Available online at www.sciencedirect.com
SCIENCE DIRECT®
C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 339 (2004) 873–877
COMPTES RENDUS MATHEMATIQUE
http://france.elsevier.com/direct/CRASS1/

Probability Theory

Some remarks about the positivity of random variables on a Gaussian probability space

Denis Feyel [a], A. Suleyman Üstünel [b]

[a] *Université d'Evry-Val-d'Essone, département de mathématiques, 91025 Evry cedex, France*
[b] *ENST, département Infres, 46, rue Barrault, 75013 Paris, France*

Received 5 October 2004; accepted 11 October 2004

Available online 13 November 2004

Presented by Paul Malliavin

Abstract

Let (W, H, μ) be an abstract Wiener space and let $L \in \mathbb{L}\log\mathbb{L}(\mu)$ is a positive random variable. Using the measure transportation of Monge–Kantorovitch, we prove that the operator corresponding to the kernel of the projection of L on the second Wiener chaos is lower bounded by a semi-positive Hilbert–Schmidt operator. ***To cite this article: D. Feyel, A.S. Üstünel, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 339 (2004).***

Résumé

Quelques remarques sur la positivité des variables aléatoires définies sur un espace gaussien. Soit (W, H, μ) un espace de Wiener abstrait et soit $L \in \mathbb{L}\log\mathbb{L}$ une variable aléatoire positive. A l'aide de la théorie de transport de mesure de Monge–Kantorovitch, nous montrons que le noyau de la projection de L dans le second chaos de Wiener est un opérateur de spectre inférieurement borné et que l'opérateur correspondant est inférieurement borné par un opérateur Hilbert–Schmidt semi-positif. ***Pour citer cet article : D. Feyel, A.S. Üstünel, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 339 (2004).***

Version française abrégée

Soit (W, H, μ) un espace de Wiener abstrait : W est un Fréchet séparable localement convexe, μ est une mesure gaussienne dont le support est W et H est l'espace de Cameron–Martin dont le produit scalaire et la norme sont notés respectivement $(\cdot,\cdot)_H$ et $|\cdot|_H$. On notera ∇ la fermeture par rapport à μ de la dérivée dans la direction de H. En particulier, pour un espace hilbertien M, $\mathbb{D}_{2,k}(M)$ est l'espace des classes d'équivalence de fonctions

E-mail addresses: feyel@maths.univ-evry.fr (D. Feyel), ustunel@enst.fr (A.S. Üstünel).

1631-073X/$ – see front matter
doi:10.1016/j.crma.2004.10.014

mesurables, à valeurs dans M, dont les dérivées d'ordre $k \in \mathbb{N}$ sont de carré intégrable par rapport à la norme du produit tensoriel Hilbert–Schmidt $M \otimes H^{\otimes k}$, où $H^{\otimes k}$ est l'espace des k-tenseurs Hilbert–Schmidt ; si $M = \mathbb{R}$ alors nous noterons $\mathbb{D}_{2,k}$ au lieu de $\mathbb{D}_{2,k}(\mathbb{R})$ (cf. [4,11,15]). On notera δ l'adjoint de ∇ par rapport à μ, qui est une application continue de $\mathbb{D}_{2,1}(M \otimes H^{\otimes k+1})$ dans $\mathbb{D}_{2,1}(M \otimes H^{\otimes k})$. Noter que $\delta \circ \nabla$ est l'opérateur d'Ornstein–Uhlenbeck, il sera noté $\mathcal{L}$. A l'aide de l'inégalité de Meyer, on peut définir les espaces de Sobolev d'ordre négatif $(\mathbb{D}_{p,\alpha},\ \alpha \in \mathbb{R},\ p > 1)$ et on note $\mathbb{D}' = \bigcup_{p>1,\ \alpha \in \mathbb{R}} \mathbb{D}_{p,\alpha}$, qui est dual de l'espace $\mathbb{D} = \bigcap_{p>1,\ \alpha\in\mathbb{R}} \mathbb{D}_{p,\alpha}$ (cf. [11,15]).

