

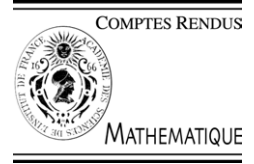


ELSEVIER

Available online at [www.sciencedirect.com](http://www.sciencedirect.com)



C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 339 (2004) 809–814



<http://france.elsevier.com/direct/CRASS1/>

Analyse numérique/Équations aux dérivées partielles

# Eléments finis nodaux pour les équations de Maxwell

Erell Jamelot

ENSTA, UMR 2706 POEMS, 75739 Paris cedex 15, France

Reçu le 2 septembre 2004 ; accepté après révision le 15 octobre 2004

Présenté par Roland Glowinski

## Résumé

Nous présentons une approche originale de la méthode du complément singulier pour les équations de Maxwell dans des domaines bornés polygonaux. Nous proposons une décomposition du champ électrique à la Moussaoui :  $\mathbf{E} = \mathbf{E}^R + \lambda \mathbf{x}_P$ , où  $\mathbf{E}^R \in H^1(\omega)^2$ ,  $\lambda$  ne dépend que du domaine et des données, et  $\mathbf{x}_P$  est connu explicitement. Cette méthode ne nécessite pas de fonction de troncature. On peut de même décomposer le champ magnétique. Nous montrons qu'on peut améliorer l'estimation d'erreur. *Pour citer cet article : E. Jamelot, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 339 (2004).*

© 2004 Académie des sciences. Publié par Elsevier SAS. Tous droits réservés.

## Abstract

**Nodal finite element methods for Maxwell's equations.** An original approach of the singular complement method for Maxwell's equations in bounded polygonal domains is presented. A splitting of the electric field à la Moussaoui is proposed:  $\mathbf{E} = \mathbf{E}^R + \lambda \mathbf{x}_P$ , where  $\mathbf{E}^R \in H^1(\omega)^2$ ,  $\lambda$  depends on the data and domain and  $\mathbf{x}_P$  is known explicitly. The same splitting can be used for the magnetic field. No cut-off function is needed and improved error estimates are derived. *To cite this article: E. Jamelot, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 339 (2004).*

© 2004 Académie des sciences. Publié par Elsevier SAS. Tous droits réservés.

## Abridged English version

The bracketed numbers refer to the French version. The curl operator is denoted by  $\text{rot}$ . Let  $\omega$  be a polygonal bounded domain with  $N_{\text{cr}}$  reentrant corners, of angles  $\pi/\alpha_i$  with  $1/2 < \alpha_i < 1$ ,  $i \in \{1, \dots, N_{\text{cr}}\}$ . Let  $(r_i, \theta_i)$  be the polar coordinates associated to the  $i$ th reentrant corner in  $\omega$ . Let us consider the generalized electrostatic problem: Find  $\mathbf{E} \in \mathbf{L}^2(\omega)$  such that:  $\text{rot} \mathbf{E} = f_{\mathbf{E}}$ ,  $\text{div} \mathbf{E} = g_{\mathbf{E}}$  in  $\omega$ ,  $\mathbf{E} \cdot \boldsymbol{\tau}_{|\partial\omega} = e$ , where  $f_{\mathbf{E}}, g_{\mathbf{E}} \in L^2(\omega)$ ,  $e$  vanishes near reentrant corners and  $(f_{\mathbf{E}}, 1)_0 = -(e, 1)_{0, \partial\omega}$ . Let  $\mathbf{X}_{\mathbf{E}}^0 = \{\mathbf{v} \in \mathbf{H}(\text{rot}, \text{div}; \omega) \mid \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\tau}_{|\partial\omega} = 0\}$ . We assume that we can write:  $\mathbf{E} = \mathbf{E}^0 + \mathbf{e}$ , where  $\mathbf{E}^0 \in \mathbf{X}_{\mathbf{E}}^0$  satisfies perfect conductor boundary conditions, and  $\mathbf{e} \in \mathbf{H}^1(\omega)$  is a regular

Adresse e-mail : [erell.jamelot@ensta.fr](mailto:erell.jamelot@ensta.fr) (E. Jamelot).

tangential lifting of  $e$ . Let  $f_{\mathbf{E}}^0 = f_{\mathbf{E}} - \text{rot } \mathbf{e}$  and  $g_{\mathbf{E}}^0 = g_{\mathbf{E}} - \text{div } \mathbf{e}$ . As  $\omega$  is not convex,  $\mathbf{X}_{\mathbf{E}}^0 \cap \mathbf{H}^1(\omega)$  is closed in  $\mathbf{X}_{\mathbf{E}}^0$ . Then the solution computed with  $P_k$  Lagrange finite elements does not converge, since we cannot approximate the part of  $\mathbf{E}^0$  which is not in  $\mathbf{H}^1(\omega)$  (the singular part). Nevertheless, the singular behaviour is known explicitly up to a constant, which can be computed. In order to determine the singular part, we study the Helmholtz splitting:  $\mathbf{E}^0 = -\nabla\phi_D + \text{rot } \phi_N$ , where  $\phi_D$  and  $\phi_N$  satisfy (3). Using Moussaoui's results [9] concerning solutions of the Dirichlet problem for the Laplace operator, we find that  $\mathbf{E}$  can be split into a regular part  $\mathbf{E}^R \in \mathbf{H}^1(\omega)$  and a singular part  $\mathbf{E}^S = \sum_i \lambda^i \mathbf{x}_P^i$ , with:

