyau de la représentation $\rho^m$. Ceci est possible de manière à ce que pour l'indice $i_0$ défini dans le lemme, l'on ait $\|B_{i_0}\|_r = \frac{1}{r}\|B_*^m\|_r$. La Proposition 5.1 s'obtient alors en applicant le Lemme 5.2 en posant $\Gamma = B_{i_0}$ et $\Delta = Z_\beta^m$.

*5.2. L'argument de récurrence*

On définit une suite de réels $(r_k)$ tel que pour $k$ assez grand l'on ait $\frac{1}{2} < r_k \leqslant 1$ et tel que $r_{k+1} = \gamma_k (\frac{1}{2^k})^{-2/2^k} r_k$, où $\gamma_k = (\frac{c(\eta)}{(\omega_k)^2})^{-1/2^k}$. Si $\Pi$ est normalisé j'usqu'au degré $2^{k_0}$, alors on définit, pour $k > k_0$, une suite $Z_k$ tel que $\Phi_k := (\mathrm{Id} + Z_k)^{-1}$ normalise du degré $2^k$ au degré $2^{k+1}$. Posons $\Pi = \Pi^k + B_*^k + B_0^k + R^k$ si $\Pi$ est normalisé au degré $2^k$. $B_0^k$ (resp. $B_*^k$) désigne alors les termes resonnants (resp. non-resonnants) de degrés $> 2^k + 1$ et $\leqslant 2^{k+1} + 1$, $R^k$ désigne les termes de degré $> 2^{k+1} + 1$.

**Proposition 5.3** (de récurrence). *Il existe un entier $k_0$ tel que l'on ait, pour $k \geqslant k_0$, la propriété suivante* :

(i) *Si* (a) $\|\Pi^k - \Pi^2\|_{r_k} \leqslant \eta - \frac{4}{2^k}$ , (b) $\|D(\Pi^k - \Pi^2)\|_{r_k} \leqslant \eta - \frac{4}{2^k}$, *et*

(c) $\|B_*^k + B_0^k + R^k\|_{r_k} \leqslant 1$, *on a aussi* (a′) $\|\Pi^{k+1} - \Pi^2\| \leqslant \eta - \frac{4}{2^{k+1}}$,

(b′) $\|D(\Pi^{k+1} - \Pi^2)\|_{r_{k+1}} \leqslant \eta - \frac{4}{2^{k+1}}$, *et* (c′) $\|B_*^{k+1} + B_0^{k+1} + R^{k+1}\|_{r_{k+1}} \leqslant 1$.

(ii) *En outre, sous l'hypothèse de* (i), *on a* $\|U_k\|_{r_{k+1}} \leqslant \frac{1}{(2^k)^2}$. *De plus* $(\Phi_k)^{-1} = \mathrm{Id} + U_k$ *vérifie que* $(\Phi_k)^{-1}(D_{r_{k+1}}) \subseteq D_{(2^k)^{-1/2^k} r_k} \subseteq D_{r_k}$.

Après une renormalisation j'usqu'au degré $2^{k_0}$, on applique le difféomorphisme $\Psi := (\mathrm{Id} + Z_{k_0})^{-1} \circ (\mathrm{Id} + Z_{k_0+1})^{-1} \circ \cdots$. La Proposition 5.3 permet de montrer que $\Psi$ est holomorphe sur un polydisque de rayon $\frac{1}{2}$.

## Références


[1] J.P. Dufour, A. Wade, Formes normales de structures de Poisson ayant un 1-jet nul en un point, J. Geom. Phys. 26 (1998) 79–96.

[2] P. Lohrmann, Sur la normalisation holomorphe de structures de Poisson à 1-jet nul, article soumis à publication.

[3] L. Stolovitch, Singular complete integrability, Publ. Math. I.H.E.S. 91 (2000) 133–210.

[4] L. Stolovitch, Sur les structures de Poisson singulières, Ergodic Theory Dynamical Systems 24 (05) (2004) 1833–1863.

[5] A. Weinstein, The local structure of Poisson manifolds, J. Differential Geom. 18 (1983) 5236557.