Quand W est l'espace de Wiener classique, i.e., $W = C_0([0,1],\mathbb{R})$, $H = H_1([0,1], dt)$ (i.e., les primitives des éléments de $\mathbb{L}^2([0,1], dt)$) il est bien connu que chaque élément L de $\mathbb{L}^2(\mu)$ admet une décomposition unique

$$L = E[L] + \sum_{n=1}^{\infty} I_n(L_n),$$

où $L_n \in \mathbb{L}^2_s([0,1]^n)$ et ce dernier représente les fonctions symétriques et de carré intégrables sur $[0,1]^n$. Soit $H^{\odot n}$ le produit tensoriel symétrique d'ordre n de H, qui est isomorphe à $\mathbb{L}^2_s([0,1]^n)$. Si on note i_n, $n \geqslant 1$, cet isomorphisme, on peut montrer facilement que $I_n(L_n) = \delta^n(i_n(L_n))$, où $\delta^n = (\nabla^n)^\star$ par rapport à μ. Avec ces relations, on peut montrer à partir de la formule de Taylor que

$$L = E[L] + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}\delta^n\big(E[\nabla^n L]\big),$$

cf. [10,12,14,17] et aussi [15,16].

Soit ν une autre probabilité, notons par $\Sigma(\mu,\nu)$ l'ensemble des probabilités sur $W \times W$ de marginales μ et ν. On note J la fonctionnelle définie sur $\Sigma(\mu,\nu)$ par $J(\beta) = \int_{W\times W} |x-y|_H^2\, d\beta(x,y)$. Dans le cas où W est de dimension finie, le problème de Monge–Kantorovitch consiste à trouver une mesure $\gamma \in \Sigma(\mu,\nu)$ telle que la distance de Wasserstein

$$d_H^2(\mu,\nu) = \inf\big\{J(\beta):\ \beta \in \Sigma(\mu,\nu)\big\}$$

soit atteinte en γ. Ce problème a été résolu dans [1] en dimension finie (cf. aussi [3] pour un survol rapide). Nous l'avons résolu dans [6,7] (cf. aussi [8]) quand la dimension de H est infinie. Expliquons plus précisément le cas particulier qui sera utilisé dans cette Note : si ν est de la forme $d\nu = L\, d\mu$, alors il existe une fonction φ, appelée le potentiel de transport, appartenant à $\mathbb{D}_{2,1}$, telle que $T: W \to W$ définie par $T = I_W + \nabla\varphi$ satisfasse $T\mu = \nu$ et telle que $\gamma = (I_W \times T)\mu$ soit l'unique mesure dans $\Sigma(\mu,\nu)$ satisfaisant $J(\gamma) = d_H^2(\mu,\nu)$. De plus φ est 1-convexe : une variable aléatoire $f: W \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ est dite r-convexe, $r \in \mathbb{R}$, si $h \to \frac{r}{2}|h|_H^2 + f(w+h)$ est convexe sur H à valeurs dans $\mathbb{L}^0(\mu)$ [5] ; si $r = 0$, on l'appelle H-convexe. De même f est H-concave ou H-log-concave si, respectivement $-f$ est H-convexe ou $-\log f$ est H-convexe. Avec les hypothèses ci-dessus T admet un inverse p.s., noté S, de la forme $S = I_W + \eta$. De plus si ∇ est fermable par rapport à ν alors $\eta: W \to H$ est de la forme $\eta = \nabla\psi$ où $\psi \in L^2(\nu)$ est ν-differentiable dans la direction de H. Notons que nous avons déjà démontré dans [9] que φ est un élément de $\mathbb{D}_{2,2}$ au lieu de $\mathbb{D}_{2,1}$ si la densité $L \in \mathbb{L}\log\mathbb{L}$ est H-concave. Cela rend possible le calcul du jacobien

$$\Lambda = \det{}_2(I_H + \nabla^2\varphi)\exp\left\{-\mathcal{L}\varphi - \frac{1}{2}|\nabla\varphi|_H^2\right\},$$

où $\det_2(I_H + \nabla^2\varphi)$ est le déterminant modifié de Carleman–Fredholm (cf. [2,16]).

