Available online at www.sciencedirect.com

SCIENCE DIRECT®

C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 339 (2004) 597–602

COMPTES RENDUS MATHEMATIQUE

http://france.elsevier.com/direct/CRASS1/

Problèmes mathématiques de la mécanique

Étude d'un modèle thermo-chimique de formation d'un matériau composite

Salha Meliani, Grigory Panasenko, Laetitia Paoli

Équipe d'analyse numérique, UPRES EA 3058, université de Saint-Etienne, 23, rue Paul Michelon, 42023 Saint-Etienne, France

Reçu le 17 décembre 2003 ; accepté après révision le 28 août 2004

Disponible sur Internet le 1er octobre 2004

Présenté par Philippe G. Ciarlet

Résumé

On considère un matériau composite constitué d'un tissu de fibres (de carbone ou de verre) noyé dans une résine qui se solidifie sous l'effet de la chaleur (réaction de réticulation). La modélisation mathématique du processus d'élaboration du matériau est donnée par une équation cinétique décrivant l'évolution de la réaction de réticulation couplée à l'équation de la chaleur. La structure du matériau est périodique de période $\varepsilon > 0$. On établit un résultat d'existence et d'unicité à l'aide du théorème de point fixe de Schauder. Par un dévelopement asymptotique formel on obtient un problème homogénéisé décrivant le comportement macroscopique du matériau. On prouve la convergence vers la solution du problème homogénéisé quand ε tend vers zéro et on obtient une estimation d'erreur pour un cas de non-linéarité faible. Finalement on résout numériquement le problème homogénéisé. ***Pour citer cet article : S. Meliani et al., C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 339 (2004).***

Abstract

Study of a thermo-chemical model of formation of a composite material. We consider a composite material constituted of carbon or glass fibres included in a resin which becomes solid when it is heated up (reaction of reticulation). The mathematical modelling of the cure process is given by a kinetic equation describing the evolution of the reaction of reticulation coupled with the heat equation. The geometry of the composite material is periodic, with a small period $\varepsilon > 0$. First we prove the existence and uniqueness of a solution by using Schauder's fixed point theorem. Then, by using an asymptotic expansion, we derive the homogenized problem which describes the macroscopic behaviour of the material. We prove the convergence of the solution of the problem to the solution of the homogenized problem when ε tends to zero and we obtain an error estimate in a case of weak non-linearity. Finally we solve numerically the homogenized problem. ***To cite this article: S. Meliani et al., C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 339 (2004).***

Adresses e-mail : salha.meliani@univ-st-etienne.fr (S. Meliani), grigory.panasenko@univ-st-etienne.fr (G. Panasenko), laetitia.paoli@univ-st-etienne.fr (L. Paoli).

1631-073X/$ – see front matter
doi:10.1016/j.crma.2004.08.003

Abridged English version

We denote by T_ε and α_ε the temperature and the reticulation rate of the composite material. Since the reaction of reticulation is exothermic the evolution of α_ε and T_ε during the cure process is described by the kinetic equation (2) coupled to the heat equation (1) in which the source term depends on the evolution of α_ε in a non-linear way. The composite material is heated up in a furnace, thus the temperature on the boundary of the domain is equal to the furnace temperature which is constant during the reticulation process. It follows that we can consider Dirichlet boundary conditions for T_ε (see Eq. (3)) and the initial values of T_ε and α_ε are given by Eq. (4).

For this system of coupled non-linear partial differential equations (P_ε) we prove the existence and uniqueness of a solution in the functional space $C^0([0,\tau];L^2(\Omega))\times W$ with

$$W=\left\{w\in L^2\big(0,\tau;H_0^1(\Omega)\big),\ \frac{\partial w}{\partial t}\in L^2\big(0,\tau;H^{-1}(\Omega)\big)\right\}.$$

