



Available online at [www.sciencedirect.com](http://www.sciencedirect.com)



C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 339 (2004) 821–826



<http://france.elsevier.com/direct/CRASS1/>

Théorie des signaux

## Compression différentielle de transitoires bruités

Michel Fliess<sup>a</sup>, Cédric Join<sup>b</sup>, Mamadou Mboup<sup>c</sup>, Hebertt Sira-Ramírez<sup>d</sup>

<sup>a</sup> Équipe ALIEN, INRIA-Futurs & laboratoire STIX, École polytechnique, 91128 Palaiseau, France

<sup>b</sup> Équipe ALIEN, INRIA-Futurs & centre de recherche en automatique de Nancy (CRAN), université Henri Poincaré (Nancy I), BP 239, 54506 Vandœuvre-lès-Nancy, France

<sup>c</sup> Équipe ALIEN, INRIA-Futurs & UFR de mathématiques et informatique, université René-Descartes (Paris V), 45, rue des Saints-Pères, 75270 Paris cedex 06, France

<sup>d</sup> Departamento de Ingeniería Eléctrica, Sección de Mecatrónica, Cinvestav-IPN, Avenida IPN No. 2508, Colonia San Pedro Zacatenco, AP 14740, 07300 México, D.F., Mexique

Reçu le 29 septembre 2004 ; accepté le 5 octobre 2004

Présenté par Yves Meyer

---

### Résumé

Algèbre différentielle, algèbre non commutative et calcul opérationnel conduisent à des méthodes efficaces et simples d'analyse et de compression de signaux transitoires bruités. Deux exemples, l'un académique, l'autre musical, illustrent notre propos. **Pour citer cet article :** M. Fliess et al., *C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 339 (2004)*.

© 2004 Académie des sciences. Publié par Elsevier SAS. Tous droits réservés.

### Abstract

**Differential compression of noisy transient signals.** The analysis and compression of noisy transient signals are handled via methods stemming from elementary differential algebra, noncommutative algebra and operational calculus. The efficiency of our approach is illustrated by an academic example and a more concrete case-study which is a musical signal. **To cite this article:** M. Fliess et al., *C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 339 (2004)*.

© 2004 Académie des sciences. Publié par Elsevier SAS. Tous droits réservés.

---

Adresses e-mail : Michel.Fliess@stix.polytechnique.fr (M. Fliess), cedric.join@cran.uhp-nancy.fr (C. Join), mboup@math-info.univ-paris5.fr (M. Mboup), hsira@mail.cinvestav.mx (H. Sira-Ramírez).

1631-073X/\$ – see front matter © 2004 Académie des sciences. Publié par Elsevier SAS. Tous droits réservés.  
doi:10.1016/j.crma.2004.10.003

## Abridged English version

### Introduction

Our algebraic techniques for analysing and compressing noisy transient signals of unknown analytic nature are further developing recent works [7,9,10] on signal processing and state estimation. This important topic is illustrated by two case-studies and their computer simulations, which, according to [14], are difficult to analyse with today's theories.

### Estimating time derivatives

We are using the classic formalism and notations of operational calculus (see, e.g., [4] and [16,17,20]). The coefficients  $a_\nu$  of the polynomial signal  $x_N = \sum_{\nu=0}^N \frac{a_\nu}{s^{\nu+1}} \in s^{-1}\mathbb{C}[s^{-1}]$  satisfy Eq. (4). From

$$\det\left(\left(-1\right)^n \frac{(\nu+1) \cdots (\nu+n)}{s^{\nu+n+1}}\right)_{0 \leq n, \nu \leq N} \neq 0,$$