$$\mathbf{x}_P^i = -\alpha_i r_i^{\alpha_i-1} (\sin \alpha_i \theta_i \mathbf{e}_{r_i} + \cos \alpha_i \theta_i \mathbf{e}_{\theta_i}) \quad \text{and} \quad \lambda^i = (f_{\mathbf{E}}, s_N^i)_0 + (g_{\mathbf{E}}, s_D^i)_0 - (e, s_N^i)_{0, \partial\omega},$$

where  $s_D^i$  and  $s_N^i$  are the dual singular functions of the Laplace operator for the Dirichlet and Neumann problems. We refer to [4] for the numerical computation of  $\lambda^i$ . This splitting is not conforming in  $\mathbf{X}_{\mathbf{E}}^0$  since none of the two parts belongs to  $\mathbf{X}_{\mathbf{E}}^0$ :  $\mathbf{E}^R$  satisfies  $\text{div } \mathbf{E}^R = g_{\mathbf{E}}$ ,  $\text{rot } \mathbf{E}^R = f_{\mathbf{E}}$  in  $\omega$ , and  $\mathbf{E}^R \cdot \boldsymbol{\tau}_{|\partial\omega} = e - \sum_i \lambda^i \mathbf{x}_P^i \cdot \boldsymbol{\tau}_{|\partial\omega}$ . Note that there exists a regular tangential lifting of  $\mathbf{E}^R \cdot \boldsymbol{\tau}_{|\partial\omega}$  since  $\mathbf{x}_P^i \cdot \boldsymbol{\tau}_{|\partial\omega}$  vanishes on the edges of the  $i$ th reentrant corner. We call the resulting method the  $\lambda$ -approach. When working on instationary problem, one must use the *orthogonal singular complement method* (OSCM), developed in [7,5].  $\mathbf{E}^0$  is split in two orthogonal parts, both in  $\mathbf{X}_{\mathbf{E}}^0$ :  $\mathbf{E}^0 = \mathbf{E}^{0,R} + \sum_i c^i \mathbf{x}_S^i$ , where  $\mathbf{x}_S^i$  satisfies the static equations:  $\text{div } \mathbf{x}_S^i = \beta_D^i / \beta_N^i s_D^i$  and  $\text{rot } \mathbf{x}_S^i = s_N^i$ , with  $\beta_{D,N}^i = \|s_{D,N}^i\|_0^2 / \pi$  (look at [4] for this computation). We can use the  $\lambda$ -approach in order to compute the  $\mathbf{x}_S^i$ . Interestingly compared to [7], no cut-off function is required.

We approach the regular part of the electric field component by component with Lagrange  $P_k$  continuous finite elements ( $k = 1$  or  $2$ ). Let  $\mathcal{T}_h$  be a regular triangulation of  $\omega$  with vertices  $\{M_{I=1,\dots,N}\}$ , and  $\alpha = \min_i \alpha_i$ .

Let  $\mathbf{X}_{\mathbf{E},h}^0 = \{\mathbf{u}_h \in \mathcal{C}^0(\bar{\omega})^2 \mid \mathbf{u}_h \in P_k(T)^2, \forall T \in \mathcal{T}_h \text{ and } \mathbf{u}_h \cdot \boldsymbol{\tau}_{|\partial\omega} = 0\}$ . The discrete boundary condition  $(\mathbf{u}_h \cdot \boldsymbol{\tau}_{|\partial\omega})(M_I) = 0$  is ambiguous at the corners of  $\partial\omega$  and means that  $\mathbf{u}_h(M_I) = 0$ .  $(\mathbf{E}^R + \mathbf{e})$  is approached in  $\mathbf{X}_{\mathbf{E},h}^0$ , with a regular lifting of the tangential boundary condition. The theoretical convergence rate of the method is  $2\alpha - 1 - \varepsilon$ ,  $\forall \varepsilon > 0$  in  $\mathbf{X}_{\mathbf{E}}$ -norm (8), and  $4\alpha - 2 - \varepsilon$ ,  $\forall \varepsilon > 0$  in  $L^2$ -norm. Numerical experiments (Matlab code,  $P_1$  FE) are performed for an L-shape domain (a single reentrant corner with  $\alpha = 2/3$ ), with non zero divergence and non zero curl field. We obtain an  $\mathbf{X}_{\mathbf{E}}$ -error of 8% on the coarser mesh, and 2% on the finest mesh (Table 1). The numerical convergence rate is 0.65. It is better than expected (0.33), but it decreases if the mesh is refined.

A priori, we cannot use the  $\lambda$ -approach or the OSCM for 3D problems, since the dimension of the singular spaces is in general infinite. Still, they can be used for prismatic or axisymmetric domains [3,8].