Then we apply the technics of formal asymptotic developpements to derive the homogenized problem, given by $(\mathrm{P}_{\mathrm{hom}})$, which describes the macroscopic behaviour of the material. We prove that the sequence $(\alpha_\varepsilon,T_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ converges strongly to the unique solution of $(\mathrm{P}_{\mathrm{hom}})$ in $(L^2(0,\tau;L^2(\Omega)))^2$ when ε tends to zero. In order to find an estimate for the difference of the exact and the homogenized solutions we suppose that $f_\varepsilon=q(\frac{x}{\varepsilon})f(\alpha_\varepsilon,T_\varepsilon,x)+f_0(x,t)$ with $f(\alpha,T,x)=\bar f(x)+\phi(\alpha,T)$, where ϕ is a λ-Lipschitzian mapping from $\mathbb{R}^2$ to $\mathbb{R}$. We assume that $\phi\in C^4(\mathbb{R}^2)$ and λ is a positive constant small enough (weak non-linearity). Under these conditions and some regularity assumptions (see H4–H6), we obtain

$$\big\|T_\varepsilon-(T_0+\varepsilon T_1)\big\|_{V_2^0(\Omega\times(0,\tau))}+\|\alpha_\varepsilon-\alpha_0\|_{L^2(\Omega\times(0,\tau))}=\mathrm{O}(\sqrt{\varepsilon})$$

with $V_2^0(\Omega\times(0,\tau))=\{u\in H_0^1(\Omega\times(0,\tau))\cap L^\infty(0,\tau;L^2(\Omega))\}$ and

$$\|u\|_{V_2^0(\Omega\times(0,\tau))}=\operatorname*{Ess\,sup}_{0\leqslant t\leqslant\tau}\big\|u(\cdot,t)\big\|_{L^2(\Omega)}+\|\nabla u\|_{L^2(\Omega\times(0,\tau))}.$$

Finally, we are interested in the computation of approximate solutions of $(\mathrm{P}_{\mathrm{hom}})$. We consider a family of discretized problems $(\mathrm{P}^n_{\mathrm{hom}})$ for which we prove stability and convergence.

1. Introduction

On suppose que :

(H1) Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$, $n\geqslant 2$, de frontière $\partial\Omega$ lipschitzienne par morceaux.

On désigne par $y=\frac{x}{\varepsilon}$, la variable « microscopique » et on note $Y=(0,1)^n$ la cellule de périodicité. On désigne par C_f et C_r, respectivement K_f, K_r, la capacité calorifique et la conductivité thermique des fibres et de la résine.

(H2) Les fonctions C et K sont Y-périodiques et sont égales à C_f et K_f, respectivement à C_r et K_r, si εy appartient à la fibre ou la résine.

(H3) La fonction f est une application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, ν-lipschitzienne et bornée globalement ; q est une application de $\mathbb{R}\times Y$ dans $\mathbb{R}$, bornée globalement, ζ-lipschitzienne par rapport à sa première variable et continue, Y-périodique par rapport à la seconde.

L'évolution de la température T_ε et du taux de réticulation α_ε du matériau composite pendant le processus de séchage est décrit par le système

$$C\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\frac{\partial T_\varepsilon}{\partial t} - \operatorname{div}\left(K\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\nabla T_\varepsilon\right) = f_\varepsilon \quad \text{dans } \Omega \times (0,\tau), \tag{1}$$

$$\frac{\partial \alpha_\varepsilon}{\partial t} = f(\alpha_\varepsilon, T_\varepsilon) \quad \text{dans } \Omega \times (0,\tau). \tag{2}$$

La réaction de réticulation étant exothermique, le terme-source f_ε dépend de la variation de α_ε (cf. [6] par exemple) et est donné par

$$f_\varepsilon = q\left(\alpha_\varepsilon, \frac{x}{\varepsilon}\right)\frac{\partial \alpha_\varepsilon}{\partial t} = q\left(\alpha_\varepsilon, \frac{x}{\varepsilon}\right) f(\alpha_\varepsilon, T_\varepsilon).$$

Le matériau composite est chauffé dans un four donc la température au bord du domaine reste constante et, quitte à remplacer T_ε par $T_\varepsilon - T_{\text{four}}$, on a

$$T_\varepsilon(x,t) = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \times (0,\tau) \tag{3}$$

et les conditions initiales sont données par

$$T_\varepsilon(x,0) = T^0(x), \quad \alpha_\varepsilon(x,0) = \alpha^0(x) \quad \text{dans } \Omega. \tag{4}$$