we know that  $a_0, \dots, a_N$  are *linearly identifiable* [7,8]. To the convergent power series  $x(t) = \sum_{n \geq 0} a_n \frac{t^n}{n!}$ ,  $a_n \in \mathbb{C}$ , corresponds the convergent operational power series [16,17]  $x = \sum_{n \geq 0} \frac{a_n}{s^{n+1}}$ , which we call an *analytic signal (with respect to time)*. Replacing  $x_N$  by  $x$  in Eq. (4) yields Eq. (5). Write  $[a_\nu]_{e_N}$ ,  $\nu = 0, 1, \dots, N$ , its solution, which is the *operational estimate* of  $a_\nu$ . Replace in Eq. (5)  $\frac{c}{s^\alpha}$ ,  $\alpha \geq 1$ ,  $c \in \mathbb{C}$ , by  $c \frac{t^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!}$ ,  $t \geq 0$ , and  $\frac{d^n x}{ds^n}$  by  $(-1)^n t^n x(t)$ , if  $x(t)$  is defined. The *numerical estimate*  $[a_\nu]_{e_N}(t)$  of  $[a_\nu]_{e_N}$ , which verifies the limits (6), yields a *differential compression* of signals, i.e., a compression which is based on an approximation of derivatives.

### Two case-studies

Set  $x(t) = \text{Re}(f(t)) + n^{\text{nst}}$ , where  $\text{Re}(\bullet)$  designates the real part,  $f(t)$  is given by Eq. (7),  $g(t) = 0.54 + 0.46 \cos(2\pi t)$ . The zero-mean Gaussian noise  $n^{\text{nst}}$  is attenuated by low-pass filters, such as iterated time integrals (see [7–9]). The time-frequency structure of this signal makes its wavelet analysis difficult (see [14], Section 9.4.3). Fig. 1(a) demonstrates the excellent quality of our estimations.

We are estimating next the first and second order time derivatives of a noisy musical signal, with a similar time-frequency structure. Polynomial splines of degree 2 are computed via least square methods [2] for the compression. The lengths of the corresponding time windows are specified by a threshold on the variations of the second order derivative. Quite fast computations, where some standard quantisation methods were also used, lead to the simulations of Fig. 1(b). The quality of the compressed musical sound is good. The *compression rate*, which we define by  $\frac{(3+1) \times \text{number of polynomials}}{\text{number of points of the original signal}}$ , is equal to 0.2 (the number 3 corresponds to the 3 coefficients of a polynomial of degree 2).

## 1. Introduction

Généralisant les techniques algébriques de [7] pour l'analyse de signaux bruités, solutions d'équations différentielles linéaires à coefficients éventuellement variables, cette Note propose une méthode pour transitoires, de forme inconnue. Pour traiter ce thème fondamental de la littérature actuelle (voir [5,14] et, plus particulièrement, pour la compression [11,18,19]), on améliore l'estimation des dérivées proposée en [10] à partir de [9] (voir [6] pour une application au diagnostic non linéaire). On aboutit ainsi à une *compression différentielle*, basée sur la connaissance des dérivées. Des simulations numériques pour deux exemples bruités, l'un académique, l'autre musical, où, selon [14], les méthodes actuelles semblent insuffisantes, illustrent l'efficacité de notre démarche, dont les principes ont fait l'objet d'une demande de brevet, déjà déposée. Notre approche, qui permet, d'après ce qui précède, le débruitage de signaux arbitraires, s'étend, comme le démontreront d'autres publications, à

- la compression, la détection de contours et de mouvements pour images et vidéos,
- l'estimation des *exposants de Hölder* pour analyser singularités et turbulence (voir [1]).

## 2. Cadre mathématique

### 2.1. Identifiabilité linéaire

Un *corps différentiel* [12,13]  $\mathfrak{K}$  est, ici, de caractéristique nulle et *ordinaire*, c'est-à-dire muni d'une seule dérivation, notée  $\frac{d}{ds}$ . Une *constante* est un élément  $c \in \mathfrak{K}$  de dérivée nulle. L'ensemble des constantes de  $\mathfrak{K}$  est un sous-corps, dit *sous-corps des constantes*. Un *corps de constantes* est un corps différentiel qui ne contient que des constantes. Soit  $k_0 \subseteq k \subset k(s) \subseteq K$  une tour de corps différentiels, où le corps de constantes  $k = k_0(\Theta)$ , est engendré par un ensemble fini, éventuellement vide,  $\Theta = (\theta_1, \dots, \theta_r)$  de *paramètres (constants)*, supposés transcendants par rapport au corps de constantes  $k_0$ . Tout élément  $x \in K$  est un *signal*.

