Available online at www.sciencedirect.com
SCIENCE DIRECT®
C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 338 (2004) 703–708
COMPTES RENDUS MATHEMATIQUE

Analyse fonctionnelle

Hypercyclicité : le rôle du spectre ponctuel unimodulaire

Frédéric Bayart [a], Sophie Grivaux [b]

[a] *Laboratoire bordelais d'analyse et de géométrie, Université Bordeaux I, 351, cours de la Libération, 33405 Talence, France*
[b] *Équipe d'analyse, Université Paris 6, case 186, 4, place Jussieu, 75252 Paris cedex 05, France*

Reçu le 12 janvier 2004 ; accepté le 24 février 2004

Présenté par Gilles Pisier

Résumé

On étudie l'influence de l'existence d'un grand nombre de vecteurs propres associés à des valeurs propres de module 1 sur la dynamique d'un opérateur linéaire. Ceci nous conduit à introduire la notion d'hypercyclicité fréquente. ***Pour citer cet article : F. Bayart, S. Grivaux, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 338 (2004).***

Abstract

Hypercyclicity: the role of the unimodular point spectrum. We study the influence of the existence of sufficiently many eigenvectors associated to eigenvalues of modulus 1 on the dynamics of a linear operator. This leads us to introduce the new notion of frequent hypercyclicity. ***To cite this article: F. Bayart, S. Grivaux, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 338 (2004).***

Abridged English version

The purpose of this Note is to report on some results which exhibit a link between the dynamics of a linear operator and its unimodular point spectrum. Detailed results and proofs will be given elsewhere.

An operator T on a separable locally convex Fréchet space X is said to be *hypercyclic* when there exists a vector $x \in X$ such that the orbit of x under the action of T, that is $\mathrm{Orb}(x, T) = \{T^n x;\ n \geqslant 0\}$, is dense in X. We denote by $HC(T)$ the set of hypercyclic vectors for T. Hypercyclicity is a natural generalization of cyclicity, and although no operator on a finite-dimensional space is ever hypercyclic, many operators have been proved to be hypercyclic: translations on spaces of entire functions, perturbations of upper-triangular operators by big multiples of backward shifts, adjoints of multipliers... For a thorough survey on hypercyclicity, see [6] as well as [7]. Different criteria have been introduced to prove the hypercyclicity of an operator, all of which rely on a Baire Category argument. The most interesting one for our purpose is due to Godefroy and Shapiro [5]: if the eigenvectors associated to eigenvalues of modulus greater than 1 and smaller than 1 respectively span a dense subset of X, then T is hypercyclic. Our aim in this Note is to obtain a counterpart of this criterion by studying conditions on eigenvectors associated to eigenvalues of modulus 1 which imply hypercyclicity. The following definition is relevant to our purpose:

Adresses e-mail : bayart@math.u-bordeaux.fr (F. Bayart), grivaux@ccr.jussieu.fr (S. Grivaux).

1631-073X/$ – see front matter
doi:10.1016/j.crma.2004.02.012

Definition 0.1. We say that an operator T on a complex separable Banach space has a *perfectly spanning eigenvector field corresponding to unimodular eigenvalues* if there exists a continuous probability measure σ on the unit circle $\mathbb{T}$ such that, for any measurable subset A of $\mathbb{T}$ with $\sigma(A) = 1$, the vector space spanned by the kernels $\ker(T - \lambda I)$ for $\lambda \in A$ is dense in X.

We obtain the following theorem, whose proof in a special case can be found in the French version:

Theorem 0.2. *Let T be a bounded operator on X such that T has a perfectly spanning eigenvector field corresponding to unimodular eigenvalues. Then T is hypercyclic. If the probability measure σ involved in Definition* 0.1 *is absolutely continuous with respect to the Lebesgue measure on the unit circle, T is even mixing, i.e. for every pair (U, V) of nonempty open subsets of X, there exists an integer N such that for every $n \geqslant N$, $T^n(U) \cap V$ is nonempty.*

Perfectly spanning eigenvector fields can be successfully used to show the existence of a common hypercyclic vector for certain uncountable families of hypercyclic operators. Consider for instance multipliers M_ϕ on the Hardy space $H^2(\mathbb{D})$, where $\phi \in H^\infty(\mathbb{D})$ is a nonconstant function. It is proved in [5] that M_ϕ^* is hypercyclic if and only if $\phi(\mathbb{D}) \cap \mathbb{T} \neq \varnothing$.