Les Éqs. (1)–(4) definissent un système noté (P_ε). Nous obtenons le résultat d'existence et d'unicité suivant :

Théorème 1.1. *Sous les hypothèses* (H1), (H2) *et* (H3) *et pour tout* (α^0, T^0) *donnés dans* $L^2(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$, *le problème* (P_ε) *admet une unique solution faible* $(\alpha_\varepsilon, T_\varepsilon)$ *dans l'espace* $C^0([0,\tau]; L^2(\Omega)) \times W$ *où* W *est défini par*

$$W = \left\{ w \in L^2\big(0,\tau; H_0^1(\Omega)\big),\ \frac{\partial w}{\partial t} \in L^2\big(0,\tau; H^{-1}(\Omega)\big) \right\}.$$

Idée de la preuve (cf. [5]). On utilise un argument de point fixe. Pour T fixé dans $L^2(0,\tau; L^2(\Omega))$ on résout d'abord l'équation cinétique c'est à dire le problème (P_1) suivant :

$$(\mathrm{P}_1) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial \alpha}{\partial t}(x,t) = f(\alpha, T), & x \in \Omega,\ t \in]0,\tau[, \\ \alpha(x,0) = \alpha^0(x), & x \in \Omega. \end{cases}$$

Puis on définit $\overline{T} \in W$ comme l'unique solution du problème suivant :

$$(\mathrm{P}_2) \qquad \begin{cases} C\left(\dfrac{x}{\varepsilon}\right)\dfrac{\partial \overline{T}}{\partial t}(x,t) - \operatorname{div}\left(K\left(\dfrac{x}{\varepsilon}\right)\nabla \overline{T}\right) = q\left(\alpha, \dfrac{x}{\varepsilon}\right) f(\alpha, T), & x \in \Omega,\ t \in]0,\tau[, \\ \overline{T}(x,0) = T^0(x), & x \in \Omega \\ \overline{T}(x,t) = 0, & x \in \partial\Omega,\ t \in]0,\tau[\end{cases}$$

et on montre que $\overline{T}$ est borné dans W indépendamment de T et α. On applique ensuite le théorème de point fixe de Schauder à l'opérateur $\Theta : L^2(0,\tau; L^2(\Omega)) \to L^2(0,\tau; L^2(\Omega))$ défini par $\Theta(T) = \overline{T}$. Enfin, pour prouver l'unicité de la solution du problème (P_ε) on utilise le lemme de Gronwall.

2. Obtention du problème homogénéisé

Pour déterminer le problème homogénéisé, on utilise la technique des développements asymptotiques (cf. [1]) c'est à dire on suppose que :

$$T_\varepsilon(x,t) = T_0(x,y,t) + \varepsilon T_1(x,y,t) + \varepsilon^2 T_2(x,y,t) + \cdots, \tag{5}$$

$$\alpha_\varepsilon(x,t) = \alpha_0(x,y,t) + \varepsilon \alpha_1(x,y,t) + \varepsilon^2 \alpha_2(x,y,t) + \cdots, \tag{6}$$

où les $T_i(x,y,t)$ et $\alpha_i(x,y,t)$ sont des fonctions Y-périodiques par rapport à la variable $y=\frac{x}{\varepsilon}$. On introduit les formules (5), (6) dans le système (1), (2) et on identifie les termes associés aux mêmes puissances de ε. Les fonctions f et q sont lipschitziennes donc, on a

$$q(\alpha_\varepsilon,y)f(\alpha_\varepsilon,T_\varepsilon)=q(\alpha_0,y)f(\alpha_0,T_0)+\mathrm{O}(\varepsilon),\qquad f(\alpha_\varepsilon,T_\varepsilon)=f(\alpha_0,T_0)+\mathrm{O}(\varepsilon),$$

