Available online at www.sciencedirect.com

SCIENCE DIRECT®

C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 340 (2005) 779–784

COMPTES RENDUS MATHEMATIQUE

http://france.elsevier.com/direct/CRASS1/

Problèmes mathématiques de la mécanique

Problème de Helmholtz intérieur : formulation modale couplée à une représentation intégrale

Dominique Brenot

EDF-R&D, 1, avenue du Général de Gaulle, BP 408, 92 141, Clamart cedex, France

Reçu le 8 octobre 2004 ; accepté après révision le 17 décembre 2004

Disponible sur Internet le 4 mai 2005

Présenté par Yves Meyer

Résumé

Soit Ω un domaine ouvert de $\mathbb{R}^3$ de frontière Γ. Le problème numéroté (1) dans le texte admet une solution unique dans $\mathrm{H}^1(\Omega)$, si $k \in \mathbb{R}$, $R_e(\frac{1}{\zeta}) > 0$ sur une portion de Γ d'aire S non nulle et $g(k, y, \varepsilon) \in \mathrm{H}^{1/2}(\Gamma)$. ε correspond à l'amortissement d'une structure élastique et ζ est l'impédance acoustique normalisée de la paroi interne de la cavité. ε et $\frac{1}{\zeta}$ sont des petits paramètres. Par une décomposition modale adaptée et la réalisation d'une moyenne sur une bande étroite de nombre d'onde k, une relation intégrale entre la trace de u sur Γ, ζ, ε et g, est construite au premier ordre $\vartheta(\frac{1}{\zeta}, \varepsilon)$ en $\frac{1}{\zeta}$ et ε, par l'intermédiaire du théorème des résidus. Il ne s'agit pas d'une équation équivalente au problème, mais d'une étape vers sa résolution, qui fera l'objet de publications ultérieures. ***Pour citer cet article : D. Brenot, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 340 (2005).***

Abstract

Helmholtz interior problem: coupling a modal expansion and an integral representation. Let Ω be an opened domain of $\mathbb{R}^3$ with a boundary Γ. The problem numbered (1) in the text has a unique solution in $\mathrm{H}^1(\Omega)$, if $k \in \mathbb{R}$, $R_e(\frac{1}{\zeta}) > 0$ on a part of Γ the area S of which is different from zero and $g(k, y, \varepsilon) \in \mathrm{H}^{1/2}(\Gamma)$. ε is the damping of an elastic structure and ζ is the normalised acoustic impedance of the internal wall of the cavity. ε and $\frac{1}{\zeta}$ are small parameters. Thanks to a proper modal expansion and a mean over a narrow band of wave number k, an integral relation between the trace of u on Γ, ζ, ε and g is built to the first order $\vartheta(\frac{1}{\zeta}, \varepsilon)$ in $\frac{1}{\zeta}$ and ε, using the residues theorem. It is not an equivalent equation to the problem, but just a step towards its resolution, which will be published in future papers. ***To cite this article: D. Brenot, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 340 (2005).***

Abridged English version

The eigenvalues $-\gamma_n^2$ of (2) are real and the set u_n constitutes an orthonormal basis in the Sobolev space $\mathrm{H}^1(\Omega)$ [3]. The Green function $G^\zeta(4)$ associated with the problem (1) can be expanded [5] in the biorthogonal

Adresse e-mail : dominique.brenot@edf.fr (D. Brenot).

1631-073X/$ – see front matter
doi:10.1016/j.crma.2004.12.024

set of eigenvectors w_n and v_n of the associated homogeneous problem (5) and its adjoint problem (6). Therefore, the solution of (1) can be written as (8), expression in which every mode $w_n(x)$ can be expressed as (9). The eigenvalues of (5), $-k_n^2$, counted with their multiplicity order, tend towards $-\gamma_n^2$ when $\frac{1}{|\zeta|} \to 0$, and are complex: (14) gives their imaginary parts. Every mode w_n of (5) verifies (15). The solution of (1) can thus be written as (16). A simple application of the Green formula to (9) and $\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}k|x-y|}}{4\pi|x-y|}$ leads to (17). (18) results directly from (16) and (17). The comparison of (22) and (23) (convolutions by the smooth function $\Phi(k)$ of the double summation terms in the expressions (19) and (20)), the use of the residues theorem and hypotheses (28) yield (29).