**Exemple 1.** Le *corps de Mikusiński*  $\mathcal{M}$ , engendré par les *opérateurs* de Mikusiński [16,17,20], est un corps différentiel par rapport à la *dérivation algébrique*  $\frac{d}{ds}$ , qui, rappelons-le, correspond à la multiplication par  $-t$ . Son sous-corps de constantes est  $\mathbb{C}$ .

L'ensemble des opérateurs différentiels linéaires  $\sum_{\text{fini}} a_\alpha \frac{d^\alpha}{ds^\alpha}$ ,  $a_\alpha \in k_0(s)$ , est un anneau non commutatif, principal à gauche et à droite [15], noté  $k_0(s)[\frac{d}{ds}]$ , qui contient l'*algèbre de Weyl* [15]  $k_0[s][\frac{d}{ds}]$ . Un opérateur différentiel est dit *propre* (resp. *strictement propre*) si, et seulement si, les  $a_\alpha$  le sont (rappelons qu'une fraction rationnelle est dite (strictement) propre si, et seulement si, le degré du numérateur est (strictement) inférieur à celui du dénominateur). Il est dit *polynômial en  $\frac{1}{s}$*  si, et seulement si,  $a_\alpha \in k_0[\frac{1}{s}]$ .

Les paramètres  $\Theta$  sont dits *linéairement identifiables* (cf. [7,8]) par rapport à  $x \in K$  si, et seulement si,  $\Theta$  vérifie l'équation matricielle :

$$P \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \vdots \\ \theta_r \end{pmatrix} = Q \tag{1}$$

où les coefficients des matrices  $P$ , carrée  $r \times r$ , et  $Q$ , colonne  $r \times 1$ , appartiennent à  $\text{span}_{k_0(s)[\frac{d}{ds}]}(1, x)$ , et  $\det(P) \neq 0$ .

### 2.2. Estimateurs

Soit  $N/k_0(s)$  une extension de corps différentiels, telle que  $K$  et  $N$  soient linéairement disjoints [3] sur  $k_0(s)$ . Tout élément de  $N$  est appelé *bruit*, ou *perturbation*. Un bruit  $n$  est dit *structuré* si, et seulement si, il est annihilé par  $\eta \in k_0(s)[\frac{d}{ds}]$ ,  $\eta \notin k_0(s) : \eta n = 0$ . Sinon, le bruit est dit *non structuré*. Soit  $Q(K \otimes_{k_0(s)} N)$  le corps de fractions, qui est un corps différentiel, de l'anneau différentiel intègre  $K \otimes_{k_0(s)} N$ . Introduisons le *capteur*, ou la *mesure*, *bruité*  $y \in Q(K \otimes_{k_0(s)} N)$ ,  $y = x + n^{\text{str}} + n^{\text{nst}}$ , où  $n^{\text{str}}$  et  $n^{\text{nst}}$  sont des bruits, structurés ou non. Alors, (1) devient

$$P \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \vdots \\ \theta_r \end{pmatrix} = Q + R^{\text{str}} + R^{\text{nst}} \tag{2}$$

où  $y$  remplace  $x$  dans  $P$  et  $Q$ , les coefficients de  $R^{\text{str}}$  (resp.  $R^{\text{nst}}$ ), matrice colonne  $r \times 1$ , appartiennent à  $\text{span}_{k(s)[\frac{d}{ds}]}(n^{\text{str}})$  (resp.  $\text{span}_{k(s)[\frac{d}{ds}]}(n^{\text{nst}})$ ). En multipliant les deux membres de (2) par  $\Delta \in \text{Ann}_{k_0}(R^{\text{str}})$ , où

$\text{Ann}_{k_0}(R^{\text{str}}) \subseteq k_0(s)[\frac{d}{ds}]$  est l'idéal à gauche des annihilateurs des coefficients de  $R^{\text{str}}$ , on obtient, si  $\det(\Delta P) \neq 0$ , l'estimateur

$$\Delta P \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \vdots \\ \theta_r \end{pmatrix} = \Delta Q + \Delta R^{\text{nst}}. \quad (3)$$