et on obtient le problème homogénéisé suivant

$$(P_{\text{hom}})\begin{cases}\widehat{C}\dfrac{\partial T_0}{\partial t}(x,t)-\operatorname{div}(A\nabla T_0)=\hat{q}(\alpha_0)f(\alpha_0,T_0), & x\in\Omega,\ t\in(0,\tau),\\ \dfrac{\partial\alpha_0}{\partial t}(x,t)=f(\alpha_0,T_0), & x\in\Omega,\ t\in(0,\tau),\\ T_0(x,0)=T^0(x),\quad \alpha_0(x,0)=\alpha^0(x), & x\in\Omega,\\ T_0(x,t)=0, & x\in\Gamma=\partial\Omega,\ t\in(0,\tau)\end{cases}$$

où $\widehat{C}=\int_Y C(y)\,\mathrm{d}y$, $\hat{q}(\alpha_0)=\int_Y q(\alpha_0,y)\,\mathrm{d}y$, $A=(a_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$, et

$$a_{ij}=\int_Y K(y)\big(\delta_{ij}+\partial_{y_i}\omega_j(y)\big)\,\mathrm{d}y$$

avec

$$\omega_j\in H^1_\#(Y)/\mathbb{R}\quad\text{tel que}\quad \operatorname{div}_y\big(K(y)\nabla_y\omega_j(y)\big)=-\operatorname{div}_y\big(K(y)e_j\big),\tag{7}$$

$(e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ étant la base canonique de $\mathbb{R}^n$ et $H^1_\#(Y)$ l'ensemble des fonctions Y-périodiques appartenant à $H^1(Y)$ localement.

En utilisant les mêmes techniques que dans le Théorème 1.1 on démontre que (P_{hom}) admet une unique solution dans $C^0([0,\tau];L^2(\Omega))\times W$.

Théorème 2.1. *Sous les hypothèses* (H1), (H2) *et* (H3) *et pour tout* $(\alpha^0,T^0)\in L^2(\Omega)\times H^1_0(\Omega)$ *la suite* $(\alpha_\varepsilon,T_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ *converge vers* (α_0,T_0) *dans* $L^2(0,\tau;L^2(\Omega))^2$ *quand* ε *tend vers zéro.*

Idée de la preuve (cf. [5]). On établit d'abord des estimations a priori pour $(\alpha_\varepsilon,T_\varepsilon)$ dans $C^0([0,\tau];L^2(\Omega))\times W$. On en déduit l'existence d'une sous-suite de $(T_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ qui converge faiblement dans W et fortement dans $L^2(0,\tau;L^2(\Omega))$. En utilisant le lemme de Gronwall on démontre la convergence forte de $(\alpha_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ dans $L^2(0,\tau;L^2(\Omega))$. Puis on démontre que les limites sont solutions de (P_{hom}) en utilisant la méthode de l'énergie (cf. [2]).

3. Estimation d'erreur

Le but de cette section est de trouver une estimation d'erreur. Pour cela on suppose que :

(H4) $f_\varepsilon=q(\frac{x}{\varepsilon})f(\alpha_\varepsilon,T_\varepsilon,x)+f_0(x,t)$ avec $f(\alpha,T,x)=\bar{f}(x)+\phi(\alpha,T)$, c'est-à-dire que la fonction f prend des valeurs proches de la fonction $\bar{f}$ qui correspond à des valeurs fixes de la température et du taux de réticulation (par exemple T^0 et α^0 respectivement).

(H5) La fonction ϕ est λ-lipschitzienne de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, de plus $\phi\in C^4(\mathbb{R}^2)$, $\partial\Omega\in C^1$ et λ satisfait

$$\lambda<k_1\left(\max\left\{1,\frac{\operatorname{diam}\Omega}{\sqrt{2}}\right\}\left(k_1\tau+\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)q_1\operatorname{diam}\Omega\right)\right)^{-1}.\tag{8}$$

(H6) $T^0 \in C^4(\overline{\Omega}),\ \bar{f} \in C^2(\overline{\Omega}),\ f_0 \in C^2(\Omega\times[0,\tau]),\ \alpha_0 \in C^2(\overline{\Omega})$.

