Available online at www.sciencedirect.com
SCIENCE DIRECT®
C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 339 (2004) 769–774
COMPTES RENDUS MATHEMATIQUE
http://france.elsevier.com/direct/CRASS1/

Contrôle optimal

Stabilité exponentielle des équations des ondes avec amortissement local de Kelvin–Voigt

Kangsheng Liu [a], Bopeng Rao [b]

[a] *Department of Applied Mathematics, Zhejiang University, Hangzhou, 310027, Chine*
[b] *Institut de recherche mathématique avancée, université Louis Pasteur de Strasbourg, 7, rue René-Descartes, 67084 Strasbourg cedex, France*

Reçu le 23 novembre 2003 ; accepté après révision le 27 septembre 2004

Présenté par Philippe G. Ciarlet

Résumé

Nous considérons la stabilité des équations des ondes avec un amortissement visco-élastique distribué autour de la frontière du domaine. Nous montrons que l'énergie du système tend vers zéro uniformément et exponentiellement pour toute donnée initiale d'énergie finie. ***Pour citer cet article : K. Liu, B. Rao, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 339 (2004).***

Abstract

Exponential stability for the wave equations with local Kelvin–Voigt damping. We consider the stability of wave equations with local viscoelastic damping distributed around the boundary of domain. We show that the energy of the system goes uniformly and exponentially to zero for all initial data of finite energy. ***To cite this article: K. Liu, B. Rao, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 339 (2004).***

Abridged English version

Local viscoelastic damping is a natural phenomena for the elastic bodies which have one part made of viscoelastic material. Let $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ be a bounded open set with Lipschitz boundary Γ. We consider the wave equation with locally distributed viscoelastic damping given in Eq. (1).

Here we assume that $\rho(x) \geqslant \rho_0 > 0, a(x) \geqslant a_0 > 0$ and $b(x) \geqslant 0$ for all $x \in \Omega$. It is easy to verify that the energy $E(t)$ of the system defined by Eq. (2) is a Lyapunov function. In [10], we prove that the energy $E(t)$ tends to zero when the damping term is effective in a set of positive measure.

Adresse e-mail : rao@math.u-strasbg.fr (B. Rao).

1631-073X/$ – see front matter
doi:10.1016/j.crma.2004.09.029

There are a number of publications concerning the wave equations with local viscous damping (see [7,15]). However, only a few results are known for the wave equations with local viscoelastic damping. In [8], it was proved that the energy of an one-dimensional wave equation with local viscoelastic damping does not decay exponentially if the damping coefficient b is discontinuous across the interface of the materials. Nevertheless, this does not contradict the well known 'geometric optics' condition of [1], since the viscoelastic damping is unbounded in the energy space. Moreover the spectral analysis shows that the system (1) has two branches of eigenvalues. The real part of the first branch goes to $-\infty$, and that of the second branch goes to 0^-. This explains that the local viscoelastic damping reacts strongly on the damped region and reduces quickly the perturbations. However, its influence is very weak on the undamped region, where the energy decays slowly. It is thought that the loss of exponential stability is caused by the discontinuity of material properties at the interface. This was partially confirmed in [9] where the exponential stability of an one-dimensional wave equation was established for local viscoelastic damping with differentiable coefficients. However, the problem of exponential stability for higher dimensional wave equations with local Kelvin–Voigt damping is more delicate due to the unboundedness of the viscoelastic damping term. On the other hand, because of the lake of smoothness of solution, the usual density arguments do not work for this problem. In this Note, we consider the case where the viscoelastic damping is distributed in a neighbourhood of the boundary. This situation allows us to use the technique of convolution to overcome the problems of regularity.

For $\delta > 0$, we define: $\mathcal{O}_\delta = \{x \in \Omega\colon\ |x-y| \leqslant \delta,\ y \in \Gamma\}$, $\Omega_\delta = \Omega \setminus \mathcal{O}_\delta$.

We assume (A1) for the smoothness of the coefficients a, ρ and (A2) for the localization of the damping coefficient b.

There exist $q \in C^1(\Omega; \mathbb{R}^N)$ and $0 < \alpha < \beta < \delta$ such that (Q1) holds.

There exists $\sigma > 0$ such that (Q2) holds.

There exists $C > 0$ such that for all $v \in H_0^1(\Omega)$, (Q3) holds.