L'estimateur est dit *propre* (resp. *strictement propre*, *polynômiale en  $s^{-1}$* ) si, et seulement si, tout coefficient de  $\Delta P$  et  $\Delta Q$  est somme d'une fraction rationnelle propre (resp. strictement propre, polynômiale en  $s^{-1}$ ) et de termes de la forme  $\varpi y$ , où  $y \in \mathbf{y}$  et  $\varpi \in k_0(s)[\frac{d}{ds}]$  est propre (resp. strictement propre, polynômiale en  $s^{-1}$ ). Il est dit *minimal* si, et seulement si,  $\Delta$  est un générateur monogène de l'idéal principal à gauche  $\text{Ann}_{k_0}(R^{\text{str}})$ .

**Proposition 2.1.** *Il existe un estimateur (3) que l'on peut choisir minimal et/ou propre (resp. strictement propre, polynômial en  $s^{-1}$ ).*

### 3. Estimation des dérivées temporelles

Appelons *signal polynômial* (en  $s^{-1}$ ) tout élément de  $s^{-1}\mathbb{C}[s^{-1}]$ . Avec  $x_N = \sum_{v=0}^N \frac{a_v}{s^{v+1}} \in s^{-1}\mathbb{C}[s^{-1}]$ ,  $N \geq 1$ ,  $k_0 = \mathbb{Q}$ ,  $k = \mathbb{Q}(a_0, \dots, a_N)$ , (1) devient :

$$\sum_{v=0}^N (-1)^n \frac{(v+1) \cdots (v+n)a_v}{s^{v+n+1}} = \frac{d^n x_N}{ds^n}, \quad n = 0, 1, \dots, N. \quad (4)$$

Il vient (cf. [12]) :

**Lemme 3.1.** *Le déterminant de la matrice wronskienne  $((-1)^n \frac{(v+1) \cdots (v+n)}{s^{v+n+1}})_{0 \leq n, v \leq N}$  est non nul.*

**Corollaire 3.2.** *Les coefficients  $a_0, \dots, a_N$  sont linéairement identifiables.*

À la série convergente  $x(t) = \sum_{n \geq 0} a_n \frac{t^n}{n!}$ ,  $a_n \in \mathbb{C}$ , correspond la série opérationnelle convergente [16,17]  $x = \sum_{n \geq 0} \frac{a_n}{s^{n+1}} \in \mathcal{M}$ , appelée *signal analytique*, ou, pour éviter toute confusion avec une terminologie habituelle depuis Gabor (cf. [5]), *signal analytique en temps*. Remplaçons  $x_N$  par  $x$  dans (4) :

$$\sum_{v=0}^N (-1)^n \frac{(v+1) \cdots (v+n)[a_v]_{e_N}}{s^{v+n+1}} = \frac{d^n x}{ds^n}, \quad n = 0, 1, \dots, N. \quad (5)$$

On obtient en vertu du Lemme 3.1 l'estimée opérationnelle  $[a_v]_{e_N}$  de  $a_v$ .

Selon les règles usuelles du calcul opérationnel (voir, par exemple, [4] et, pour le formalisme algébrique de Mikusiński, [16,17,20]), remplaçons en (5) :

- $\frac{c}{s^\alpha}$ ,  $\alpha \geq 1$ ,  $c \in \mathbb{C}$ , par  $c \frac{t^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!}$ ,  $t \geq 0$  ;
- $\frac{d^n x}{ds^n}$  par  $(-1)^n t^n x(t)$ , si  $x(t)$  est définie dans un voisinage ouvert de 0.

Notons  $[a_v]_{e_N}(t)$ , si elle est définie, l'estimée numérique ainsi obtenue de  $[a_v]_{e_N}$ . Le résultat suivant est essentiel pour la mise en œuvre pratique, qui repose sur un compromis entre  $t$  et  $N$  ci-dessous.