On considère le problème plus général suivant :

$$\begin{cases} C\left(\dfrac{x}{\varepsilon}\right)\dfrac{\partial T_\varepsilon}{\partial t}(x,t) - \operatorname{div}\left(K\left(\dfrac{x}{\varepsilon}\right)\nabla T_\varepsilon\right) = q\left(\dfrac{x}{\varepsilon}\right) f(\alpha_\varepsilon, T_\varepsilon, x) + f_0(x,t) + \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} f_i(x,t), \\ \dfrac{\partial \alpha_\varepsilon}{\partial t}(x,t) = f(\alpha_\varepsilon, T_\varepsilon, x) + g(x,t), \quad x \in \Omega,\ t \in (0,\tau), \\ T_\varepsilon(x,0) = T^0(x), \quad \alpha_\varepsilon(x,0) = \alpha^0(x), \quad x \in \Omega, \\ T_\varepsilon(x,t) = 0, \quad x \in \Gamma = \partial\Omega,\ t > 0, \end{cases} \tag{9}$$

avec $f_i, 1 \leqslant i \leqslant n$ des fonctions de $L^2(\Omega \times]0,\tau[)$.

Théorème 3.1. (1) *Pour tout* $T^0,\ \alpha^0 \in L^2(\Omega)$ *et* $g,\ f_0,\ f_i,\ (i = \overline{1,n}) \in L^2(\Omega \times]0,\tau[)$ *et sous les hypothèses* (H1)–(H2), (H4)–(H6) *le problème* (9) *admet une unique solution* $(T_\varepsilon, \alpha_\varepsilon)$ *dans* $V_2^0(\Omega \times]0,\tau[) \times L^2(\Omega \times]0,\tau[)$.

(2) *Soit* $T_1^0,\ T_2^0,\ \alpha_1^0,\ \alpha_2^0 \in L^2(\Omega),\ g_1,\ g_2,\ f_{01},\ f_{02},\ f_{i1},\ f_{i2},\ (i = \overline{1,n}) \in L^2(\Omega \times]0,\tau[)$.

Notons $(T_{\varepsilon k}, \alpha_{\varepsilon k})$ *l'unique solution du problème* (9) *avec* $T^0 = T_k^0,\ \alpha^0 = \alpha_k^0,\ g = g_k,\ f_0 = f_{0k},\ f_i = f_{ik}$, $(i = \overline{1,n})$, $k = \{1,2\}$. *Alors on obtient l'estimation suivante* :

$$\begin{aligned} &\|T_{\varepsilon 1} - T_{\varepsilon 2}\|_{V_2^0(\Omega\times]0,\tau[)} + \|\alpha_{\varepsilon 1} - \alpha_{\varepsilon 2}\|_{L^2(\Omega\times]0,\tau[)} \leqslant C_1 \Bigg\{ \|g_1 - g_2\|_{L^2(\Omega\times]0,\tau[)} \\ &\quad + \|f_{01} - f_{02}\|_{L^2(\Omega\times]0,\tau[)} + \sum_{i=1}^{n} \|f_{i1} - f_{i2}\|_{L^2(\Omega\times]0,\tau[)} + \|T_1^0 - T_2^0\|_{L^2(\Omega)} + \|\alpha_1^0 - \alpha_2^0\|_{L^2(\Omega)} \Bigg\}. \end{aligned}$$

Idée de la preuve (cf. [4]). On utilise le théorème de point fixe de Banach. Sous les hypothèses (H4)–(H6), le problème ($\mathrm{P}_{\mathrm{hom}}$) s'écrit :

$$\begin{cases} \widehat{C}\dfrac{\partial T_0}{\partial t}(x,t) - \operatorname{div}(A\nabla T_0) = \hat{q} f(\alpha_0, T_0, x) + f_0(x,t), \quad x \in \Omega,\ t > 0, \\ \dfrac{\partial \alpha_0}{\partial t}(x,t) = f(\alpha_0, T_0, x), \quad x \in \Omega,\ t > 0, \\ T_0(x,t) = 0, \quad x \in \partial\Omega,\ t > 0, \\ T_0(x,0) = T^0(x), \quad \alpha_0(x,0) = \alpha^0(x), \quad x \in \Omega, \end{cases} \tag{10}$$