Theorem 0.1 (Main Theorem). *Let $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ be a bounded open set with Lipschitz boundary $\partial\Omega$. Assume the conditions* (A1), (A2) *and* (Q1)–(Q3). *Then there exist positive constants $M > 1, \omega > 0$ such that for all initial data u_0, u_1 of finite energy, the energy of system* (1) *satisfies the following decay rate*:

$$E(t) \leqslant M\,\mathrm{e}^{-\omega t} E(0), \quad \forall t > 0.$$

1. Introduction

L'amortissement visco-élastique local est un phénomène naturel dans des structures dont une partie est composée d'un matériau visco-élastique, et l'autre partie est composée d'un matériau élastique. Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un domaine borné de frontière lipschitzienne Γ. Nous considérons l'équation des ondes avec un amortissement visco-élastique local :

$$\begin{cases} \rho(x)u_{tt}(x,t) = \operatorname{div}\big(a(x)\nabla u(x,t) + b(x)\nabla u_t(x,t)\big) & \text{dans } \Omega \times \mathbb{R}^+, \\ u(x,t) = 0 & \text{sur } \Gamma \times \mathbb{R}^+, \\ u(x,0) = u_0(x), \quad u_t(x,0) = u_1(x) & \text{dans } \Omega, \end{cases} \tag{1}$$

où on suppose que $\rho(x) \geqslant \rho_0 > 0$, $a(x) \geqslant a_0 > 0$, et $b(x) \geqslant 0$ pour tout $x \in \Omega$.

Définissons l'espace d'énergie par : $\mathcal{H} = H_0^1(\Omega) \times L_\rho^2(\Omega) \equiv V \times H$, muni du produit scalaire :

$$\big\langle (u_1, v_1), (u_2, v_2)\big\rangle_{\mathcal{H}} = \int_\Omega (a\nabla u_1 \nabla \bar{u}_2 + \rho v_1 \bar{v}_2)\,\mathrm{d}x =: \langle u_1, u_2\rangle_V + \langle v_1, v_2\rangle_H$$

et l'opérateur linéaire non borné $\mathcal{A}: D(\mathcal{A}) \to \mathcal{H}$ par :

$$D(\mathcal{A}) = \big\{(u,v) \in \mathcal{H} \mid v \in V\colon\ \operatorname{div}(a\nabla u + b\nabla v) \in L^2(\Omega)\big\}, \qquad \mathcal{A}(u,v) = \left(v, \frac{1}{\rho}\operatorname{div}(a\nabla u + b\nabla v)\right).$$

Notons d'abord que $\mathcal{A}$ est dissipatif et engendre un C^0-semigroupe de contractions $\mathrm{e}^{t\mathcal{A}}$ sur l'espace d'énergie $\mathcal{H}$. De plus, nous montrons dans [10] que l'énergie $E(t)$ de l'Éq. (1), définie par

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left(a|\nabla u|^2 + \rho |u_t|^2\right) \mathrm{d}x, \tag{2}$$

tend vers zéro si l'amortissement visco-élastique est donné sur un sous-ensemble de mesure positive.

Il existe un grand nombre de publications concernant la stabilité des équations des ondes avec un amortissement visqueux localement distribué (voir [7] et [15]). En revanche, très peu de résultats sont connus concernant des équations des ondes avec amortissement visco-élastique. Dans [8], il a été montré que l'énergie d'une équation des ondes en dimension un d'espace ne décroît pas exponentiellement vers zéro si le coefficient d'amortissement visco-élastique b est discontinu à l'interface des matériaux. Néanmoins, cela ne contredit pas à la condition de l'optique géométrique de [1], puisque l'amortissement visco-élastique $\operatorname{div}(b(x)\nabla u_t)$ est non borné dans l'espace d'énergie. D'autre part, l'analyse spectrale montre que le système (1) admet deux branches de valeurs propres. La partie réelle de la première branche tend vers $-\infty$ et celle de la deuxième branche tend vers 0^-. Ceci explique bien que l'amortissement visco-élastique réagit fortement sur la région amortie et atténue rapidement les perturbations de la région concernée. Mais son influence est très faible sur la région non amortie où l'énergie décroit lentement. On pensait que la perte de la stabilité exponentielle était produite par la discontinuité du coefficient d'amortissement à travers l'interface des matériaux. Si cela a été partiellement confirmé dans [9] pour l'équation des ondes en dimension un, le problème paraît beaucoup plus délicat en dimension supérieure par le fait que l'amortissement visco-élastique est non borné dans l'espace d'énergie. D'autre part, la régularité $(u, v) \in D(\mathcal{A})$ n'entraîne que $u + v \in H^2(\Omega)$ et $v \in H_0^1(\Omega)$. De ce fait u n'appartient pas à un espace de Sobolev plus régulier que $H_0^1(\Omega)$. Par conséquent, l'argument classique de densité ne s'applique pas à ce problème. Dans cette Note, nous considérons le cas où l'amortissement est distribué dans un voisinage de la frontière. Cette situation nous permet de surmonter les problèmes de régularité par la technique de convolution.

