Available online at www.sciencedirect.com
SCIENCE DIRECT®
ELSEVIER
C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 338 (2004) 109–112
COMPTES RENDUS MATHEMATIQUE

Logique

Sur la répartition des diamants dans un tournoi

Houcine Bouchaala

Université de Sfax, Institut préparatoire aux études d'ingénieurs de Sfax, département de la préparation mathématiques-physique, BP 805, 3000 Sfax, Tunisie

Reçu le 13 novembre 2003 ; accepté le 18 novembre 2003

Présenté par Jean-Yves Girard

Résumé

Un tournoi $T=(S,A)$ est un graphe orienté tel que pour tous $x,y\in S$, avec $x\neq y$, $(x,y)\in A$ si et seulement si $(y,x)\notin A$. Par exemple, le 3-cycle est le tournoi $(\{1,2,3\},\{(1,2),(2,3),(3,1)\})$. À l'isomorphisme près, il existe deux tournois à 4 sommets et contenant un seul 3-cycle, que nous appelons diamants. Nous montrons que pour tout tournoi T défini sur $n\geqslant 9$ sommets, ou bien T contient au moins $2n-6$ diamants ou bien le nombre de diamants contenus dans T est égal à 0, $n-3$ ou $2n-8$. Suite à la caractérisation des tournois sans diamants due à Gnanvo et Ille (Z. Math. Logik Grundlag. Math. 38 (1992) 283–291) et à Lopez et Rauzy (Z. Math. Logik Grundlag. Math. 38 (1992) 27–37), nous étudions la morphologie des tournois définis sur $n\geqslant 5$ sommets et qui contiennent exactement $n-3$ ou $2n-8$ diamants. ***Pour citer cet article : H. Bouchaala, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 338 (2004).***

Abstract

On the repartition of diamonds in a tournament. A tournament $T=(V,A)$ is a directed graph such that for every $x,y\in V$, where $x\neq y$, $(x,y)\in A$ if and only if $(y,x)\notin A$. For example, the 3-cycle is the tournament $(\{1,2,3\},\{(1,2),(2,3),(3,1)\})$. Up to an isomorphism, there are two tournaments with 4 vertices and containing an unique 3-cycle which we call diamonds. We prove that for any tournament T defined on $n\geqslant 9$ vertices, either T contains at least $2n-6$ diamonds or the number of diamonds contained in T is equal to 0, $n-3$ or $2n-8$. Following the characterization of the tournaments without diamonds due to Gnanvo and Ille (Z. Math. Logik Grundlag. Math. 38 (1992) 283–291) and to Lopez and Rauzy (Z. Math. Logik Grundlag. Math. 38 (1992) 27–37), we study the morphology of the tournaments defined on $n\geqslant 5$ vertices and which contain exactly $n-3$ or $2n-8$ diamonds. ***To cite this article: H. Bouchaala, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 338 (2004).***

1. Préliminaires

Un *tournoi* T est un couple (S,A), où S est un ensemble fini, appelé ensemble des *sommets* de T, et A est un ensemble de couples de sommets distincts, appelé ensemble des *arcs* de T, vérifiant : pour tous $x,y\in S$, avec $x\neq y$, $(x,y)\in A$ si et seulement si $(y,x)\notin A$. À chaque partie X de S est associé le *sous-tournoi*

Adresse e-mail : Houcine.Bouchaala@ipeis.rnu.tn (H. Bouchaala).

1631-073X/$ – see front matter © 2003 Académie des sciences. Publié par Elsevier SAS. Tous droits réservés.
doi:10.1016/j.crma.2003.11.018

$T(X) = (X, (X \times X) \cap A)$ de T *induit* par X. Par exemple, le 3-*cycle* est le tournoi $(\{1, 2, 3\}, \{(1, 2), (2, 3), (3, 1)\})$. À l'isomorphisme près, il existe deux tournois à 4 sommets et contenant un seul 3-cycle que nous appelons *diamants*. Pour tout tournoi $T = (S, A)$, on note $\delta(T)$ le nombre de sous-tournois de T qui sont des diamants. Si T contient au moins un diamant, le *noyau* $N(T)$ de T est l'intersection de toutes les parties X de S telles que $T(X)$ est un diamant. Par ailleurs, le tournoi T est un *ordre total* lorsque pour tous $x, y, z \in S$, si $(x, y) \in A$ et $(y, z) \in A$, alors $(x, z) \in A$. Le *dual* de T est le tournoi $T^\star = (S, A^\star)$ défini par : pour tous $x, y \in S$, $(x, y) \in A^\star$ si $(y, x) \in A$. Un tournoi est *autodual* s'il est isomorphe à son dual.