1. Formulation modale

L'unicité du problème de Helmholtz intérieur, avec une paroi absorbante [2] :

$$\begin{cases} \Delta u + k^2 u = 0 & \text{dans } \Omega, \\ \left(\frac{\partial u}{\partial n} - \frac{\mathrm{i}k}{\zeta}\right)\Big|_\Gamma = g & \text{sur } \Gamma, \end{cases} \tag{1}$$

est démontrée dans [1]. Les valeurs propres, $-\gamma_n^2$, comptées avec leur ordre de multiplicité, du problème de Neumann homogène

$$\begin{cases} \Delta u_n + \gamma_n^2 u_n = 0 & \text{dans } \Omega, \\ \frac{\partial u_n}{\partial n}\Big|_\Gamma = 0 & \text{sur } \Gamma, \end{cases} \tag{2}$$

sont purement réelles et les modes propres associés (u_n), normalisés dans $\mathrm{L}^2(\Omega)$, permettent de constituer une base orthonormale de $\mathrm{H}^1(\Omega)$ [3], soit $(-\gamma_n^2 + 1)^{-1/2} u_n$ pour le produit scalaire

$$a(u, v) = \int_\Omega u\bar{v}\,\mathrm{d}x + \sum_{i=1}^{i=3} \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i} \overline{\frac{\partial v}{\partial x_i}}\,\mathrm{d}x. \tag{3}$$

La fonction de Green du problème (1) vérifie formellement

$$\begin{cases} \Delta G^\zeta + k^2 G^\zeta = -\delta(x-y), \\ \left(\frac{\partial G^\zeta}{\partial n} - \frac{\mathrm{i}k}{\zeta} G^\zeta\right)\Big|_\Gamma = 0 \end{cases} \tag{4}$$

et se décompose dans les séries bis-orthogonales des fonctions propres du problème homogène associé et de son adjoint [5] :

$$\begin{cases} \Delta w_n + k_n^2 w_n = 0, \\ \left(\frac{\partial w_n}{\partial n} - \frac{\mathrm{i}k}{\zeta} w_n\right)\Big|_\Gamma = 0, \end{cases} \tag{5}$$

$$\begin{cases} \Delta v_n + \bar{k}_n^2 v_n = 0, \\ \left(\frac{\partial v_n}{\partial n} + \frac{\mathrm{i}k}{\bar{\zeta}} v_n\right)\Big|_\Gamma = 0, \end{cases} \tag{6}$$

$$G^\zeta(x, y) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \frac{w_n(x)\bar{v}_n(y)}{k_n^2 - k^2} = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \frac{w_n(x) w_n(y)}{k_n^2 - k^2}. \tag{7}$$

La solution de (1) est donc

$$u(x, k, \varepsilon, \zeta) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \frac{\int_\Gamma g(y, k, \varepsilon) w_n(y)\,\mathrm{d}\gamma(y)}{k_n^2 - k^2} w_n(x) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \alpha_n(k, \varepsilon, \zeta) w_n(x), \tag{8}$$

expression dans laquelle chaque mode $w_n(x)$ peut encore s'écrire, dans $\mathrm{H}^1(\Omega)$,

$$w_n(x) = \sum_{p=-\infty}^{p=+\infty} (\gamma_p^2+1)^{-1} a(w_n, u_p) u_p(x) = \sum_{p=-\infty}^{p=+\infty} \left(\int_\Omega w_n \overline{u_p}\, \mathrm{d}x \right) u_p(x). \tag{9}$$