1. Main results

Here is the first notable result of this Note:

Theorem 1.1. *Assume that $L \in \mathbb{L}^2(\mu)$ is a positive random variable and let φ be the forward potential function associated to the Monge–Kantorovitch problem in $\Sigma(\mu,\nu)$, where $\mathrm{d}\nu = \frac{1}{E[L]} L\,\mathrm{d}\mu$. Then the following operator inequality holds true*:

$$\frac{1}{2E[L]}\left\{E[\nabla^2 L] - \frac{E[\nabla L]\otimes E[\nabla L]}{E[L]}\right\} \geqslant E[\nabla^2\varphi]. \tag{1}$$

Proof. Let us note first that, even if φ is not in $\mathbb{D}_{2,2}$, the term $E[\nabla^2\varphi]$ is a well-defined Hilbert–Schmidt operator since the constants are elements of the space of the test functions $\mathbb{D} = \bigcap_{p,k}\mathbb{D}_{p,k}$. Without loss of generality, we may assume that $E[L] = 1$. Let then ν be the measure $\mathrm{d}\nu = L\,\mathrm{d}\mu$. Since $E[L\log L] < \infty$, the Wasserstein distance $d_H(\mu,\nu) < \infty$, consequently, there exists a 1-convex map $\varphi \in \mathbb{D}_{2,1}$ such that the transformation $T = I_W + \nabla\varphi$ solves the problem of Monge and the measure $(I \times T)\mu$ is the unique solution of Monge–Kantorovitch problem on $\Sigma(\mu,\nu)$. For an $h \in H$, let $\rho(\delta h)$ denote the Wick exponential $\rho(\delta h) = \exp(\delta h - \frac{1}{2}|h|_H^2)$. For any $t \in \mathbb{R}$, we have

$$\begin{aligned} E\big[L\rho\big(\delta(th)\big)\big] &= E\big[\rho\big(\delta(th)\big)\circ T\big] \\ &= E\left[\exp\left(t\delta h - \frac{t^2}{2}|h|_H^2\right)\circ T\right] \\ &= E\left[\exp\left(t\delta h + t(\nabla\varphi, h)_H - \frac{t^2}{2}|h|_H^2\right)\right]. \end{aligned}$$

A first order differentiation of this equality at $t = 0$ gives:

$$E\big[(\nabla L, h)_H\big] = E\big[(\nabla\varphi, h)_H\big],$$

for any $h \in H$, hence

$$E[\nabla L] = E[\nabla\varphi]. \tag{2}$$

The second order differentiation at $t = 0$ and the integration by parts formula, which follows from the fact that $\delta = \nabla^\star$, gives

$$\begin{aligned} E\big[(\nabla^2 L, h\otimes h)_2\big] &= E\big[\big(\delta h + (\nabla\varphi, h)_H\big)^2 - |h|_H^2\big] \\ &= E\big[2\,\delta h(\nabla\varphi, h)_H + (\nabla\varphi, h)_H^2\big] \\ &= E\big[2(\nabla^2\varphi, h\otimes h)_2 + (\nabla\varphi, h)_H^2\big], \end{aligned}$$

for any $h \in H$, where $(\cdot,\cdot)_2$ denotes the Hilbert–Schmidt scalar product. Hence combining this with the relation (2) gives

$$\begin{aligned} E[\nabla^2 L] &= E[\nabla\varphi\otimes\nabla\varphi] + 2E[\nabla^2\varphi] \\ &\geqslant E[\nabla\varphi]\otimes E[\nabla\varphi] + 2E[\nabla^2\varphi] \\ &= E[\nabla L]\otimes E[\nabla L] + 2E[\nabla^2\varphi] \end{aligned} \tag{3}$$

and the inequality (1) follows. □

Remark 1. Note that the inequality of Theorem 1.1 is different in spirit from the results of [13].