Theorem 0.3. *Let $\phi \in H^\infty(\mathbb{D})$ be a nonconstant function, and let $\Lambda = \{\lambda \in \mathbb{C};\ \lambda\phi(\mathbb{D}) \cap \mathbb{T} \neq \varnothing\}$. Then*

$$\bigcap_{\lambda \in \Lambda} HC(\lambda M_\phi^*) \neq \varnothing.$$

A natural improvement of the notion of hypercyclicity is that of *frequent hypercyclicity*, where we quantify the frequency with which an orbit visits a given open set of X according to the following definition:

Definition 0.4. An operator T on a Fréchet space X is said to be *frequently hypercyclic* provided there exists $x \in X$ such that, for any nonempty open subset U of X,

$$\underline{\mathrm{dens}}\left\{n \in \mathbb{N};\ T^n x \in U\right\} > 0.$$

Here $\underline{\mathrm{dens}}(A) = \liminf_{N \to \infty} \frac{1}{N} \operatorname{card}\{n \leqslant N;\ n \in A\}$ for any subset A of $\mathbb{N}$.

The following result gives a large class of frequently hypercyclic operators:

Theorem 0.5. *Let T be a bounded operator on a complex separable Hilbert space H. Suppose that T has a perfectly spanning eigenvector field corresponding to unimodular eigenvalues. Then there exists a nondegenerate Gaussian measure on H which is invariant for T and with respect to which T is weak-mixing, and T is frequently hypercyclic.*

We also obtain a criterion for frequent hypercyclicity which can be applied in any locally convex Fréchet space X. It is best understood as a strengthened form of the Hypercyclicity Criterion (see, for instance, [5] and the introduction in the French version):

Theorem 0.6. *Let X be a separable Fréchet space, endowed with a complete metric ρ on X which induces the topology of X, and T a bounded operator on X. Suppose that there exists a dense sequence $(x_l)_{l \geqslant 1}$ of vectors of X, and a map S defined on X such that for every $l \geqslant 1$,*

(i) $T^n S^n x_l = x_l$, *for every* $n \geqslant 1$;
(ii) *there is a sequence of positive real numbers* $(c_k(l))_{k \geqslant 1}$ *satisfying*:

(a) $\sum_{k\geqslant 1} c_k(l) < +\infty$,
(b) $\rho(T^k x_l, 0) \leqslant c_k(l)$,
(c) $\rho(S^k x_l, 0) \leqslant c_k(l)$.

Then T is frequently hypercyclic.

Theorem 0.6 applies in particular to Birkhoff's translation operator, as well as to any multiple λB, $|\lambda| > 1$, of the backward shift on one of the spaces ℓ_p, $1 \leqslant p < +\infty$, or c_0. Applying Theorem 0.5 shows that the adjoints of multipliers M_ϕ^* on $H^2(\mathbb{D})$ are frequently hypercyclic as soon as $\phi(\mathbb{D}) \cap \mathbb{T} \neq \varnothing$. On the other hand, the backward shift B on the Bergman space is hypercyclic (see for instance [5]) without being frequently hypercyclic.

1. Introduction

Nous énoncons dans cette Note certains résultats qui font apparaître un lien entre le comportement du système dynamique associé à un opérateur linéaire et le spectre ponctuel unimodulaire de cet opérateur. Des énoncés plus complets et des preuves détaillées seront donnés ultérieurement.