## 1. Introduction

En 2D le comportement singulier (non borné) du champ électromagnétique est connu analytiquement. La méthode du complément singulier, introduite par Assous et al. [1] pour les équations de Maxwell instationnaires avec charges, consiste alors à décomposer le champ en une partie  $\mathbf{H}^1$ -régulière, et une partie singulière, prise en compte explicitement. Nous présentons une méthode de décomposition du champ quasi-électrostatique, dont l'originalité par rapport au travail de Hazard et Lohrengel [7] repose sur le fait qu'on ne requiert pas de fonction de troncature. Celle-ci est remplacée par une condition aux limites non-homogène. Elle peut être utilisée pour calculer le complément singulier orthogonal, utile lorsqu'on travaille sur les équations instationnaires [5].

## 2. Le problème modèle et le formalisme associé

Soit  $\omega \in \mathbb{R}^2$  un polygone simplement connexe de frontière  $\partial\omega$ . On suppose que  $\partial\omega$  contient  $N_{\text{cr}}$  coins rentrants, d'angles  $\pi/\alpha_i$  ( $1/2 < \alpha_i < 1$ ),  $\forall i \in \{1, \dots, N_{\text{cr}}\}$ . Posons  $(r_i, \theta_i)$  le couple des coordonnées polaires par rapport au  $i^{\text{ème}}$  coin rentrant. On définit  $\alpha = \min_i \alpha_i$ , le paramètre correspondant au coin le plus rentrant.

Soient  $\mathbf{v}$  le vecteur unitaire sortant normal à  $\partial\omega$  et  $\boldsymbol{\tau}$ , le vecteur tangentiel associé, tel que  $(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{v})$  forme une base orthonormée directe. Pour  $u \in H^1(\omega)$ ,  $\partial_{\mathbf{v}} u_{|\partial\omega} = \nabla u \cdot \mathbf{v}_{|\partial\omega}$  désignera la dérivée normale de  $u$  sur  $\partial\omega$ .

Soient  $\mathbf{L}^2(\omega) = L^2(\omega)^2$ , et  $\mathbf{H}^1(\omega) = H^1(\omega)^2$ . On posera :  $\mathbf{X}_{\mathbf{E}} = \{\mathbf{v} \in \mathbf{H}(\text{rot}, \text{div}; \omega) \mid \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\tau}_{|\partial\omega} \in L^2(\partial\omega)\}$ , et  $\mathbf{X}_{\mathbf{H}} = \{\mathbf{v} \in \mathbf{H}(\text{rot}, \text{div}; \omega) \mid \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\nu}_{|\partial\omega} \in L^2(\partial\omega)\}$ .

Les problèmes électrostatique et magnétostatique généralisés sont :

$$\text{Trouver } \mathbf{E} \in \mathbf{L}^2(\omega) \text{ tel que : } \text{rot } \mathbf{E} = \mathbf{f}_{\mathbf{E}}, \text{ div } \mathbf{E} = g_{\mathbf{E}} \text{ dans } \omega, \mathbf{E} \cdot \boldsymbol{\tau}_{|\partial\omega} = e. \quad (1)$$

$$\text{Trouver } \mathbf{H} \in \mathbf{L}^2(\omega) \text{ tel que : } \text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{f}_{\mathbf{H}}, \text{ div } \mathbf{H} = g_{\mathbf{H}} \text{ dans } \omega, \mathbf{H} \cdot \boldsymbol{\nu}_{|\partial\omega} = h. \quad (2)$$

On considère que  $f, g \in L^2(\omega)$ . Pour que les problèmes (1) et (2) soient bien posés, il faut et il suffit que :  $(f_{\mathbf{E}}, 1)_0 = -(e, 1)_{0, \partial\omega}$  et  $(g_{\mathbf{H}}, 1)_0 = (h, 1)_{0, \partial\omega}$ . Les hypothèses sur les données correspondent à une énergie électromagnétique finie. On choisit  $e$  et  $h$  s'annulant au voisinage du coin rentrant, et tels qu'il existe un relèvement régulier de  $e$  (resp.  $h$ ) :  $\mathbf{e}$  (resp.  $\mathbf{h}$ )  $\in \mathbf{H}^1(\omega)$  tel que  $\mathbf{e} \cdot \boldsymbol{\tau}_{|\partial\omega} = e$  (resp.  $\mathbf{h} \cdot \boldsymbol{\nu}_{|\partial\omega} = h$ ) [2].