We can extend the inequality (1) as follows:

Corollary 1.2. *Assume that $m \in \mathbb{D}'$ is a positive distribution and denote again by m the Radon measure on W which corresponds to it* (*cf.* [15]). *Let m_2 be the projection of the distribution m to the second Wiener chaos, which is equal to $\frac{1}{2}\delta^2 M_2$, where M_2 is the element of $H \otimes H$ defined by $M_2(h \otimes k) = \langle m, \delta^2(h \otimes k)\rangle$. If the Wasserstein distance $d_H(\mu, m)$ is finite, we have again*

$$\frac{1}{2m(W)}\left\{M_2 - \frac{M_1 \otimes M_1}{m(W)}\right\} \geqslant E[\nabla^2\varphi], \tag{4}$$

where $M_1 \in H$ is defined by $(M_1, h)_H = \langle m, \delta h\rangle$, $h \in H$.

Proof. It suffices to apply Theorem 1.1 to the case $P_t m$, where P_t is the Ornstein–Uhlenbeck semigroup. Then, from [8], the corresponding transport map φ_t converges to the transport map φ corresponding to the Monge–Kantorovitch problem for $\Sigma(\mu, m)$ in $\mathbb{D}_{2,1}$, as $t \to 0$. □

We have also a weaker inequality whose difference with respect to (1) is that the Hilbert–Schmidt operator $2E[\nabla^2\varphi]$ is replaced by the identity operator of H:

Proposition 1.3. *For any positive random variable $L \in \mathbb{L}^2(\mu)$, the following inequality is valid*:

$$I_H + \frac{1}{E[L]}E[\nabla^2 L] \geqslant \frac{1}{E[L]^2}E[\nabla L] \otimes E[\nabla L],$$

where I_H denotes the identity operator of H. In particular the projection of L in the second order Wiener chaos divided by the expectation of L is 1*-convex.*

Proof. Again, we may suppose that $E[L] = 1$. Let $l(t) = E[L\,\rho(\delta(th))]$, $h \in H$, then we have

$$l'(0)^2 \leqslant |h|_H^2 + l''(0). \tag{5}$$

To see this inequality it suffices to remark that $\lambda^2 - 2\lambda\delta h + (\delta h)^2 \geqslant 0$ for any $\lambda \geqslant 0$, hence taking the expectation with respect to $L\,d\mu$ is again positive. Hence the discriminant of the second order polynomial in λ should be negative and this proves (5). To complete the proof of the proposition, it suffices to remark that $l'(0) = E[\nabla_h L]$ and that $l''(0) = \mathrm{trace}(E[\nabla^2 L]\,(h \otimes h))$. The 1-convexity of $\delta^2(\frac{E[\nabla^2 L]}{2})$ is immediate. □

Proposition 1.3 extends also to the positive elements of $\mathbb{D}'$ and it is to be noted that in this case we do not need the hypothesis about the finiteness of the Wasserstein distance:

Corollary 1.4. *Assume that $m \in \mathbb{D}'$ is a positive distribution and denote again by m the Radon measure on W which corresponds to it* (*cf.* [15]). *Using the notations of Corollary* 1.2, *we have again*

$$I_H + \frac{1}{m(W)}M_2 \geqslant \frac{1}{m(W)^2}M_1 \otimes M_1. \tag{6}$$

In particular, the projection of m in the second Wiener chaos is 1*-convex.*

Proof. It suffices to regularize again m with P_t and then pass to the limit as $t \to 0$. □

Remark 2.