Un opérateur T sur un espace de Fréchet séparable X (qui sera toujours supposé localement convexe) est dit *hypercyclique* s'il existe $x \in X$ tel que l'orbite de x sous l'action de T, $\mathrm{Orb}(x, T) = \{T^n x;\ n \geqslant 0\}$, est dense dans X. On dit alors que le vecteur x est un vecteur hypercyclique pour T, et l'ensemble de ces vecteurs hypercycliques est noté $HC(T)$. D'après le théorème de Baire, ceci revient à dire que T est topologiquement transitif : pour tout couple (U, V) d'ouverts non vides de X il existe un entier n tel que $T^n(U) \cap V$ soit non-vide. C'est Birkhoff [2] qui en 1929 a exhibé le premier opérateur hypercyclique, l'opérateur de translation $Tf(z) = f(z+1)$ agissant sur l'ensemble des fonctions entières $\mathcal{H}(\mathbb{C})$. Dans le contexte des espaces de Banach, l'exemple le plus ancien remonte à Rolewicz en 1969 [8] qui a prouvé que pour tout ω tel que $|\omega| > 1$, l'opérateur ωB est hypercyclique. Ici, $B(x_0, x_1, \ldots) = (x_1, x_2, \ldots)$ désigne le décalage à gauche sur ℓ_2. L'article de Grosse–Erdmann [6] constitue une excellente référence sur le sujet jusqu'en 1999, les avancées plus récentes étant décrites dans [7]. Usuellement, on prouve l'hypercyclicité d'un opérateur en appliquant le critère suivant, appelé Critère d'Hypercyclicité :

Critère d'Hypercyclicité. *Soit X un espace de Fréchet séparable, et T un opérateur linéaire continu sur X. On suppose qu'il existe des parties denses X_0 et Y_0 de X, une suite strictement croissante d'entiers (n_k) et une suite d'applications $S_{n_k} : Y_0 \to X$ vérifiant* :

(i) *pour tout* $x \in X_0$, $T^{n_k} x \to 0$,
(ii) *pour tout* $y \in Y_0$, $S_{n_k} y \to 0$,
(iii) *pour tout* $y \in Y_0$, $T^{n_k} S_{n_k} y \to y$.

Alors l'opérateur T est hypercyclique.

Godefroy et Shapiro ont montré dans [5] que lorsque l'opérateur T possède un grand nombre de vecteurs propres associés à des valeurs propres de module inférieur et supérieur à 1 respectivement, le critère précédent est vérifié. Plus précisément, on définit $X_+(T)$ (resp. $X_-(T)$) comme étant l'espace vectoriel engendré par les noyaux $\ker(T - \lambda I)$ pour $|\lambda| > 1$ (resp. $|\lambda| < 1$). Si $X_+(T)$ et $X_-(T)$ sont des sous-espaces denses de X, alors T est hypercyclique. Le but de cette Note est d'étudier l'influence de l'existence de vecteurs propres associés à des valeurs propres de module 1 sur l'hypercyclicité de l'opérateur.

2. Spectre unimodulaire et hypercyclicité

Commençons par quantifier le fait qu'un opérateur a suffisamment de vecteurs propres associés à des valeurs propres de module 1. L'exemple de l'identité montre que l'on ne peut se contenter d'une simple condition de densité.

Définition 2.1. Soit T un opérateur borné sur un espace de Banach séparable complexe X. On dit que les vecteurs propres de T associés aux valeurs propres de module 1 *engendrent parfaitement l'espace* s'il existe une mesure de probabilité diffuse σ sur $\mathbb{T}$ telle que, pour toute partie A de $\mathbb{T}$ de mesure 1, l'espace vectoriel engendré par les noyaux $\ker(T-\lambda I)$ pour $\lambda \in A$ est dense dans X.