et $(T_0, \alpha_0) \in C^3(\overline{\Omega}\times[0,\tau]) \times C^0(\overline{\Omega}\times[0,\tau])$. On définit les fonctions T_1 et T_2 par

$$\begin{aligned} T_1(x,y,t) &= \sum_{j=1}^{n} \omega_j(y) \frac{\partial T_0}{\partial x_j}(x,t), \\ T_2(x,y,t) &= \sum_{i,j=1}^{n} N_{ij}(y) \frac{\partial^2 T_0}{\partial x_i \partial x_j} + N_{00,1}(y)\frac{\partial T_0}{\partial t} + M_0(y) f(\alpha_0, T_0, x), \end{aligned}$$

où ω_j est la solution du problème auxiliaire (7) et les fonctions $N_{ij},\ N_{00,1},\ M_0$ sont respectivement les solutions des problèmes suivants :

$$\begin{aligned} &-\operatorname{div}_y\big(K(y)\nabla_y N_{ij}\big) = \frac{\partial}{\partial y_i}\big(K(y)\omega_j(y)\big) + K(y)\frac{\partial}{\partial y_i}\omega_j(y) + K(y)\delta_{ij} - A_{ij}, \\ &-\operatorname{div}_y\big(K(y)\nabla_y N_{00,1}\big) = -\big(C(y) - \widehat{C}\big),\ -\operatorname{div}_y\big(K(y)\nabla_y M_0\big) = \big(q(y) - \hat{q}\big). \end{aligned}$$

On définit la fonction χ_ε (cf. [1]) par $\chi_\varepsilon(x) = \frac{\mathrm{dist}(x,\partial G)}{\varepsilon}$ si $\mathrm{dist}(x,\partial G) \leqslant \varepsilon$, 1 sinon.

Puis on définit $T^{(0)}(x, \frac{x}{\varepsilon}, t) = T_0(x,t) + (\varepsilon T_1(x, \frac{x}{\varepsilon}, t) + \varepsilon^2 T_2(x, \frac{x}{\varepsilon}, t))\chi_\varepsilon(x)$ et on démontre que

Théorème 3.2. *Sous les hypothèses* (H1)–(H6) *on obtient*

$$\|T_\varepsilon - T^{(0)}\|_{V_2^0(\Omega\times]0,\tau[)} + \|\alpha_\varepsilon - \alpha_0\|_{L^2(\Omega\times]0,\tau[)} = \mathrm{O}(\sqrt{\varepsilon}).$$
$$\big\|T_\varepsilon - (T_0 + \varepsilon T_1)\big\|_{V_2^0(\Omega\times]0,\tau[)} + \|\alpha_\varepsilon - \alpha_0\|_{L^2(\Omega\times]0,\tau[)} = \mathrm{O}(\sqrt{\varepsilon}).$$

4. Résolution numérique du problème ($\mathrm{P}_{\mathrm{hom}}$)

On considère un sous-espace de dimension finie $W_{\Delta x}\times V_{\Delta x}$ de $H_0^1(\Omega)\times L^2(\Omega)$ et on note $T_{0\Delta x}, \alpha_{0\Delta x}$ la projection orthogonale dans $H^1(\Omega)\times L^2(\Omega)$ de (T^0,α^0) sur $W_{\Delta x}\times V_{\Delta x}$. On définit une famille de problèmes discrétisés