Étant donné un tournoi $T = (S, A)$, une partie I de S est un *intervalle* [2] (ou un *clan* [1] ou un ensemble *homogène* [3]) de T lorsque pour tous $x, y \in I$ et pour tout $z \in S - I$, $(x, z) \in A$ si et seulement si $(y, z) \in A$. Par exemple, l'ensemble S, l'ensemble vide et les singletons de S sont des intervalles de T, appelés *intervalles triviaux* de T. Un tournoi est *indécomposable* lorsque tous ses intervalles sont triviaux. Il est *décomposable* dans le cas contraire.

Soit $T = (S, A)$ un tournoi, associons à chaque $x \in S$ un tournoi $T_x = (S_x, A_x)$ de telle sorte que les ensembles de sommets S_x soient mutuellement disjoints. La *somme lexicographique* des tournois T_x suivant T est le tournoi noté $T(T_x;\ x \in S)$ et défini sur la réunion des S_x comme suit : étant donnés $u \in S_x$ et $v \in S_y$, où $x, y \in S$, (u, v) est un arc de $T(T_x;\ x \in S)$ lorsque ou bien $x = y$ et $(u, v) \in A_x$ ou bien $x \neq y$ et $(x, y) \in A$.

Étant donné un tournoi $T = (S, A)$, pour tous éléments x, y de S, la notation $x \to y$ signifie $(x, y) \in A$ et pour toutes parties disjointes I et J de S, on note $I \to J$ lorsque pour tout $(x, y) \in I \times J$, $x \to y$. Pour un ordre total, $x \to y$ est encore notée $x < y$. Enfin, pour tout $x \in S$, on pose $V_T^-(x) = \{y \in S;\ (y, x) \in A\}$ et $V_T^+(x) = \{y \in S;\ (x, y) \in A\}$.

2. Présentation des résultats

En 1993, Lamy a remarqué que tout tournoi à 5 sommets contient exactement 0 ou 2 diamants. À partir de cette observation, nous avons établi le dénombrement suivant.

Théorème 2.1. *Étant donné un tournoi T à $n \geqslant 6$ sommets, ou bien $\delta(T) \in \{0, n-3, 2n-8\}$ ou bien $\delta(T) > 2n-8$. Si de plus $n \geqslant 9$, alors $\delta(T) \neq 2n-7$.*

Afin de rappeler la caractérisation suivante des tournois sans diamants, due à Gnanvo et Ille [4] et à Lopez et Rauzy [5], nous définissons, pour tout $h \geqslant 0$, le tournoi T_h sur $\{0, \ldots, 2h\}$ comme suit. Pour tous $i, j \in \{0, \ldots, 2h\}$, $i \to j$ s'il existe $k \in \{1, \ldots, h\}$ tel que $j = i + k$ modulo $2h + 1$.

Théorème 2.2 [4,5]. *Un tournoi ne contient aucun diamant si et seulement si il se décompose en une somme lexicographique d'ordres totaux suivant un tournoi T_h.*

Les tournois à $n \geqslant 6$ sommets tels que $\delta(T) = 0$, $n - 3$ ou $2n - 8$ sont appelés tournois du *premier*, *deuxième* ou *troisième palier* respectivement.

Au cours de la preuve du Théorème 2.1, on établit pour tout tournoi T ayant $n \geqslant 6$ sommets, d'une part, que $\delta(T) = n - 3$ si et seulement si $|N(T)| = 3$ et, d'autre part, que si $\delta(T) = 2n - 8$, alors $|N(T)| = 2$.

Suite au Théorème 2.2, nous étudions la morphologie des tournois du deuxième et du troisième palier en introduisant les notions suivantes de partition et d'extension cycliques.

Considérons un tournoi sans diamants $T = (S, A)$ à $n \geqslant 4$ sommets, b un sommet de T et des partitions $\{B_1, B_2\}$ de $V_T^+(b)$ et $\{B_3, B_4\}$ de $V_T^-(b)$. On dit que (b, B_1, B_2, B_3, B_4) réalise une *partition cyclique* de T lorsque $B_1 \cup B_3 \neq \emptyset$, $B_2 \cup B_4 \neq \emptyset$ et $B_1 \to B_2 \to B_3 \to B_4 \to B_1$. Pour tout $a \notin S$, une (tournoi) extension de T à $S \cup \{a\}$ est une *extension cyclique* associée à la partition cyclique (b, B_1, B_2, B_3, B_4) lorsque pour tout $x \in S$, $a \to x$ si et seulement si $x \in \{b\} \cup B_2 \cup B_3$.