Le théorème suivant peut être vu comme la contrepartie du critère de Godefroy et Shapiro énoncé ci-dessus :

Théorème 2.2. *Soit T un opérateur borné sur X tel que les vecteurs propres associés au spectre unimodulaire engendrent parfaitement l'espace. Alors T est hypercyclique.*

Démonstration. Nous donnons les idées principales de la démonstration dans le cas particulier où la mesure σ donnée par la Définition 2.1 est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue sur le cercle unité (on écrira alors $\mathrm{d}\sigma = f\,\mathrm{d}m$), et où le spectre unimodulaire est simple. On notera $e_T = \{\lambda \in \mathbb{T};\ \lambda \text{ est valeur propre de } T\}$. Soit E un champ de vecteurs propres normalisé, c'est-à-dire une application σ-mesurable de $\mathbb{T}$ dans X vérifiant : $TE(\lambda) = \lambda E(\lambda)$, $E(\lambda) \neq 0$ si $\lambda \in e_T$, et $\|E(\lambda)\| \leqslant 1$ (dans le cas où X est un espace de Hilbert, l'existence d'un champ borélien de vecteurs propres est prouvée par exemple dans [3]). On pose alors :

$$X_0 = \mathrm{vect}\left(\int_{\mathbb{T}} \lambda^j E(\lambda)\,\mathrm{d}\sigma(\lambda);\ j \in \mathbb{Z}\right).$$

Remarquons que X_0 est dense dans X : en effet, si $x^* \in X^*$ est nulle sur X_0, on a alors :

$$\forall j \in \mathbb{Z}, \quad \int_{\mathbb{T}} \lambda^j \langle x^*, E(\lambda)\rangle\,\mathrm{d}\sigma(\lambda) = 0.$$

Puisque $\{\lambda^j;\ j \in \mathbb{Z}\}$ engendre $L^2(\mathbb{T},\sigma)$, on a $\langle x^*, E(\lambda)\rangle = 0$ σ-presque partout, et ceci entraîne que $x^* = 0$. D'autre part, on a :

$$T^n\left(\int_{\mathbb{T}} \lambda^j E(\lambda)\,\mathrm{d}\sigma(\lambda)\right) = \int_{\mathbb{T}} \lambda^{j+n} E(\lambda) f(\lambda)\,\mathrm{d}m(\lambda).$$

Comme les coefficients de Fourier de $\lambda \mapsto E(\lambda)f(\lambda)$ tendent vers 0, $T^n(\int_{\mathbb{T}} \lambda^j E(\lambda)\,\mathrm{d}\sigma(\lambda))$ tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini. Par linéarité, ceci donne $T^n x \to 0$ pour tout $x \in X_0$. On définit enfin

$$S_n\left(\int_{\mathbb{T}} \lambda^j E(\lambda)\,\mathrm{d}\sigma(\lambda)\right) = \int_{\mathbb{T}} \lambda^{j-n} E(\lambda)\,\mathrm{d}\sigma(\lambda),$$

et on étend S_n par linéarité à X_0. Pour les mêmes raisons, $S_n(x) \to 0$ pour tout $x \in X_0$. Il reste à vérifier que $T^n S_n x \to x$ si $x \in X_0$, mais on a clairement pour tout n, $T^n S_n x = x$. Le Critère d'Hypercyclicité entraîne que T est hypercyclique, et même mélangeant dans ce cas : si U et V sont deux ouverts non-vides de X, il existe un entier N tel que pour tout $n \geqslant N$, $T^n(U) \cap V$ est non-vide. □

Donnons maintenant une application de cette méthode : un intérêt de la preuve du Théorème 2.2 est de permettre d'appliquer le Critère d'Hypercyclicité avec la même partie $X_0 = Y_0$. Ceci est important pour certains problèmes où l'existence de vecteurs hypercycliques s'obtient de manière constructive, comme par exemple dans les problèmes d'hypercyclicité simultanée : étant donnée une famille non dénombrable $(T_\lambda)_{\lambda\in I}$ d'opérateurs hypercycliques sur un même espace de Banach X, il est naturel de se demander s'il existe un vecteur hypercyclique commun pour tous ces opérateurs. Le premier résultat positif dans ce sens est dû à Abakumov et Gordon [1] qui ont prouvé l'existence d'un vecteur hypercyclique commun pour tous les $(\lambda B)_{\lambda>1}$. Les méthodes utilisées dans le Théorème 2.2 permettent d'étendre leur résultat à tous les adjoints de multiplicateurs, même dans le cas où le noyau est trivial. Si ϕ est un élément de $H^\infty(\mathbb{D})$, l'opérateur de multiplication par ϕ est défini sur l'espace de Hardy $H^2(\mathbb{D})$ par $M_\phi(f)=\phi f$. Godefroy et Shapiro ont prouvé que M_ϕ^* est hypercyclique si, et seulement si, $\phi(\mathbb{D})\cap\mathbb{T}\neq\varnothing$. On a en fait :