Rappelons que la répartition déséquilibrée de l'énergie est un phénomène général dans de nombreux problèmes. Nous renvoyons le lecteur à [11] pour un système d'équations d'évolution partiellement amorties, et à [13,14] pour un système d'équations des ondes et de la chaleur en dimension un.

Soit $\delta > 0$. On définit :

$$\mathcal{O}_\delta =: \left\{x \in \Omega\colon\ |x - y| < \delta,\ y \in \Gamma\right\}, \qquad \Omega_\delta =: \Omega \setminus \mathcal{O}_\delta.$$

Nous fixons les hypothèses sur la régularité des coefficients et la localisation de l'amortissement comme suit :

$$\rho, a, b \in C^1(\overline{\Omega}), \quad \text{et} \quad \Delta b \in L^\infty(\Omega), \tag{A1}$$

$$\exists \delta > 0,\ b_0 > 0\colon \quad b \geqslant b_0 \quad \forall x \in \mathcal{O}_\delta. \tag{A2}$$

Il existe $q \in C^1(\Omega; \mathbb{R}^N)$ et $0 < \alpha < \beta < \delta$ tels que

$$\operatorname{div}(\rho a q) \in C^{0,1}(\Omega), \quad q = 0 \quad \text{dans } \mathcal{O}_\alpha. \tag{Q1}$$

La matrice jacobienne est symétrique $\partial_j q_k = \partial_k q_j$, et il existe une constante $\sigma > 0$ telle que

$$2a\partial_j q_k + (q_k \partial_j a + q_j \partial_k a) + \left[\frac{a}{\rho}(q\nabla\rho) - (q\nabla a)\right] I \geqslant \sigma I, \quad \forall x \in \Omega_\beta. \tag{Q2}$$

Il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $v \in H_0^1(\Omega)$ on ait :

$$\left|(q\cdot\nabla v)\nabla b - (q\cdot\nabla b)\nabla v\right| \leqslant C\sqrt{b}|\nabla v|, \quad \forall x \in \Omega_\alpha. \tag{Q3}$$

Théorème 1.1 (Théorème Principal). *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un domaine borné de frontière lipschitzienne. Supposons vérifiées les hypothèses* (A1), (A2) *et* (Q1)–(Q3). *Alors il existe des constantes $M > 1$, $\omega > 0$ telles que pour toute donnée initiale $(u_0, u_1) \in \mathcal{H}$ l'énergie de l'Éq.* (1) *satisfait l'estimation suivante* :

$$E(t) \leqslant M\,\mathrm{e}^{-\omega t} E(0), \quad \forall t > 0.$$

Remarque 1. Dans le cas où ρ, a sont des constantes, l'hypothèse (Q2) est satisfaite avec $q = x\eta$ où η est la fonction caractéristique de Ω_β. D'autre part, l'hypothèse (Q3) est satisfaite s'il existe une constante $C' > 0$ telle que $|\nabla b|^2 \leqslant C'b$, $\forall x \in \Omega_\alpha$.

Par exemple, soit $\Omega = \{(x_1, x_2) \mid x_1^2 + x_2^2 \leqslant R^2\}$. Nous définissons une fonction radiale b :

$$b(x_1, x_2) = \begin{cases} \left(\sqrt{x_1^2 + x_2^2} - a\right)^2, & \text{si } a^2 \leqslant x_1^2 + x_2^2 \leqslant R^2,\ 0 < a < R, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Nous montrons facilement que $|\nabla b|^2 = 4b$ pour tout $x \in \Omega$. Nous vérifions facilement que l'hypothèse (Q3) est également satisfaite si le domaine Ω est une déformation d'un disque par un difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$. Ainsi le Théorème Principal s'applique au moins dans ces situations. Nous donnerons d'autres exemples d'application dans la version complète [10].