La forme sesquilinéaire qui régit la formulation variationnelle de (5) :

$$\sum_{i=1}^{i=3} \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i} \overline{\frac{\partial v}{\partial x_i}}\, \mathrm{d}x - \mathrm{i}k \int_\Gamma \frac{u\bar{v}}{\zeta} = 0, \tag{10}$$

est $\mathrm{H}^1(\Omega)$ elliptique mais non hermitienne [4]. Ses valeurs propres $-k_n^2$ qui, comptées avec leur ordre de multiplicité, tendent vers $-\gamma_n^2$, lorsque $\frac{1}{|\zeta|} \to 0$, sont donc complexes. Une application de la formule de Green à (2) et (5) :

$$\left(k_n^2 - \gamma_p^2\right) \int_\Omega w_n \overline{u_p}\, \mathrm{d}x + \mathrm{i}k \int_\Gamma \frac{w_n \overline{u_p}}{\zeta}\, \mathrm{d}\gamma = 0, \tag{11}$$

montre que

$$\lim_{\substack{\zeta\to\infty \\ k_n^2 \to \gamma_n^2 \neq \gamma_p^2}} \int_\Omega w_n \overline{u_p}\, \mathrm{d}x = \frac{k}{k_n^2 - \gamma_p^2} \vartheta\left(\frac{1}{|\zeta|}\right), \tag{12}$$

et la série (9) tendra donc, au premier ordre en $\frac{1}{|\zeta|}$, vers une combinaison linéaire finie Σu_n de vecteurs propres u_n, elle-même vecteur propre associé à la même valeur propre $-\gamma_n^2$. Il résulte de (11) que cette combinaison linéaire Σu_n vérifie, au premier ordre en $\frac{1}{|\zeta|}$,

$$\left(k_n^2 - \gamma_n^2\right) \int_\Omega w_n \overline{\Sigma u_n}\, \mathrm{d}x + \mathrm{i}k \int_\Gamma \frac{w_n \overline{\Sigma u_n}}{\zeta}\, \mathrm{d}\gamma = 0, \tag{13}$$

ce qui permet d'estimer la partie imaginaire de k_n^2 :

$$k_n^2 - \gamma_n^2 = -\mathrm{i}k \frac{\int_\Gamma |\Sigma u_n|^2/\zeta\, \mathrm{d}\gamma}{\int_\Omega |\Sigma u_n|^2\, \mathrm{d}x} = -\frac{\mathrm{i}k}{\zeta_n}, \tag{14}$$

définissant ainsi l'impédance normalisée ζ_n du nième mode.

2. Formulation intégrale

Une simple application de la formule de Green montre que chaque mode w_n du système (9) vérifie :

$$w_n(x) = -\int_\Gamma \left(\frac{\partial}{\partial n_y} - \frac{\mathrm{i}k}{\zeta}\right)\left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_n|x-y|}}{4\pi|x-y|}\right) w_n(y)\, \mathrm{d}\gamma(y). \tag{15}$$

La solution du problème (1) peut donc s'écrire :

$$u(x,k,\varepsilon,\zeta) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \alpha_n(k,\varepsilon,\zeta) w_n(x) = -\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \alpha_n(k,\varepsilon,\zeta) \int_\Gamma \left(\frac{\partial}{\partial n_y} - \frac{\mathrm{i}k}{\zeta}\right)\left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_n|x-y|}}{4\pi|x-y|}\right) w_n(y)\, \mathrm{d}\gamma(y). \tag{16}$$

Or, toujours par simple application de la formule de Green à (1) :

$$u(x,k,\varepsilon,\zeta) = -\int_\Gamma \left(\frac{\partial}{\partial n_y} - \frac{\mathrm{i}k}{\zeta}\right)\left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}k|x-y|}}{4\pi|x-y|}\right) u(y,k,\varepsilon,\zeta)\,\mathrm{d}\gamma(y) + \int_\Gamma \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}k|x-y|}}{4\pi|x-y|} g(y,k,\varepsilon)\,\mathrm{d}\gamma(y). \tag{17}$$

Il découle immédiatement de (16) et (17) que :

$$\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \alpha_n(k,\varepsilon,\zeta) \int_\Gamma \left(\frac{\partial}{\partial n_y} - \frac{\mathrm{i}k}{\zeta}\right)\left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}k|x-y|} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}k_n|x-y|}}{4\pi|x-y|}\right) w_n(y)\,\mathrm{d}\gamma(y) = \int_\Gamma \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}k|x-y|}}{4\pi|x-y|} g(y,k,\varepsilon)\,\mathrm{d}\gamma(y). \tag{18}$$