Posons  $\mathbf{E} = \mathbf{E}^0 + \mathbf{e}$ , et  $\mathbf{H} = \mathbf{H}^0 + \mathbf{h}$ .  $\mathbf{E}^0$  et  $\mathbf{H}^0$  satisfont les problèmes (1) et (2) homogènes ( $e, h = 0$ ) avec les données :  $g_{\mathbf{E}, \mathbf{H}}^0 = g_{\mathbf{E}, \mathbf{H}} - \text{div } \mathbf{e}, \mathbf{h}$ , et  $f_{\mathbf{E}, \mathbf{H}}^0 = f_{\mathbf{E}, \mathbf{H}} - \text{rot } \mathbf{e}, \mathbf{h}$ . Nous avons  $\mathbf{E}^0 \in \mathbf{X}_{\mathbf{E}}^0$ , où :  $\mathbf{X}_{\mathbf{E}}^0 = \{\mathbf{u} \in \mathbf{X}_{\mathbf{E}} \mid \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\tau}_{|\partial\omega} = 0\}$  et  $\mathbf{H}^0 \in \mathbf{X}_{\mathbf{H}}^0$  où :  $\mathbf{X}_{\mathbf{H}}^0 = \{\mathbf{u} \in \mathbf{X}_{\mathbf{H}} \mid \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\nu}_{|\partial\omega} = 0\}$ . L'équivalence entre la norme du graphe et la semi-norme des espaces  $\mathbf{X}_{\mathbf{E}}^0$  et  $\mathbf{X}_{\mathbf{H}}^0$  est bien connue [2]. Pour les deux espaces, le produit scalaire est défini ainsi :  $(\mathbf{u}, \mathbf{v})_{\mathbf{X}} = (\text{div } \mathbf{u}, \text{div } \mathbf{v})_0 + (\text{rot } \mathbf{u}, \text{rot } \mathbf{v})_0$ .

Soit  $\mathbf{X}_{\mathbf{E}, \mathbf{H}}^{0, R} = \mathbf{X}_{\mathbf{E}, \mathbf{H}}^0 \cap \mathbf{H}^1(\omega)$  l'espace régularisé de  $\mathbf{X}_{\mathbf{E}, \mathbf{H}}^0$ . Lorsque le domaine  $\omega$  est convexe,  $\mathbf{X}_{\mathbf{E}, \mathbf{H}}^{0, R} = \mathbf{X}_{\mathbf{E}, \mathbf{H}}^0$ . Au contraire, lorsqu'il existe un coin rentrant,  $\mathbf{X}_{\mathbf{E}, \mathbf{H}}^{0, R}$  est *strictement inclus* dans  $\mathbf{X}_{\mathbf{E}, \mathbf{H}}^0$ , et est *fermé* dans celui-ci. Les éléments finis  $P_k$  de Lagrange ne permettent pas de capter les parties singulières (non  $\mathbf{H}^1$ ). Ceci étant, le comportement singulier des champs est connu explicitement, à un coefficient multiplicatif près. Une fois ce coefficient approché, on peut se contenter de calculer la partie  $\mathbf{H}^1$  des champs : c'est la *méthode du complément singulier*. Afin de déterminer les parties singulières, étudions le problème aux potentiels.

### 3. Le problème aux potentiels

#### 3.1. La décomposition de Helmholtz

Considérons  $\Phi_D = \{\phi \in H_0^1(\omega) : \Delta\phi \in L^2(\omega)\}$  et  $\Phi_N = \{\phi \in H^1(\omega) \cap L_0^2(\omega) : \Delta\phi \in L^2(\omega), \partial_\nu \phi|_{\partial\omega} = 0\}$ . Le champ électrique  $\mathbf{E}^0$  se décompose selon :  $\mathbf{E}^0 = -\nabla\phi_D + \text{rot } \phi_N$ , avec  $\phi_D$  et  $\phi_N$  solutions de :

$$\text{Trouver } \phi_D \in \Phi_D \text{ et } \phi_N \in \Phi_N \text{ tels que : } -\Delta\phi_D = g_{\mathbf{E}}^0 \text{ et } -\Delta\phi_N = f_{\mathbf{E}}^0, \text{ dans } \omega. \quad (3)$$

De même, on associe au champ magnétique la décomposition de Helmholtz suivante :  $\mathbf{H}^0 = \text{rot } \psi_D - \nabla\psi_N$ , où  $\psi_D$  et  $\psi_N$  satisfont (3) avec les données  $f_{\mathbf{H}}^0$  et  $g_{\mathbf{H}}^0$ .

#### 3.2. Décomposition des potentiels en partie singulière et partie régulière

Soit  $\Phi_{D, N}^R = \Phi_{D, N} \cap H^2(\omega)$  la partie régulière de  $\Phi_{D, N}$ , et  $\Phi_{D, N}^S$  telle que  $\Phi_{D, N} = \Phi_{D, N}^R \oplus \Phi_{D, N}^S$ , une *partie singulière* de  $\Phi_{D, N}$ . En 2D,  $\Phi_{D, N}^S$  est de dimension finie, égale au nombre de coins rentrants [6]. Plusieurs choix sont possibles (espaces orthogonaux ou non). Lorsque  $\omega$  est convexe,  $\Phi_{D, N}^R = \Phi_{D, N}$ . Lorsque  $\omega$  contient un coin rentrant,  $\Phi_{D, N}^R$  est fermé et strictement inclus dans  $\Phi_{D, N}$ , et on sait que [6] :

$$\forall \varepsilon > 0, \Phi_{D, N}^S \subset H^{1+\alpha-\varepsilon}(\omega), \text{ mais } \Phi_{D, N}^S \not\subset H^{1+\alpha}(\omega); \Phi_{D, N}^R \subset H^{1+2\alpha-\varepsilon}(\omega). \quad (4)$$