Théorème 2.3. *Pour tout tournoi $T = (S, A)$ ayant $n \geqslant 5$ sommets, $N(T)$ contient au moins deux sommets a et b, avec $a \to b$, si et seulement si T est l'extension cyclique de $T(S - \{a\})$ associée à la partition cyclique (b, B_1, B_2, B_3, B_4) avec $B_1 = V_T^+(b) \cap V_T^-(a)$, $B_2 = V_T^+(b) \cap V_T^+(a)$, $B_3 = V_T^-(b) \cap V_T^+(a)$ et $B_4 = V_T^-(b) \cap V_T^-(a)$.*

Enfin, en utilisant la décomposition de Gallai [3] et des résultats sur les tournois indécomposables dus à Ehrenfeucht et Rozenberg [1], nous déterminons, à l'isomorphisme près, les tournois indécomposables du deuxième et du troisième palier et ceux dont le noyau est une paire. En particulier, nous obtenons.

Proposition 2.4. *Pour tout entier $n \geqslant 7$, à l'isomorphisme près, le deuxième palier contient exactement* 2 *tournois indécomposables et le troisième en contient exactement* 8.

Proposition 2.5. *Pour tout entier $n \geqslant 6$, il existe, à l'isomorphisme près, exactement $4n - 20$ tournois indécomposables dont le noyau est une paire.*

3. Preuve du Théorème 2.1

La preuve du Théorème 2.1 repose essentiellement sur les deux lemmes suivants.

Lemme 3.1. *Si $T = (S, A)$ est un tournoi à $n \geqslant 5$ sommets qui contient au moins un diamant, alors par chacun de ses sommets passe au moins un diamant. De plus, les assertions suivantes sont équivalentes.*

- $\delta(T) = n - 3$.
- $|N(T)| = 3$.
- *Pour toutes parties distinctes X et Y de S telles que $T(X)$ et $T(Y)$ sont des diamants, $|X \cap Y| = 3$.*

Lemme 3.2. *Soit T un tournoi à $n \geqslant 6$ sommets admettant deux sous-tournois $T(X)$ et $T(Y)$ qui sont des diamants. Si $|X \cap Y| = 2$, alors $\delta(T) \geqslant 2n - 8$. En revanche, si $|X \cap Y| \leqslant 1$, alors $\delta(T) \geqslant 2n - 6$.*

4. Étude morphologique

Pour démontrer le Théorème 2.3, nous utilisons le Théorème 2.2 et le lemme suivant.

Lemme 4.1. *Soit $\widetilde{T}$ l'extension cyclique d'un tournoi sans diamants $T = (S, A)$ à $S \cup \{a\}$, où $a \notin S$ et $|S| \geqslant 4$, associée à une partition cyclique (b, B_1, B_2, B_3, B_4). Pour tous $x, y \in S$, $\widetilde{T}(\{x, y, a, b\})$ est un diamant si et seulement si (x, y) ou (y, x) appartient à $(B_1 \cup B_3) \times (B_2 \cup B_4)$.*

Le résultat suivant décrit la morphologie d'un tournoi $\widetilde{T}$ du deuxième ou du troisième palier. Par ce qui précède, un tel tournoi est l'extension cyclique d'un tournoi sans diamants T associée à une partition cyclique (b, B_1, B_2, B_3, B_4).

Corollaire 4.2. *Le tournoi $\widetilde{T}$ est du deuxième palier si et seulement si* $\min(|B_1 \cup B_3|, |B_2 \cup B_4|) = 1$. *Par contre, $\widetilde{T}$ est du troisième palier si et seulement si* $\min(|B_1 \cup B_3|, |B_2 \cup B_4|) = 2$.

Concernant la Proposition 2.4, nous définissons ci-après les tournois à $n \geqslant 8$ sommets, indécomposables, du deuxième ou du troisième palier lorsque par exemple n est pair. Chacun des tournois suivants est une extension cyclique d'un tournoi sans diamants $T=(S,A)$ ayant $n-1$ sommets, à $S\cup\{a\}$ où $a\notin S$, associée à une partition cyclique (b,B_1,B_2,B_3,B_4). Posons $T=T_h(p_0,\ldots,p_{2h})$ et notons S_i l'ensemble des sommets de l'ordre total p_i, pour tout $i\in\{0,\ldots,2h\}$.