Pour comparer

$$\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \alpha_n(k,\varepsilon,\zeta) \int_\Gamma \left(\frac{\partial}{\partial n_y} - \frac{\mathrm{i}k}{\zeta}\right)\left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_n|x-y|}}{4\pi|x-y|}\right) w_n(y)\,\mathrm{d}\gamma(y), \tag{19}$$

et

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \alpha_n(k,\varepsilon,\zeta) \int_\Gamma \left(\frac{\partial}{\partial n_y} - \frac{\mathrm{i}k}{\zeta}\right)\left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}k|x-y|}}{4\pi|x-y|}\right) w_n(y)\,\mathrm{d}\gamma(y)\\
&\quad= \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \alpha_n(k,\varepsilon,\zeta) \int_\Gamma \left(\frac{\partial}{\partial n_y} - \frac{\mathrm{i}k}{\zeta}\right)\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k-k_n)|x-y|}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_n|x-y|}}{4\pi|x-y|}\right) w_n(y)\,\mathrm{d}\gamma(y)\\
&\quad= \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \alpha_n(k,\varepsilon,\zeta) \int_\Gamma \left(\mathrm{i}(k-k_n)\frac{\partial(|x-y|)}{\partial n_y}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}k|x-y|}}{4\pi|x-y|} + (\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k-k_n)|x-y|})\left(\frac{\partial}{\partial n_y} - \frac{\mathrm{i}k}{\zeta}\right)\left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_n|x-y|}}{4\pi|x-y|}\right)\right)\\
&\qquad\times w_n(y)\,\mathrm{d}\gamma(y),
\end{aligned} \tag{20}$$

notons que les termes $\alpha_n(k,\varepsilon,\zeta)$ sont de la forme :

$$\alpha_n(k,\varepsilon,\zeta) = \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} \frac{k^2\int_\Gamma g_m(y,k)w_n(y)\,\mathrm{d}\gamma(y)}{(k_n+k)(k+\overline{k_m})}\frac{1}{(k_n-k)(k-k_m)}, \tag{21}$$

puisque $g(y,k,\varepsilon)$ modélise l'accélération d'une coque élastique. Le terme de couplage du mode m de structure avec le fluide acoustique est inclus dans $k_m = K_m - \mathrm{i}k\varepsilon_m$, où $K_m \in \mathbb{R}$. Les expressions (19) et (20) sont donc constituées d'une somme double sur les indices m et n.

3. Relation intégrale entre la trace de u sur Γ, ζ, ε et g, au premier ordre $\vartheta(\frac{1}{\zeta},\varepsilon)$

Soit $\Phi(k)$ une bonne fonction. Comparons la convolution par $\Phi(k)$ des termes de la somme double de l'expression (19)

$$\begin{aligned}
&\{\Phi(k)\}_k^* \left\{\alpha_{n,m}(k,\varepsilon,\zeta) \int_\Gamma \left(\frac{\partial}{\partial n_y} - \frac{\mathrm{i}k}{\zeta}\right)\left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_n|x-y|}}{4\pi|x-y|}\right) w_n(y)\,\mathrm{d}\gamma(y)\right\}\\
&\quad= \int_{k'=-\infty}^{k'=+\infty} \left\{\Phi(k-k')\alpha_{n,m}(k',\varepsilon,\zeta) \int_\Gamma \left(\frac{\partial}{\partial n_y} - \frac{\mathrm{i}k'}{\zeta}\right)\left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_n|x-y|}}{4\pi|x-y|}\right) w_n(y)\,\mathrm{d}\gamma(y)\right\}\mathrm{d}k'\\
&\quad= \oint \left\{\Phi(k-z)\alpha_{n,m}(z,\varepsilon,\zeta) \int_\Gamma \left(\frac{\partial}{\partial n_y} - \frac{\mathrm{i}z}{\zeta}\right)\left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_n|x-y|}}{4\pi|x-y|}\right) w_n(y)\,\mathrm{d}\gamma(y)\right\}\mathrm{d}z
\end{aligned} \tag{22}$$

avec la convolution par $\Phi(k)$ des termes de la somme double de l'expression (20), qui s'écrit de façon analogue :