2. Démonstration du Théorème 1.1

D'après un résultat de Huang [5] et Pruss [12], un C^0-semigroupe de contractions $\mathrm{e}^{t\mathcal{A}}$ sur un espace de Hilbert $\mathcal{H}$ est exponentiellement stable si et seulement si :

$$\mathrm{i}\mathbb{R} \subset \rho(\mathcal{A}), \tag{H1}$$

$$\sup_{\beta \in \mathbb{R}} \left\| (\mathrm{i}\beta I - \mathcal{A})^{-1} \right\| < +\infty. \tag{H2}$$

Soulignons d'abord que la résolvante de $\mathcal{A}$ n'est pas compacte en général. Néanmoins, d'après un résultat de [2], le fait que $\mathcal{A}$ n'ait pas de valeur propre purement imaginaire entraîne bien la condition (H1). Soient donc $0 \neq \beta \in \mathbb{R}$ et $(u, v) \in D(\mathcal{A})$, tels que $\mathcal{A}(u, v) = \mathrm{i}\beta(u, v)$. Utilisant (2), on obtient $\int_\Omega b|\nabla v|^2 \,\mathrm{d}x = 0$. Alors l'hypothèse (A2) entraîne :

$$\begin{cases} \mathrm{i}\beta u - v = 0 & \text{dans } V, \\ \beta^2 \rho u + \operatorname{div}(a\nabla u) = 0 & \text{dans } H, \\ u = 0 & \text{dans } \mathcal{O}_\delta. \end{cases}$$

Ceci, grâce au résultat d'unicité (Theorem 17.2.6 dans [4], voir aussi [3] et [6]), implique que $u \equiv v \equiv 0$ dans Ω.

Supposons que la condition (H2) soit fausse. Alors il existe une suite $\beta_n \in \mathbb{R}$ et une suite $(u_n, v_n) \in D(\mathcal{A})$, telles que

$$|\beta_n| \to +\infty, \qquad \left\| (u_n, v_n) \right\|_{\mathcal{H}} = 1, \tag{3}$$

$$(\mathrm{i}\beta_n - \mathcal{A})(u_n, v_n) = (f_n, g_n) \to 0 \quad \text{dans } \mathcal{H}. \tag{4}$$

Nous allons déduire que $\|(u_n, v_n)\|_{\mathcal{H}} \to 0$. Cette contradiction permet de conclure.

(i) D'abord, multipliant (4) par (u_n, v_n), nous obtenons :

$$\operatorname{Re}\left\langle \mathcal{A}(u_n, v_n), (u_n, v_n) \right\rangle_{\mathcal{H}} = -\int_\Omega b|\nabla v_n|^2 \,\mathrm{d}x = \mathrm{o}(1). \tag{5}$$

Ensuite, nous écrivons (4) sous la forme :

$$\mathrm{i}\beta_n u_n - v_n = f_n \to 0 \quad \text{dans } V, \tag{6}$$

$$\mathrm{i}\beta_n \rho v_n - \operatorname{div}(a\nabla u_n + b\nabla v_n) = \rho g_n \to 0 \quad \text{dans } H. \tag{7}$$

Multipliant (6) par v_n et (7) par u_n et utilisant la dissipation (5), nous obtenons :

$$\mathrm{i}\beta_n \langle u_n, v_n \rangle_H - \|v_n\|_H^2 = \mathrm{o}(1), \qquad \mathrm{i}\beta_n \langle v_n, u_n \rangle_H + \|u_n\|_V^2 = \mathrm{o}(1).$$

Il en résulte :

$$\|u_n\|_V^2 \sim \|v_n\|_H^2. \tag{8}$$

(ii) Utilisant l'hypothèse (A2), la dissipation (5) et l'inégalité de Poincaré, nous obtenons :

$$\int_{\mathcal{O}_\delta} |\nabla v_n|^2 \,\mathrm{d}x = \mathrm{o}(1), \qquad \int_{\mathcal{O}_\delta} |v_n|^2 \,\mathrm{d}x = \mathrm{o}(1). \tag{9}$$