Théorème 2.3. *Soit $\phi\in H^\infty(\mathbb{D})$ une fonction non constante. On pose $\Lambda=\{\lambda\in\mathbb{C};\ \lambda\phi(\mathbb{D})\cap\mathbb{T}\neq\varnothing\}$. Alors :*

$$\bigcap_{\lambda\in\Lambda} HC(\lambda M_\phi^*)\neq\varnothing.$$

3. Spectre unimodulaire et mesures Gaussiennes invariantes

Dans cette partie, H désigne un espace de Hilbert complexe séparable de dimension infinie. Dans le prolongement des travaux de Flytzanis [4], on étudie l'existence d'une mesure Gaussienne sur H dont le support est H et qui est invariante pour T. On a alors le résultat suivant :

Théorème 3.1. *Soit T un opérateur borné sur H dont les vecteurs propres associés aux valeurs propres de module* 1 *engendrent l'espace. Alors T possède une mesure Gaussienne non dégénérée invariante.*

Dans le cadre de l'étude de l'orbite des opérateurs linéaires, il est intéressant d'étudier l'existence d'une mesure m_T sur H pour laquelle le système dynamique (T,m_T) est ergodique. Lorsque T vérifie les conditions supplémentaires de la Définition 2.1, on peut améliorer la conclusion du théorème précédent.

Théorème 3.2. *Soit T un opérateur borné sur H tel que les vecteurs propres associés au spectre unimodulaire engendrent parfaitement l'espace. Alors T possède une mesure invariante Gaussienne non dégénérée m_T par rapport à laquelle T est faiblement mélangeant.*

La démonstration de ce résultat utilise la théorie des espaces de Fock : on étend une relation valable sur un sous-espace Gaussien $\mathcal{G}$ de $L^2(H,m_T)$ à tout l'espace en l'identifiant à une puissance de Fock de $\mathcal{G}$. Comme corollaire on obtient que T, qui est en particulier ergodique par rapport à la mesure m_T, satisfait une propriété plus forte que l'hypercyclicité :

Corollaire 3.3. *Soit T un opérateur borné sur H tel que les vecteurs propres associés au spectre unimodulaire engendrent parfaitement l'espace. Alors T est topologiquement faiblement mélangeant : pour tout couple (U,V) d'ouverts non vides de H, on a $T^n(U)\cap V\neq\varnothing$ pour un ensemble d'entiers n de densité arithmétique* 1.

4. Opérateurs fréquemment hypercycliques

Divers renforcements de la notion d'opérateur hypercyclique sont apparus dans la littérature : opérateurs chaotiques [5], opérateurs faiblement mélangeants (voir le paragraphe précédent), ou opérateurs mélangeants. Ces deux dernières notions sont une quantification du fait qu'un opérateur hypercyclique est topologiquement transitif. Il est aussi naturel d'introduire une quantification du fait qu'un opérateur hypercyclique possède une orbite dense.

Définition 4.1. Un opérateur T sur un espace de Fréchet X est dit *fréquemment hypercyclique* s'il existe $x\in X$ tel que, pour tout ouvert non-vide U de X,

$$\underline{\mathrm{dens}}\big\{n \in \mathbb{N};\ T^n x \in U\big\} > 0,$$

où pour toute partie A de $\mathbb{N}$, $\underline{\mathrm{dens}}(A) = \liminf_{N\to\infty} \frac{1}{N} \operatorname{card}\{n \leqslant N;\ n \in A\}$.