(i) In the one dimensional case $W = H = \mathbb{R}$, Theorem 1.1 says that, for an $L \geqslant 0$, with $E[L] = 1$ and with $d_H^2(\mu, L \cdot \mu) < \infty$, we have the following inequality:

$$\int_{\mathbb{R}} L(x)(x^2 - 1)\mu(dx) - \left(\int_{\mathbb{R}} xL(x)\mu(dx)\right)^2 \geqslant \int_{\mathbb{R}} \varphi(x)(x^2 - 1)\mu(dx),$$

where φ is the forward transport function.

(ii) For the case $W = H = \mathbb{R}^n$, the equality (3) in the proof of Theorem 1.1 implies that

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} E[\nabla^2 L](e_i \otimes e_i) = \frac{1}{2} E[\Delta L] = \frac{1}{2} E\big[|\nabla\varphi|_H^2\big] + E[\Delta\varphi] = \frac{1}{2} d_H^2(\mu, L\cdot\mu) + E[\Delta\varphi],$$

where $(e_i, 1 \leqslant 1 \leqslant n)$ is an orthonormal basis of $\mathbb{R}^n$. Note that, although Δ is a singular operator in the infinite dimensional case, the term

$$E\left[\frac{1}{2}\Delta L - \Delta\varphi\right] = \frac{1}{2} d_H^2(\mu, L\cdot\mu)$$

is significant.

(iii) On the other hand, let us note that the inequality of Proposition 1.3 reduces to the Cauchy–Schwarz inequality.

References

[1] Y. Brenier, Polar factorization and monotone rearrangement of vector valued functions, Commun. Pure Appl. Math. 44 (1991) 375–417.
[2] N. Dunford, J.T. Schwartz, Linear Operators, 2, Interscience, 1963.
[3] D. Feyel, A survey on the Monge transport problem, Preprint, 2004.
[4] D. Feyel, A. de La Pradelle, Capacités gaussiennes, Ann. Inst. Fourier 41 (1) (1991) 49–76.
[5] D. Feyel, A.S. Üstünel, The notion of convexity and concavity on Wiener space, J. Funct. Anal. 176 (2000) 400–428.
[6] D. Feyel, A.S. Üstünel, Transport of measures on Wiener space and the Girsanov theorem, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 334 (1) (2002) 1025–1028.
[7] D. Feyel, A.S. Üstünel, Monge–Kantorovitch measure transportation and Monge–Ampère equation on Wiener space, Probab. Theory Related Fields 128 (2004) 347–385.
[8] D. Feyel, A.S. Üstünel, Monge–Kantorovitch measure transportation, Monge–Ampère equation and the Itô calculus, in: Adv. Stud. Pure Math., vol. 41, Mathematical Society of Japan, 2004, pp. 49–74.
[9] D. Feyel, A.S. Üstünel, The strong solution of the Monge–Ampère equation on the Wiener space for log-concave densities, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 339 (1) (2004) 49–53.
[10] K. Itô, Multiple Wiener integral, J. Math. Soc. Japan 3 (1951) 157–164.
[11] P. Malliavin, Stochastic Analysis, Springer-Verlag, 1997.
[12] H.P. McKean, Geometry of differential space, Ann. Probab. 1 (1973) 197–206.
[13] J. Ruiz de Chavez, P.A. Meyer, Positivité sur l'espace de Fock, in: Séminaire de Probabilités XXIV, in: Lecture Notes in Math., vol. 1426, Springer, 1990, pp. 461–465.
[14] D.W. Stroock, Homogeneous chaos revisited, in: Séminaire de Probabilités XXI, in: Lecture Notes in Math., vol. 1247, Springer, 1987, pp. 1–8.
[15] A.S. Üstünel, Introduction to Analysis on Wiener Space, Lecture Notes in Math., vol. 1610, Springer, 1995.
[16] A.S. Üstünel, M. Zakai, Transformation of Measure on Wiener Space, Springer-Verlag, 1999.
[17] N. Wiener, The homogeneous chaos, Amer. J. Math. 60 (1930) 897–936.