Soit $\epsilon > 0$ tel que $\delta - \epsilon > \beta$, on définit une fonction positive $\eta \in C^1(\Omega)$ par :

$$\eta = \begin{cases} 1 & \text{sur } \mathcal{O}_{\delta-\epsilon}, \\ 0 & \text{sur } \Omega_\delta. \end{cases}$$

Multipliant (7) par ηu_n, on obtient :

$$\int_{\mathcal{O}_\delta} a\eta|\nabla u_n|^2 + \int_{\mathcal{O}_\delta} \left[\mathrm{i}\beta_n v_n \eta\rho\bar{u}_n + \nabla u_n \nabla\eta\bar{u}_n + b\nabla v_n \nabla(\eta\bar{u}_n)\right] = \mathrm{o}(1). \tag{10}$$

A une constante multiplicative près, le carré de la deuxième intégrale est majoré par :

$$\int_{\mathcal{O}_\delta} |v_n|^2 \int_\Omega |\beta_n u_n|^2 + \int_\Omega b|\nabla v_n|^2 \int_\Omega |\nabla u_n|^2 + \int_\Omega |u_n|^2 \int_\Omega |\nabla u_n|^2 = \mathrm{o}(1), \tag{11}$$

où le premier terme tend vers zéro grâce à (9), le second terme tend vers zéro grâce à (5), et le troisième terme tend vers zéro grâce à (3) et (6).

Combinant (11) et (10) et utilisant la définition de la fonction η, nous obtenons :

$$\int_{\mathcal{O}_\beta} |\nabla u_n|^2 \,\mathrm{d}x = \mathrm{o}(1). \tag{12}$$

(iii) Désignons par $M_n := a\nabla u_n + d\nabla v_n$. En multipliant (7) par $q \cdot M_n$, nous obtenons :

$$\int_\Omega \mathrm{i}\beta_n \rho v_n (q \cdot \overline{M}_n) \,\mathrm{d}x - \int_\Omega \operatorname{div} M_n (q \cdot \overline{M}_n) \,\mathrm{d}x = \mathrm{o}(1). \tag{13}$$

La régularité de $(u_n, v_n) \in D(\mathcal{A})$ est suffisante pour effectuer des intégrations dans le premier terme de (13). Après des calculs fastidieux, mais sans difficultés essentielles, nous obtenons :

$$\operatorname{Re} \int_\Omega \mathrm{i}\beta_n \rho v_n (q \cdot \overline{M}_n) \,\mathrm{d}x = \int_\Omega \frac{a \operatorname{div}(a\rho q)}{2\rho} |\nabla u_n|^2 \,\mathrm{d}x + \mathrm{o}(1). \tag{14}$$

En revanche, la régularité $(u_n, v_n) \in D(\mathcal{A})$ ne permet pas d'effectuer des calculs dans le deuxième terme de (13). Pour cela, nous établissons d'abord l'égalité :

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \int_\Omega -\operatorname{div} M_n (q \cdot \overline{M}_n) \,\mathrm{d}x &= \int_\Omega \left(M_{n,j} \overline{M}_{n,k} \partial_j q_k - \frac{1}{2} \operatorname{div} q |M_n|^2 \right) \mathrm{d}x \\ &\quad + \operatorname{Re} \int_\Omega M_n \cdot \left[(q \cdot \nabla\bar{u}_n)\nabla a - (q \cdot \nabla a)\nabla\bar{u}_n\right] \mathrm{d}x + \operatorname{Re} \int_\Omega M_n \cdot \left[(q \cdot \nabla\bar{v}_n)\nabla b - (q \cdot \nabla b)\nabla\bar{v}_n\right] \mathrm{d}x \end{aligned} \tag{15}$$

pour des fonctions u_n, v_n régulières. Puis, nous l'étendons aux fonctions $(u_n, v_n) \in D(\mathcal{A})$ grâce au procédé de régularisation par convolution. C'est ici qu'on demande q à support compact dans Ω.