$$(\mathrm{P}^n_{\mathrm{hom}})\quad \begin{cases} \left(\widehat{C}\dfrac{T^{n+1}_{\Delta x} - T^n_{\Delta x}}{\Delta t}, w_{\Delta x}\right)_{0,\Omega} + \beta_1(A\nabla T^{n+1}_{\Delta x}, \nabla w_{\Delta x})_{0,\Omega} + (1-\beta_1)(A\nabla T^n_{\Delta x}, \nabla w_{\Delta x})_{0,\Omega} \\ \quad = \beta_2\big(\hat{q}(\alpha^{n+1}_{\Delta x}) f(\alpha^{n+1}_{\Delta x}, T^{n+1}_{\Delta x}), w_{\Delta x}\big)_{0,\Omega} + (1-\beta_2)\big(\hat{q}(\alpha^n_{\Delta x}) f(\alpha^n_{\Delta x}, T^n_{\Delta x}), w_{\Delta x}\big)_{0,\Omega}, \\ \quad \forall w_{\Delta x}\in W_{\Delta x}, \\ \left(\dfrac{\alpha^{n+1}_{\Delta x} - \alpha^n_{\Delta x}}{\Delta t}, v_{\Delta x}\right)_{0,\Omega} = \beta_2\big(f(\alpha^{n+1}_{\Delta x}, T^{n+1}_{\Delta x}), v_{\Delta x}\big)_{0,\Omega} + (1-\beta_2)\big(f(\alpha^n_{\Delta x}, T^n_{\Delta x}), v_{\Delta x}\big)_{0,\Omega}, \\ \quad \forall v_{\Delta x}\in V_{\Delta x} \end{cases}$$

pour tout $n\in\{0,\dots,N-1\}$, avec $N\in\mathbb{N}^*$, $\Delta t = \frac{\tau}{N}$ et $T^0_{\Delta x} = T_{0\Delta x}$, $\alpha^0_{\Delta x} = \alpha_{0\Delta x}$, $(\beta_1,\beta_2)\in[0,1]^2$.

On établit un résultat d'existence et d'unicité pour $(\mathrm{P}^n_{\mathrm{hom}})$ pour tout $(\beta_1,\beta_2)\in[0,1]^2$. On définit une approximation de la solution (T_0,α_0) du problème homogénéisé $(\mathrm{P}_{\mathrm{hom}})$, par

$$\tilde{\alpha}^{\Delta t}_{\Delta x}(x,t) = \alpha^n_{\Delta x}(x) + (t - n\Delta t)\frac{\alpha^{n+1}_{\Delta x}(x) - \alpha^n_{\Delta x}(x)}{\Delta t},$$
$$\widetilde{T}^{\Delta t}_{\Delta x}(x,t) = T^n_{\Delta x}(x) + (t - n\Delta t)\frac{T^{n+1}_{\Delta x}(x) - T^n_{\Delta x}(x)}{\Delta t}$$

pour tout $0\leqslant n\leqslant N-1$, $n\Delta t \leqslant t \leqslant (n+1)\Delta t$, $x\in\Omega$. On démontre que les suites $(\tilde{\alpha}^{\Delta t}_{\Delta x})_{\Delta t,\Delta x}$ et $(\widetilde{T}^{\Delta t}_{\Delta x})_{\Delta t,\Delta x}$ sont bornées dans $C^0([0,\tau]; L^2(\Omega))$ et W respectivement independamment de Δt et Δx pour tout $\beta_1 \geqslant \frac{1}{2}$ et pour tout $\beta_2\in[0,1]$. Puis on établit la convergence vers la solution de $(\mathrm{P}_{\mathrm{hom}})$ quand Δt et Δx tendent vers zéro (cf. [3]).

Références

[1] N. Bakhvalov, G. Panasenko, Homogenization Averaging Process in Periodic Media, Kluwer Academic, Dordrecht, 1989.

[2] U. Hornung (Ed.), Homogenization and Porous Media, Interdisciplinary Applied Mathematics Series, Springer-Verlag, 1996.

[3] S. Meliani, Etude asymptotique et numérique d'un modèle thermo-chimique de formation d'un matériau composite, Thèse de Doctorat en mathématiques, Université de St-Etienne, 2003.

[4] S. Meliani, G. Panasenko, Thermo-chemical modelling of formation of a composite material, Appl. Anal., à paraitre.

[5] S. Meliani, L. Paoli, Homogenization of a model of cure process for composites, Nonlinear Anal. 56 (2004) 385–413.

[6] S.R. White, C. Kim, A simultaneous lay-up and in situ cure process for thick composites, J. Reinf. Plast. Comp. 12 (1993) 520–535.