$$\oint\left\{\Phi(k-z)\alpha_{n,m}(z,\varepsilon,\zeta)\int_\Gamma\left(\mathrm{i}(z-k_n)\frac{\partial(|x-y|)}{\partial n_y}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\bar z|x-y|}}{4\pi|x-y|}\right.\right.$$
$$\left.\left.+\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\bar z-k_n)|x-y|}\right)\left(\frac{\partial}{\partial n_y}-\frac{\mathrm{i}z}{\zeta}\right)\left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_n|x-y|}}{4\pi|x-y|}\right)\right)w_n(y)\,\mathrm{d}\gamma(y)\right\}\mathrm{d}z. \tag{23}$$

Les fonctions sous les intégrales de contour sont holomorphes en dehors des pôles. Le chemin d'intégration est un demi-cercle du demi-plan inférieur complété par son diamètre, choisi suffisamment grand pour que la contribution du secteur circulaire soit négligeable. Il englobe les pôles $z=k_n$ à partie imaginaire négative. Utilisons le théorème des résidus pour effectuer la comparaison recherchée. Les pôles $z=k_n$ apparaissent clairement dans l'expression de $\alpha_n(k,\varepsilon,\zeta)$ donnée par (8). $g(y,k,\varepsilon)$ qui y figure possède elle aussi des pôles $z=k_m$ (21), qui représentent les résonances de la structure couplée avec le fluide. A un nombre d'onde k donné, les termes qui contribuent de façon non négligeable dans (22) et (23) étant ceux pour lesquels

$$k-k_n=\vartheta\left(\tfrac{1}{\zeta_n}\right),\quad k-k_m=\vartheta(\varepsilon_m),\quad k_n-k_m=\vartheta\left(\tfrac{1}{\zeta_n},\varepsilon_m\right), \tag{24}$$

nous obtenons, respectivement pour chacune de ces deux expressions, les résidus aux pôles $z=k_n$ et $z=k_m$:

$$\vartheta\left(\frac{1}{\zeta},\varepsilon\right)+\int_\Gamma\left(\frac{\partial}{\partial n_y}-\frac{\mathrm{i}k}{\zeta}\right)\left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_n|x-y|}}{4\pi|x-y|}\right)\frac{w_n(y)}{(k_n-k_m)}\,\mathrm{d}\gamma(y)$$
$$\times\left(\frac{k_n^2\Phi(k-k_n)\int_\Gamma g_m(y,k_n)w_n(y)\,\mathrm{d}\gamma(y)}{(k_n+k_n)(k_n+\overline{k_m})}+\frac{k_m^2\Phi(k-k_m)\int_\Gamma g_m(y,k_m)w_n(y)\,\mathrm{d}\gamma(y)}{(k_n+k_m)(k_m+\overline{k_m})}\right) \tag{25}$$

et

$$\vartheta\left(\frac{1}{\zeta},\varepsilon\right)+\int_\Gamma\left(\frac{\partial}{\partial n_y}-\frac{\mathrm{i}k}{\zeta}\right)\left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_n|x-y|}}{4\pi|x-y|}\right)\frac{w_n(y)}{(k_n-k_m)}\,\mathrm{d}\gamma(y)$$
$$\times\left(\frac{k_n^2\Phi(k-k_n)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\overline{k_n}-k_n)|x-y|}\int_\Gamma g_m(y,k_n)w_n(y)\,\mathrm{d}\gamma(y)}{(k_n+k_n)(k_n+\overline{k_m})}\right.$$
$$\left.+\frac{k_m^2\Phi(k-k_m)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\overline{k_m}-k_n)|x-y|}\int_\Gamma g_m(y,k_m)w_n(y)\,\mathrm{d}\gamma(y)}{(k_n+k_m)(k_m+\overline{k_m})}\right)$$
$$-\int_\Gamma\frac{\mathrm{i}\partial(|x-y|)}{\partial n_y}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\overline{k_m}|x-y|}}{4\pi|x-y|}w_n(y)\,\mathrm{d}\gamma(y)\left(\frac{k_m^2\Phi(k-k_m)\int_\Gamma g_m(y,k_m)w_n(y)\,\mathrm{d}\gamma(y)}{(k_n+k_m)(k_m+\overline{k_m})}\right). \tag{26}$$