Grâce à (5), on en déduit $M_n = a\nabla u_n + \mathrm{o}(1)$. Ainsi les deux premiers termes du second membre de (15) s'écrivent sous la forme suivante :

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Re}\int_\Omega M_n \cdot \left[(q\cdot\nabla\bar{u}_n)\nabla a - (q\cdot\nabla a)\nabla\bar{u}_n\right]\mathrm{d}x \\
&\quad = \int_\Omega \left[\frac{a}{2}(q_k\partial_j a + q_j\partial_k a)\partial_j u_n\partial_k\bar{u}_n - aq\cdot\nabla a|\nabla u_n|^2\right]\mathrm{d}x + \mathrm{o}(1),
\end{aligned} \tag{16}$$

$$\int_\Omega \left[M_{n,j}\overline{M}_{n,k}\partial_j q_k - \frac{1}{2}(\mathrm{div}\, q)|M|^2\right]\mathrm{d}x = \int_\Omega a^2\left[\partial_j u_n\partial_j q_k\partial_k\bar{u}_n - \frac{1}{2}(\mathrm{div}\, q)|\nabla u_n|^2\right]\mathrm{d}x + \mathrm{o}(1). \tag{17}$$

D'autre part, le troisième terme du second membre de (15) tend vers zéro grâce à l'hypothèse (Q3) et à la dissipation (5). Reportant (14)–(17) dans (13), on obtient :

$$\int_\Omega \frac{a}{2}\left[\big(2a\partial_j q_k + (q_k\partial_j a + q_j\partial_k a)\big)\partial_j u_n\partial_k\bar{u}_n + \left(\frac{a}{\rho}(q\nabla\rho) - (q\nabla a)\right)|\nabla u_n|^2\right]\mathrm{d}x = \mathrm{o}(1).$$

De plus, grâce à l'hypothèse (Q2), nous déduisons :

$$\int_{\Omega_\beta} |\nabla u_n|^2\,\mathrm{d}x = \mathrm{o}(1). \tag{18}$$

En combinant (8), (12) et (18), nous obtenons : $\|u_n\|_V^2 + \|v_n\|_H^2 \sim \mathrm{o}(1)$. D'où une contradiction qui achève la démonstration. Les démonstrations détaillées font l'objet d'une publication en préparation [10].

Références

[1] C. Bardos, G. Lebeau, J. Rauch, Sharp sufficient conditions for the observation, control and stabilization of waves from the boundary, SIAM J. Control Optim. 30 (1992) 1024–1065.

[2] S. Chen, K. Liu, Z. Liu, Spectrum and stability for elastic systems with global or local Kelvin–Voigt damping, SIAM J. Appl. Math. 59 (1999) 651–668.

[3] N. Garofalo, F.H. Lin, Unique continuation for elliptic operators: a geometric-variational approach, Commun. Pure Appl. Math. 40 (1987) 347–366.

[4] L. Hormander, The Analysis of Linear Partial Differential Operators, Springer-Verlag, Berlin, 1985.

[5] F.L. Huang, Characteristic conditions for exponential stability of linear dynamical systems in Hilbert spaces, Ann. Differential Equations 1 (1985) 43–56.

[6] H. Koch, D. Tataru, Carleman estimates and unique continuation for second-order elliptic equations with nonsmooth coefficients, Commun. Pure Appl. Math. 54 (2001) 339–360.

[7] J. Lagnese, Control of wave process with distributed controls supported on a subregion, SIAM J. Control Optim. 21 (1983) 68–85.

[8] K. Liu, Z. Liu, Exponential decay of energy of the Euler–Bernoulli beam with locally distributed Kelvin–Voigt damping, SIAM J. Control Optim. 36 (3) (1998) 1086–1098.

[9] K. Liu, Z. Liu, Exponential decay of energy of vibrating strings with local viscoelasticity, Z. Angew. Math. Phys. 53 (2002) 265–280.

[10] K. Liu, B. Rao, Exponential stability for the wave equations with local Kelvin–Voigt damping, en préparation.

[11] P. Loreti, B. Rao, Compensation spectrale et taux de décroissance optimal de l'énergie de systèmes partiellement amortis, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 337 (2003) 531–536.

[12] J. Pruss, On the spectrum of C_0-semigroups, Trans. Am. Math. Soc. 284 (1984) 847–857.

[13] X. Zhang, E. Zuazua, Control, observation and polynomial decay for a coupled heat-wave system, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 336 (2003) 823–828.

[14] X. Zhang, E. Zuazua, Polynomial decay and control of a 1-d model for fluid–structure interaction, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 336 (2003) 745–750.

[15] E. Zuazua, Exponential decay for the semilinear wave equation with localized damping, Commun. Partial Differential Equations 15 (1990) 205–235.