**Proposition 3.3.** *Il existe un voisinage ouvert  $\mathcal{V}$  de 0 tel que, pour  $t \in \mathcal{V}$ ,  $[a_v]_{e_N}(t)$  soit définie. Alors,*

$$\lim_{t \downarrow 0} [a_v]_{e_N}(t) = \lim_{N \rightarrow +\infty} [a_v]_{e_N}(t) = a_v. \quad (6)$$

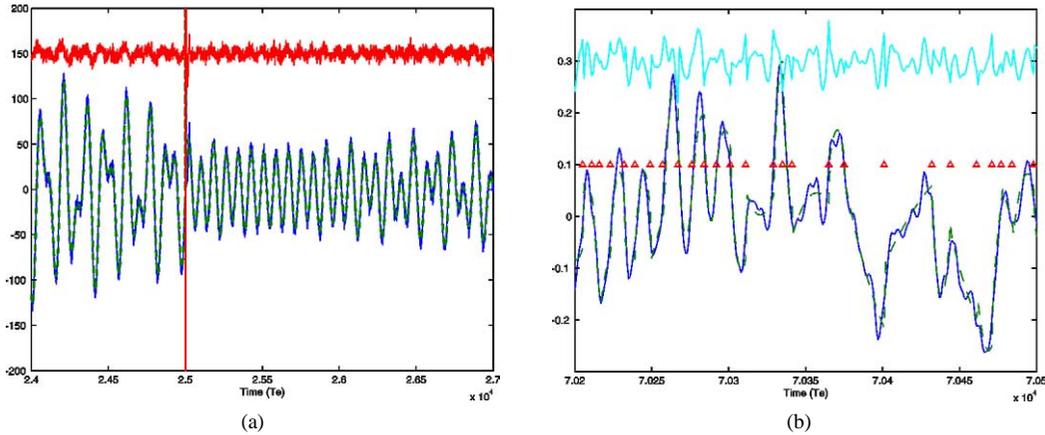


Fig. 1. Simulations numériques. (a) Estimation de  $\frac{d}{dt}x$  (-),  $\frac{d}{dt}x$  (- -). Décalage de 150 pour l’erreur. (b) Signal d’origine (-), signal reconstruit (- -), indicateurs d’intervalles ( $\Delta$ ). Décalage de 0.3 pour l’erreur.

Fig. 1. Computer simulations. (a) Estimation of  $\frac{d}{dt}x$  (-),  $\frac{d}{dt}x$  (- -). Offset for the error. (b) Original signal (-), compressed signal (- -). Intervals are indicated thanks to ( $\Delta$ ). Offset for the error.

## 4. Exemples

### 4.1. Dérivées d’un signal académique

Soit  $x(t) = \text{Re}(f(t)) + n^{\text{nst}}$ , où  $\text{Re}(\bullet)$  désigne la partie réelle, et

$$f(t) = \frac{K_0}{\sqrt{S_0}} g\left(\frac{t-u_0}{S_0}\right) \exp(i\xi_0 t) + \frac{K_1}{\sqrt{S_1}} g\left(\frac{t-u_1}{S_1}\right) \exp(i\xi_0 t) + \frac{K_2}{\sqrt{S_1}} g\left(\frac{t-u_0}{S_1}\right) \exp(i\xi_1 t) + \frac{K_3}{\sqrt{S_0}} g\left(\frac{t-u_1}{S_0}\right) \exp(i\xi_1 t), \quad (7)$$

$K_0 = 0.4326$ ,  $K_1 = -1.6656$ ,  $K_2 = 0.1253$ ,  $K_3 = 0.2877$ ,  $\xi_0 = 2\pi 73$ ,  $\xi_1 = 2\pi 123$ ,  $S_0 = 1.5$ ,  $S_1 = 3$ ,  $u_0 = 2$ ,  $u_1 = 4$ ;  $g(t) = 0.54 + 0.46 \cos(2\pi t)$  est une *fenêtre de Hamming*. Cet exemple, emprunté à [14], § 9.4.3, et, en raison de son étalement temps-fréquence, délicat à analyser par ondelettes, a le mérite de permettre la validation des simulations numériques. Le bruit  $n^{\text{nst}}$ , que nous avons choisi, ici, centré et gaussien, d’intensité forte, est atténué par des filtres passe-bas, comme l’intégration (voir [7–9]). L’excellence de nos estimations est attestée par le zoom de la Fig. 1(a).