Si l'on ne s'intéresse qu'aux résonances et à des nombres d'onde suffisamment grands, le terme de la dernière ligne de (26) devient doublement négligeable, d'une part parce qu'il n'est pas affecté par une résonance en $\frac{1}{(k_n-k_m)}$ (d'autant plus marquée que ε_m et $\frac{1}{\zeta_n}$ tendent vers 0) et d'autre part parce qu'il est d'ordre 0 en k,k_n,k_m. Nous pouvons alors considérer que l'intégrande de (25) s'obtient à partir de celle de (26) par un coefficient multiplicatif :

$$\left(\frac{k_n^2\Phi(k-k_n)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\overline{k_n}-k_n)|x-y|}\int_\Gamma g_m(y,k_n)w_n(y)\,\mathrm{d}\gamma(y)}{(k_n+k_n)(k_n+\overline{k_m})}\right.$$
$$\left.+\frac{k_m^2\Phi(k-k_m)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\overline{k_m}-k_n)|x-y|}\int_\Gamma g_m(y,k_n)w_n(y)\,\mathrm{d}\gamma(y)}{(k_n+k_m)(k_m+\overline{k_m})}\right)^{-1}$$
$$\times\left(\frac{k_n^2\Phi(k-k_n)\int_\Gamma g_m(y,k_n)w_n(y)\,\mathrm{d}\gamma(y)}{(k_n+k_n)(k_n+\overline{k_m})}+\frac{k_m^2\Phi(k-k_m)\int_\Gamma g_m(y,k_n)w_n(y)\,\mathrm{d}\gamma(y)}{(k_n+k_m)(k_m+\overline{k_m})}\right). \tag{27}$$

Il est toujours possible de prendre pour fonction $\Phi(k)$ une fenêtre constante sur une bande suffisamment étroite pour pouvoir considérer que $g_m(y,k)$ n'y évolue pas. Lorsque $\zeta_n \to \infty$, $\varepsilon_m \to 0$, les parties imaginaires et réelles de k, k_n et k_m, qui vérifient (24), deviennent suffisamment proches pour que l'on puisse écrire :

$$\begin{cases} \frac{k_n^2}{(k_n+k_n)(k_n+\overline{k_m})} \cong \frac{k_m^2}{(k_n+k_m)(k_n+\overline{k_m})} \cong \frac{1}{4}, \\ \quad \overline{k_m} - k_n = K_m - \gamma_n + \mathrm{i}\big(k\varepsilon_m + \frac{k}{k_n+\gamma_n}\frac{1}{\zeta_n}\big) \cong \mathrm{i}\big(k\varepsilon_m + \frac{1}{2\zeta_n}\big), \\ \overline{k_n} - k_n = \frac{\mathrm{i}k}{k_n+\overline{k_n}}\big(\frac{1}{\zeta_n} + \frac{1}{\overline{\zeta_n}}\big) \cong \mathrm{i}R_e\big(\frac{1}{\zeta_n}\big), \quad \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\overline{k_m}-k_n)|x-y|} \cong \mathrm{e}^{-(k\varepsilon_m+1/(2\zeta_n))|x-y|}. \end{cases} \tag{28}$$

Une simplification consiste à considérer que, pour les modes concernés, le facteur multiplicatif ci-dessus est indépendant des indices m et n et vaut $(\mathrm{e}^{-R_e(1/\zeta)|x-y|} + \mathrm{e}^{-(k\varepsilon+1/(2\zeta))|x-y|})^{-1}$. Cette hypothèse n'interdit pas de considérer que les paramètres ε et ζ dépendent du nombre d'onde k considéré. Elle permet, après une sommation sur tous les résidus dans (22) et (23), une recombinaison de tous les modes acoustiques prépondérants, qui conduit à exprimer la relation (18), à une convolution près, sous la forme :