- U est défini avec $h=\frac{n-4}{2}$, $p_0=x_0<y_0<b$, $B_1=S_1\cup\cdots\cup S_h$, $B_2=\emptyset$, $B_3=(S_{h+1}\cup\cdots\cup S_{2h})\cup\{x_0\}$, $B_4=\{y_0\}$ et pour tout $i\in\{1,\ldots,2h\}$, $|S_i|=1$.
- V_1 est défini avec $h=\frac{n-2}{2}$, $S_0=\{b\}$, $B_1=S_1$, $B_2=S_2\cup\cdots\cup S_h$, $B_3=S_{h+1}$, $B_4=S_{h+2}\cup\cdots\cup S_{2h}$ et pour tout $i\in\{1,\ldots,2h\}$, $|S_i|=1$.
- V_2 est défini avec $h=\frac{n-2}{2}$, $S_0=\{b\}$, $B_1=S_1\cup\cdots\cup S_{h-1}$, $B_2=S_h$, $B_3=S_{h+1}\cup\cdots\cup S_{2h-1}$, $B_4=S_{2h}$ et pour tout $i\in\{1,\ldots,2h\}$, $|S_i|=1$.
- V_3 est défini avec $h=\frac{n-4}{2}$, $p_0=x_0<b$, $p_1=x_1<y_1$, $B_1=\{x_1\}$, $B_2=\{y_1\}\cup(S_2\cup\cdots\cup S_h)$, $B_3=S_{h+1}$, $B_4=(S_{h+2}\cup\cdots\cup S_{2h})\cup\{x_0\}$ et pour tout $i\in\{2,\ldots,2h\}$, $|S_i|=1$.
- V_4 est défini avec $h=\frac{n-4}{2}$, $p_0=x_0<b$, $p_h=x_h<y_h$, $B_1=(S_1\cup\cdots\cup S_{h-1})\cup\{x_h\}$, $B_2=\{y_h\}$, $B_3=S_{h+1}\cup\cdots\cup S_{2h}$, $B_4=\{x_0\}$ et pour tout $i\in\{1,\ldots,2h\}-\{h\}$, $|S_i|=1$.

À l'isomorphisme près, U et $U^\star$ sont les seuls tournois indécomposables du deuxième palier ayant n sommets, et $V_1,\ldots,V_4$ et leurs duaux sont les seuls tournois indécomposables du troisième palier ayant n sommets.

Finalement, nous présentons une opération équivalente à l'extension cyclique qui a été proposée par le rapporteur. Soit T un tournoi sans diamants. Deux sommets a et b de T sont *équivalents* si $\{a,b\}$ est un intervalle de T. Au contraire, l'élément minimum et l'élément maximum d'un ordre total maximal, parmi les sous-tournois de T, sont appelés sommets *opposés*. On vérifie alors que les extensions cycliques sont exactement les tournois obtenus à partir d'un tournoi sans diamants en inversant uniquement l'arc entre deux sommets qui sont ni équivalents et ni opposés.

Remerciements

Je remercie vivement Y. Boudabbous et G. Lopez pour le soutien qu'ils m'ont apporté lors de la préparation de ce travail.

Références

[1] A. Ehrenfeucht, G. Rozenberg, Primitivity is hereditary for 2-structures, Theoret. Comput. Sci. 3 (70) (1990) 343–358.
[2] R. Fraïssé, L'intervalle en théorie des relations, ses généralisations, filtre intervallaire et clôture d'une relation, in: M. Pouzet, D. Richard (Eds.), Orders, Description and Roles, North-Holland, 1984, pp. 313–342.
[3] T. Gallai, Transitiv orientierbare Graphen, Acta Math. Acad. Sci. Hungar. 18 (1967) 25–66.
[4] C. Gnanvo, P. Ille, La reconstruction des tournois sans diamants, Z. Math. Logik Grundlag. Math. 38 (1992) 283–291.
[5] G. Lopez, C. Rauzy, Reconstruction of binary relations from their restrictions of cardinality 2, 3, 4 and $(n-1)$, I, Z. Math. Logik Grundlag. Math. 38 (1992) 27–37.