La solution  $\phi_{D, N}$  est décomposée en une partie régulière  $\phi_{D, N}^R \in \Phi_{D, N}^R$  et une partie singulière,  $\phi^S \in \Phi_{D, N}^S$ , connue explicitement. Nous choisissons une décomposition non orthogonale des solutions, décrite par Moussaoui dans [9] pour le problème de Dirichlet, et dont nous nous sommes inspirés, à l'aide de [6] pour le problème de Neumann. On obtient alors les résultats suivants :

**Proposition 3.1.** *Les solutions de (3) sont telles que :*

$$\phi_D = \phi_D^R + \sum_{i=1}^{N_{\text{cr}}} \lambda_D^i q_D^i, \quad \text{où } \phi_D^R \in H^2(\omega), \lambda_D^i = (g_{\mathbf{E}}^0, s_D^i)_0 / \pi, \text{ et } q_D^i = r_i^{\alpha_i} \sin \alpha_i \theta_i,$$

$$\phi_N = \phi_N^R + \sum_{i=1}^{N_{\text{cr}}} \lambda_N^i q_N^i, \quad \text{où } \phi_N^R \in H^2(\omega), \lambda_N^i = (f_{\mathbf{E}}^0, s_N^i)_0 / \pi, \text{ et } q_N^i = r_i^{\alpha_i} \cos \alpha_i \theta_i.$$

$s_D^i$  et  $s_N^i$  sont les singularités duales du Laplacien pour le  $i^{\text{ème}}$  coin rentrant [6].  $q_D^i$  et  $q_N^i$  sont les parties principales des singularités primales du Laplacien. Le calcul numérique des  $\lambda_D^i$ , est détaillé dans [4]. Le calcul des  $\lambda_N^i$  est similaire. On peut appliquer ces résultats aux potentiels magnétiques, puisqu'il s'agit formellement des mêmes problèmes. Dans la partie suivante, on ne s'intéresse qu'au champ électrique.

## 4. La $\lambda$ -approche

### 4.1. Décomposition non orthogonale

Nous constatons que :  $-\nabla q_D^i = \mathbf{rot} q_N^i = -\alpha_i r_i^{\alpha_i - 1} (\sin \alpha_i \theta_i \mathbf{e}_{r_i} + \cos \alpha_i \theta_i \mathbf{e}_{\theta_i})$ . Posons  $\mathbf{x}_P^i = -\nabla q_D^i$ .

**Proposition 4.1.** *Le champ électrique  $\mathbf{E}^0$  se décompose en une partie régulière et une partie singulière selon :*

$$\mathbf{E}^0 = \mathbf{E}^R + \mathbf{E}^S, \quad \text{où } \mathbf{E}^R = -\nabla \phi_D^R + \mathbf{rot} \phi_N^R, \mathbf{E}^S = \sum_{i=1}^{N_{\text{cr}}} \lambda^i \mathbf{x}_P^i, \text{ avec } \lambda^i = \lambda_D^i + \lambda_N^i.$$

**Proposition 4.2.** *Sous l'hypothèse que  $e$  s'annule au voisinage des coins rentrants, on a :*

$$\lambda^i = (f_{\mathbf{E}}, s_N^i)_0 + (g_{\mathbf{E}}, s_D^i)_0 - (e, s_{N|\partial\omega}^i)_0, \partial\omega.$$

D'après (4),  $\forall \varepsilon > 0$ ,  $\mathbf{E}^R \in H^{2\alpha-\varepsilon}(\omega)^2$ . Cette décomposition est non conforme dans  $\mathbf{X}_{\mathbf{E}}^0$  puisque les parties régulière et singulière ne sont pas dans  $\mathbf{X}_{\mathbf{E}}^0$ . On a :  $\mathbf{E}^R \cdot \boldsymbol{\tau}_{|\partial\omega} = -\sum_i \lambda^i \mathbf{x}_P^i \cdot \boldsymbol{\tau}_{|\partial\omega}$  ( $\mathbf{x}_P^i \cdot \boldsymbol{\tau}_{|\partial\omega}$  est nul sur les arêtes du coin rentrant  $i$  et régulier ailleurs).  $\mathbf{E} = \mathbf{E}^0 + \mathbf{e}$  s'écrit alors :  $\mathbf{E} = \tilde{\mathbf{E}} + \mathbf{E}^S$ , où :  $\tilde{\mathbf{E}} = \mathbf{E}^R + \mathbf{e} \in \mathbf{H}^1(\omega)$ . Soit  $\mathbf{e}_\lambda \in \mathbf{H}^1(\omega)$  un relèvement régulier de la condition aux limites tangentielle :  $\tilde{\mathbf{E}} \cdot \boldsymbol{\tau}_{|\partial\omega} = \mathbf{E}^R \cdot \boldsymbol{\tau}_{|\partial\omega} + e$ . Posons :  $\tilde{\mathbf{E}} = \tilde{\mathbf{E}}^0 + \mathbf{e}_\lambda$ , où  $\tilde{\mathbf{E}}^0 \in \mathbf{X}_{\mathbf{E}}^{0,R}$  satisfait le problème (1) homogène avec les données  $g_{\mathbf{E}} - \text{div} \mathbf{e}_\lambda$  et  $f_{\mathbf{E}} - \text{rot} \mathbf{e}_\lambda$ .