$$\begin{aligned} &\int_\Gamma \big(1 - \big(\mathrm{e}^{-R_e(1/\zeta)|x-y|} + \mathrm{e}^{-(k\varepsilon+1/(2\zeta))|x-y|}\big)^{-1}\big)\left(\frac{\partial}{\partial n_y} - \frac{\mathrm{i}k}{\zeta}\right)\left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}k|x-y|}}{4\pi|x-y|}\right)u(y,k,\varepsilon,\zeta)\,\mathrm{d}\gamma(y) \\ &\quad \underset{k}{\overset{*}{=}} \int_\Gamma \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}k|x-y|}}{4\pi|x-y|}g(y,k,\varepsilon)\,\mathrm{d}\gamma(y) + \vartheta\left(\frac{1}{\zeta},\varepsilon\right). \end{aligned} \tag{29}$$

4. Remarques

La fonction de Green $G^\zeta(x,y)$ est dans $\mathrm{L}^2(\Omega)$ mais pas dans $\mathrm{H}^1(\Omega)$, puisqu'elle contient une singularité en $\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}k|x-y|}}{4\pi|x-y|}$. En revanche, les modes u_n et w_n sont dans $\mathrm{H}^1(\Omega)$. L'opérateur intégral $\varphi \to \int_\Omega G^\zeta(x,y)\varphi(y)\,\mathrm{d}y$ est un opérateur compact dans $\mathrm{H}^1(\Omega)$, ce qui permet sa décomposition en série de fonctions propres $\frac{1}{k_n^2-k^2}w_n(x) = \int_\Omega G^\zeta(x,y)w_n(y)\,\mathrm{d}y$. La série qui définit cette fonction de Green ne peut donc pas être une suite de Cauchy, sinon elle convergerait dans $\mathrm{H}^1(\Omega)$. La série (8) résultant d'une convolution de la distribution $g\delta(\Gamma)$ par G^ζ est fortement convergente puisque la singularité de la fonction de Green a une contribution nulle dans cette convolution : c'est une expression correcte de la solution u de (1) y compris sur le bord Γ du domaine Ω. Néanmoins, prendre les gradients terme à terme de la série (8) revient à convoluer par le gradient de G^ζ au sens des fonctions et non pas au sens des distributions (formulation variationnelle), alors que G^ζ, et donc la série qui la définit, est singulière. Il est alors normal de retrouver les conditions aux limites homogènes, puisque cela revient à écrire formellement $(\frac{\partial\varphi}{\partial n_x} - \frac{\mathrm{i}k}{\zeta}\varphi)|_\Gamma = -\int_\Gamma(\frac{\partial G^\zeta}{\partial n_y}(x,y) - \frac{\mathrm{i}k}{\zeta}G^\zeta(x,y))\varphi(y)\,\mathrm{d}\gamma(y) = 0,\ \forall x \in \Gamma$. La singularité de $\frac{\partial G^\zeta}{\partial n_y}$ ne donne en effet aucune contribution, puisque $\frac{\partial}{\partial n_x}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}k|x-y|}}{4\pi|x-y|} = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}k|x-y|}}{4\pi|x-y|^3}(\mathrm{i}k|x-y|-1)(y-x,n_x)$ est d'ordre $\frac{1}{|x-y|}$ car $\frac{(x-y,n_x)}{|x-y|}$ a un zéro simple lorsque $x \to y$ sur Γ, le vecteur $\lim_{x\to y}\frac{(x-y)}{|x-y|}$ étant orthogonal à n_x.

Références

[1] A. Bamberger, T. Ha Duong, Diffraction d'une onde acoustique par une paroi absorbante : nouvelles équations intégrales, Rapport interne n° 121, Centre de mathématiques appliquées de l'Ecole polytechnique, 91128 Palaiseau Cedex, 1985.
[2] J.P. Dalmont, Acoustic impedance measurement, Parts I & II, J. Sound Vib. 243 (2001) 427–460.
[3] J.L. Lions, Cours d'analyse de l'Ecole polytechnique, 91128 Palaiseau Cedex, 1984.
[4] J.L. Lions, E. Magenes, Problèmes aux limites non homogènes et applications, I, Dunod, Paris, 1968.
[5] P.M. Morse, H. Fesbach, Methods of Theoretical Physics, I, Interscience, New York, 1953.