Une application du théorème de Birkhoff à la suite du Théorème 3.2 donne le résultat suivant :

Corollaire 4.2. *Soit T un opérateur borné sur H tel que les vecteurs propres associés au spectre unimodulaire engendrent parfaitement l'espace. Alors T est fréquemment hypercyclique.*

En outre, on obtient que l'ensemble des vecteurs fréquemment hypercycliques est de mesure pleine pour la mesure Gaussienne par rapport à laquelle T est invariant. Rappelons que l'on montre facilement que l'ensemble des vecteurs hypercycliques est gros au sens des catégories : c'est un G_δ-dense. Mais il existe cependant des opérateurs fréquemment hypercycliques (par exemple, $2B$) pour lesquels l'ensemble des vecteurs fréquemment hypercycliques ne contient pas de G_δ-dense.

Nous terminons par l'énoncé d'un critère d'hypercyclicité fréquente qui permet d'exhiber des opérateurs fréquemment hypercycliques sur d'autres espaces que des espaces de Hilbert. Il s'agit d'une version précisée du Critère d'Hypercyclicité.

Théorème 4.3. *Soient X un espace de Fréchet séparable muni d'une distance invariante ρ qui le rend complet, et T un opérateur borné sur X. Supposons qu'il existe une suite $(x_l)_{l\geqslant 1}$ dense dans X, et une application S définie sur X telle que pour tout $l \geqslant 1$,*

(i) *$T^n S^n x_l = x_l$, pour tout $n \geqslant 1$;*
(ii) *il existe une suite de nombres réels $(c_k(l))_{k\geqslant 1}$ satisfaisant :*
   (a) $\sum_{k\geqslant 1} c_k(l) < +\infty$,
   (b) $\rho(T^k x_l, 0) \leqslant c_k(l)$,
   (c) $\rho(S^k x_l, 0) \leqslant c_k(l)$.

Alors T est fréquemment hypercyclique.

On peut alors démontrer que l'opérateur de translation de Birkhoff est fréquemment hypercyclique, ainsi que tous les multiples ωB, $|\omega| > 1$, du décalage à gauche B sur l'un des espaces ℓ_p, $1 \leqslant p < +\infty$ ou c_0. En appliquant le Corollaire 4.2, on peut également montrer que les adjoints de multiplicateurs M_ϕ^* sur $H^2(\mathbb{D})$ sont fréquemment hypercycliques dès que $\phi(\mathbb{D}) \cap \mathbb{T} \neq \varnothing$. En revanche, le décalage à gauche sur l'espace de Bergman n'est pas fréquemment hypercyclique, bien qu'il soit hypercyclique [5]. Par ailleurs, alors que chacun des opérateurs ωB, $\omega > 1$, est fréquemment hypercyclique sur ℓ_2, cette famille ne possède pas de vecteur fréquemment hypercyclique commun.

Références

[1] E. Abakumov, J. Gordon, Common hypercyclic vectors for multiples of the backward shift, J. Funct. Anal. 200 (2003) 494–504.
[2] G.D. Birkhoff, Démonstration d'un théorème élémentaire sur les fonctions entières, C. R. Acad. Sci. Paris 189 (1929) 473–475.
[3] J. Dixmier, C. Foias, Sur le spectre ponctuel d'un opérateur, in: Coll. Math. Soc. Janos Bolyai, Tihany (Hungary), 1970, pp. 127–133.
[4] E. Flytzanis, Unimodular eigenvalues and linear chaos in Hilbert spaces, Geom. Funct. Anal. 5 (1995) 1–13.
[5] G. Godefroy, J.H. Shapiro, Operators with dense, invariant, cyclic vector manifolds, J. Funct. Anal. 98 (1991) 229–269.
[6] K.G. Grosse-Erdmann, Universal families and hypercyclic operators, Bull. Amer. Math. Soc. 36 (1999) 345–381.
[7] K.-G. Grosse-Erdmann, Recent developments in hypercyclicity, Preprint, 2003.
[8] S. Rolewicz, On orbits of elements, Studia Math. 32 (1969) 17–22.