### 4.2. Décomposition orthogonale

La méthode du complément singulier orthogonale (MCSO) a été largement développée dans [5]. C'est cette méthode qui sera adaptée au cas instationnaire. Elle repose sur la décomposition conforme et orthogonale de  $\mathbf{X}_{\mathbf{E}}^0$  de la forme :  $\mathbf{X}_{\mathbf{E}}^0 = \mathbf{X}_{\mathbf{E}}^{0,R} \overset{\perp \mathbf{X}}{\oplus} \mathbf{X}_{\mathbf{E}}^{0,S}$ , où les parties singulières sont telles que :  $\mathbf{X}_{\mathbf{E}}^{0,S} = \text{vect}\{\mathbf{x}_S^i\}$  où  $\mathbf{x}_S^i = -(\beta_D^i / \beta_N^i) \nabla p_D^i + \mathbf{rot} p_N^i$ ,  $\beta_D^i = \|s_D^i\|_0^2 / \pi$  et  $\beta_N^i = \|s_N^i\|_0^2 / \pi$ . Les  $p_{D,N}^i \in \Phi_{D,N}$  sont les singularités primales du Laplacien pour le  $i^{\text{ème}}$  coin rentrant, telles que :  $-\Delta p_{D,N}^i = s_{D,N}^i$  dans  $\omega$ . Le champ électrique  $\mathbf{E}^0$  s'écrit alors :  $\mathbf{E}^0 = \mathbf{E}^{0,R} + \mathbf{E}^{0,S}$ , où  $\mathbf{E}^{0,S} = \sum_i c^i \mathbf{x}_S^i$ . D'après (4),  $\forall \varepsilon > 0$ ,  $\mathbf{E}^{0,R} \in H^{2\alpha-\varepsilon}(\omega)^2$ . Les vecteurs  $\mathbf{x}_S^i$  peuvent être calculés de deux façons. D'une part en dérivant les potentiels  $p_{D,N}^i$ , approchés par les éléments finis continus de Lagrange  $P_k$ , les  $\mathbf{x}_S^i$  étant alors  $P_{k-1}$  discontinus. D'autre part, avec la  $\lambda$ -approche, en résolvant le problème (1) homogène avec les données :  $f_{\mathbf{E}} = s_N^i$ ,  $g_{\mathbf{E}} = \beta_D^i / \beta_N^i s_D^i$  (pour le calcul des  $\beta_{D,N}^i$ , voir [4]). Cette dernière méthode est naturellement plus précise.

## 5. Calcul du champ électrique par les éléments finis

### 5.1. Le problème continu

Une fois les  $\lambda_{D,N}^i$  et  $\beta_{D,N}^i$  calculés, on résout :

(i)  $\lambda$ -approche : Trouver  $\tilde{\mathbf{E}}^0 \in \mathbf{X}_{\mathbf{E}}^0$  tel que  $\forall \mathbf{v} \in \mathbf{X}_{\mathbf{E}}^0$  :

$$(\tilde{\mathbf{E}}^0, \mathbf{v})_{\mathbf{X}_{\mathbf{E}}^0} = (g_{\mathbf{E}}, \operatorname{div} \mathbf{v})_0 + (f_{\mathbf{E}}, \operatorname{rot} \mathbf{v})_0 - (\mathbf{e}_{\lambda}, \mathbf{v})_{\mathbf{X}_{\mathbf{E}}^0}, \quad (5)$$

(ii) MCSO : Trouver  $\mathbf{E}^{0,R} \in \mathbf{X}_{\mathbf{E}}^0$  et  $c^i \in \mathbb{R}$ ,  $i \in \{1, \dots, N_{\text{cr}}\}$  tels que :

$$(\mathbf{E}^{0,R}, \mathbf{v})_{\mathbf{X}_{\mathbf{E}}^0} + \sum_{i=1}^{N_{\text{cr}}} c^i (\mathbf{x}_S^i, \mathbf{v})_{\mathbf{X}_{\mathbf{E}}^0} = (g_{\mathbf{E}}, \operatorname{div} \mathbf{v})_0 + (f_{\mathbf{E}}, \operatorname{rot} \mathbf{v})_0 - (\mathbf{e}, \mathbf{v})_{\mathbf{X}_{\mathbf{E}}^0}, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{X}_{\mathbf{E}}^0, \quad (6)$$

$$(\mathbf{E}^{0,R}, \mathbf{x}_S^j)_{\mathbf{X}_{\mathbf{E}}^0} + \sum_{i=1}^{N_{\text{cr}}} c^i (\mathbf{x}_S^i, \mathbf{x}_S^j)_{\mathbf{X}_{\mathbf{E}}^0} = \frac{\beta_D^i}{\beta_N^i} (g_{\mathbf{E}}, s_D^i)_0 + (f_{\mathbf{E}}, s_N^i)_0 - (\mathbf{e}, \mathbf{x}_S^j)_{\mathbf{X}_{\mathbf{E}}^0}, \quad \forall j \in \{1, \dots, N_{\text{cr}}\}. \quad (7)$$

En pratique, on se ramène au calcul de  $\tilde{\mathbf{E}} = \tilde{\mathbf{E}}^0 + \mathbf{e}_{\lambda}$  pour (5) et  $\hat{\mathbf{E}} = \mathbf{E}^{0,R} + \mathbf{e}$  pour (6), (7).