### 4.2. Compression d’un signal musical

Nous estimons les dérivées d’ordres 1 et 2 d’un signal musical, qui présente aussi un fort étalement temps-fréquence. Pour la compression, nous utilisons

- des splines polynômiaux de degré 2 que nous calculons par moindres carrés (cf. [2]);
- des fenêtres temporelles dont les longueurs variables sont spécifiées par un seuil sur la variation de la dérivée seconde;
- des méthodes standard de quantification.

La Fig. 1(b) illustre les calculs qui, soulignons-le, sont rapides pour le codage et, encore plus, pour le décodage.

Le *taux de compression*  $\frac{(3+1) \times \text{nombre de polynômes}}{\text{nombre de points du signal d’origine}}$ , où 3 correspond aux 3 coefficients d’un polynôme de

degré 2, vaut 0,2. Il est égal à 0,33 sans quantification. Alors, le son reconstitué est impossible à distinguer de l'original. La qualité reste bonne en dépit du bruit de quantification, qui serait réduit avec des techniques plus avancées de quantification [11,19], améliorant de même le taux de compression.

## Références

- [1] A. Arneodo, F. Argoul, E. Bacry, J. Elegaray, J.-F. Muzy, *Ondelettes, multifractales et turbulences*, Diderot, Paris, 1995.
- [2] C. de Boor, *A Practical Guide to Splines*, revised ed., Springer, New York, 2001.
- [3] N. Bourbaki, *Algèbre*, Masson, Paris, 1981, chap. 4 à 7.
- [4] G. Doetsch, *Theorie und Anwendung der Laplace Transformation*, Springer, Berlin, 1937.
- [5] P. Flandrin, *Temps-fréquence*, 2<sup>e</sup> éd., Hermès, Paris, 1998.
- [6] M. Fliess, C. Join, H. Mounier, An introduction to nonlinear fault diagnosis with an application to a congested internet router, in: S. Tarbouriech, C. Abdallah, J. Chiasson (Eds.), *Advances in Communication Control Networks*, in: *Lecture Notes in Control and Inform. Sci.*, vol. 308, Springer, Londres, 2004.
- [7] M. Fliess, M. Mboup, H. Mounier, H. Sira-Ramírez, Questioning some paradigms of signal processing via concrete examples, in: H. Sira-Ramírez, G. Silva-Navarro (Eds.), *Algebraic Methods in Flatness, Signal Processing and State Estimation*, Editorial Lagares, México, 2003, pp. 1–21.
- [8] M. Fliess, H. Sira-Ramírez, An algebraic framework for linear identification, *ESAIM Control Optim. Calc. Var.* 9 (2003) 151–168.
- [9] M. Fliess, H. Sira-Ramírez, Reconstructeurs d'états, *C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I* 338 (2004) 91–96.
- [10] M. Fliess, H. Sira-Ramírez, Control via state estimations of some nonlinear systems, in: *Proc. NOLCOS*, Stuttgart, 2004.
- [11] A. Gersho, R.M. Gray, *Vector Quantization and Signal Compression*, Kluwer Academic, Boston, 1992.
- [12] I. Kaplansky, *An Introduction to Differential Algebra*, 2<sup>e</sup> éd., Hermann, Paris, 1976.
- [13] E. Kolchin, *Differential Algebra and Algebraic Groups*, Academic Press, New York, 1973.
- [14] S. Mallat, *Une exploration des signaux en ondelettes*, Éditions École Polytechnique, Palaiseau, 2000.
- [15] J.C. McConnell, J.C. Robson, *Noncommutative Noetherian Rings*, Amer. Math. Society, Providence, RI, 2000.
- [16] J. Mikusiński, *Operational Calculus*, vol. 1, second ed., PWN, Varsovie & Oxford University Press, Oxford, 1983.
- [17] J. Mikusiński, T.K. Boehme, *Operational Calculus*, vol. 2, second ed., PWN, Varsovie & Oxford University Press, Oxford, 1987.
- [18] N. Moreau, *Techniques de compression des signaux*, Masson, Paris, 1995.
- [19] K. Sayoud, *Introduction to Data Compression*, second ed., Morgan Kaufmann, San Francisco, 2000.
- [20] K. Yosida, *Operational Calculus*, Springer, New York, 1984.