### 5.2. Discrétisation et analyse de convergence

Nous approchons le champ électrique par les éléments finis continus  $P_k$  de Lagrange, composante par composante. Soit  $\mathcal{T}_h$  une triangulation conforme du domaine  $\omega$ . Soient  $\{M_I=1, \dots, N\}$  les points de la discrétisation. L'espace de discrétisation de  $\mathbf{X}_{\mathbf{E}}^{0,R}$  est :  $\mathbf{X}_{\mathbf{E},h}^{0,R} = \{\mathbf{u}_h \in \mathcal{C}^0(\bar{\omega})^2 \mid \mathbf{u}_h \in P_k(T)^2, \forall T \in \mathcal{T}_h \text{ et } \mathbf{u}_h \cdot \boldsymbol{\tau}_{|\partial\omega} = 0\}$ . La condition aux limites discrète  $(\mathbf{u}_h \cdot \boldsymbol{\tau}_{|\partial\omega})(M_I) = 0$  est ambiguë aux coins du polygone, et signifie que  $\mathbf{u}_h(M_I) = 0$ . Nous avons donc deux méthodes de discrétisation possibles pour approcher  $\mathbf{E}$  :

(i)  $\lambda$ -approche : Calcul des  $\lambda_h^i = (f_{\mathbf{E},h}, s_{N,h}^i)_0 + (g_{\mathbf{E},h}, s_{D,h}^i)_0 - (e_h, s_{N,h}^i)_{0,\partial\omega}$  par intégration numérique, en ayant approché les  $s_{D,N}^i$  par les éléments finis continus de Lagrange  $P_1$  ( $s_{D,h}^i$  et  $s_{N,h}^i$ ) ; puis calcul de  $\tilde{\mathbf{E}}_h$  dans  $\mathbf{X}_{\mathbf{E},h}^0$ , avec un relèvement discret de la condition aux limites tangentielle  $\tilde{\mathbf{E}}_h \cdot \boldsymbol{\tau}_{|\partial\omega} = -\sum_i \lambda_h^i (\mathbf{x}_P^i \cdot \boldsymbol{\tau}_{|\partial\omega})_h + e_h$ .

(ii) MCSO : Calcul des  $\beta_{D,N,h}^i$  par intégration numérique, calcul des  $\mathbf{x}_{S,h}^i$  par (i), puis calcul de  $\hat{\mathbf{E}}_h$  et des  $c_h^i$  dans  $\mathbf{X}_{\mathbf{E},h}^0$ , avec un relèvement discret de la condition aux limites tangentielle  $\hat{\mathbf{E}}_h \cdot \boldsymbol{\tau}_{|\partial\omega} = e_h$ .

**Proposition 5.1.** Soit  $\mathbf{E}_h$  l'approximation de  $\mathbf{E}$  par (i) ou (ii). Alors  $\forall \varepsilon > 0$ , il existe une constante  $C_{\varepsilon} > 0$  qui ne dépend que de  $\varepsilon$  telle que :

$$\|\mathbf{E} - \mathbf{E}_h\|_{\mathbf{X}_{\mathbf{E}}} < C_{\varepsilon} h^{2\alpha-1-\varepsilon}, \quad \text{où } \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{X}_{\mathbf{E}}}^2 = \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{X}_{\mathbf{E}}^0}^2 + \|\mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\tau}_{|\partial\omega}\|_{0,\partial\omega}^2. \quad (8)$$

**Preuve.** (i)  $\lambda$ -approche : Il existe des constantes  $C$ ,  $C'$  et  $C'_{\varepsilon}$  telles que :

$$|\lambda^i - \lambda_h^i| < C h^{2\alpha} \quad (\text{d'après [9,4]}), \quad (9)$$

$$\|\mathbf{e}_{\lambda} - \mathbf{e}_{\lambda,h}\|_{\mathbf{X}_{\mathbf{E}}} < C' h^{\min(2\alpha,k)} \quad (\text{erreur d'interpolation et erreur sur les } \lambda_i), \quad (10)$$

$$\|\tilde{\mathbf{E}}^0 - \tilde{\mathbf{E}}_h^0\|_{\mathbf{X}_{\mathbf{E}}^0} < C'_{\varepsilon} h^{2\alpha-1-\varepsilon}, \quad \forall \varepsilon > 0 \quad (\text{en suivant [7]}). \quad (11)$$

(ii) MCSO : D'après [7], il existe une constante  $C^c$  telle que  $|c^i - c_h^i| < C^c h^{2\alpha}$ , et on sait que  $\|\mathbf{x}_{S,h}^i - \mathbf{x}_S^i\|_{\mathbf{X}_{\mathbf{E}}}$  vérifie (8). De plus, on a l'estimation (11) sur le calcul de  $\mathbf{E}^{0,R}$ .  $\square$

**Corollaire 5.2.**  $\forall \varepsilon > 0$ , il existe une constante  $C_{\varepsilon}^0$  qui ne dépend que de  $\varepsilon$ , telle que :  $\|\mathbf{E} - \mathbf{E}_h\|_0 < C_{\varepsilon}^0 h^{4\alpha-2-\varepsilon}$ .

**Preuve.** Utiliser l’astuce d’Aubin–Nitsche.  $\square$

Si nécessaire, il est possible d’améliorer la vitesse de convergence : en raffinant localement le maillage, ou en calculant explicitement les termes singuliers suivants du champ [10], ou encore en calculant avec précision la solution au voisinage des coins de  $\partial\omega$  à l’aide d’opérateurs Dirichlet–Neumann [1].

## 6. Résultats numériques et conclusion

Tableau 1  
Erreurs de discrétisation

Table 1  
Discretization errors

$h$	$2,17e^{-1}$	$1,21e^{-1}$	$7,61e^{-2}$	$4,79e^{-2}$	$3,02e^{-2}$
$\ \mathbf{E}_h - \mathbf{E}\ _{\mathbf{X}_E} / \ \mathbf{E}\ _{\mathbf{X}_E}$	$8,53e^{-2}$	$5,60e^{-2}$	$4,03e^{-2}$	$3,05e^{-2}$	$2,39e^{-2}$

Les tests sont effectués sur un domaine en forme de L avec un seul coin rentrant, de paramètre  $\alpha = 2/3$  :  $g_E$  est constant,  $f_E$  est affine, et  $e = 0$ , de sorte que la solution de (1) n’est pas dans  $\mathbf{H}^1(\omega)$ . Nous utilisons des maillages triangulaires (de 620 à 158 720 éléments), avec l’élément fini de Lagrange  $P_1$ . Il n’est pas nécessaire de connaître la solution exacte pour faire le calcul d’erreur, puisque la norme du graphe est équivalente à la semi norme. On obtient les mêmes résultats pour les deux méthodes de calcul. Le taux de convergence numérique est d’environ 0,65, ce qui est meilleur que la théorie (0,33), mais il se dégrade au fur et à mesure qu’on raffine le maillage, car le régime asymptotique du taux de convergence (qui varie de 0,72 entre les maillages 1 et 2, à 0,53 entre les maillages 4 et 5) n’est pas encore atteint. Néanmoins l’erreur relative est de l’ordre de 2 % sur le dernier maillage. A priori, ces méthodes ne s’appliquent pas aux problèmes tridimensionnels, les espaces singuliers n’étant pas de dimension finie en général, mais elles s’appliquent aux cas «  $2D^{1/2}$  » : domaine prismatique ou axisymétrique [3,8].

## Remerciements

L’auteur tient à remercier Patrick Ciarlet pour ses conseils fructueux, son soutien et ses encouragements !

## Références

- [1] F. Assous, P. Ciarlet Jr., J. Segré, Numerical solution to the time-dependent Maxwell equations in two-dimensional singular domains: the singular complement method, *J. Comput. Phys.* 161 (2000) 218–249.
- [2] P. Ciarlet Jr., Augmented formulations for solving Maxwell equations, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, à paraître.
- [3] P. Ciarlet Jr., E. Garcia, J. Zou, Résolution des équations de Maxwell dans des domaines prismatiques tridimensionnels, *C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I*, à paraître.
- [4] P. Ciarlet Jr., J. He, The singular complement method for 2d scalar problems, *C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I* 336 (2003) 353–358.
- [5] E. Garcia, Résolution des équations de Maxwell instationnaires avec charges dans des domaines non convexes, Thèse de Doctorat de l’Université Paris VI, 2002.
- [6] P. Grisvard, *Singularities in Boundary Value Problems*, RMA, vol. 22, Masson, Paris, 1992.
- [7] C. Hazard, S. Lohrengel, A singular field method for Maxwell’s equations: numerical aspects in two dimensions, *SIAM J. Appl. Math.* 40 (2002) 1021–1040.
- [8] S. Labrunie, La méthode du complément singulier avec Fourier pour les équations de Maxwell en domaine axisymétrique, *C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I*, soumis.
- [9] M.A. Moussaoui, Sur l’approximation du problème de Dirichlet dans un ouvert avec coins, in: P. Grisvard, et al. (Eds.), *Singularities and Constructive Methods for their Treatment*, vol. 1121, Springer-Verlag, 1984, pp. 199–206.
- [10] S.A. Nazarov, B.A. Plamenevsky, *Elliptic Problems in Domains with Piecewise Smooth Boundaries*, Walter de Gruyter, Berlin, 1994.