Available online at www.sciencedirect.com
SCIENCE DIRECT®

C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 338 (2004) 925–928

COMPTES RENDUS
MATHEMATIQUE

Géométrie analytique

# Classes de variétés localement conformément Kählériennes, non Kählériennes

Julie Renaud

*Université de Provence, 39, rue Joliot-Curie, 13453 Marseille cedex 13, France*

Reçu le 8 février 2004 ; accepté le 21 mars 2004

Disponible sur Internet le 7 mai 2004

Présenté par Étienne Ghys

**Résumé**

Dans cette Note, nous construisons deux classes de variétés complexes non compactes, localement conformément kählériennes mais qui ne sont pas kählériennes. La construction est inspirée par les résultats de Loeb. Nous donnons deux exemples en dimensions 2 et 3. ***Pour citer cet article : J. Renaud, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 338 (2004).***


**Abstract**

**Classes of non-Kähler, locally conformally Kähler manifolds.** In this Note, we construct two classes of non-compact complex manifolds, locally conformally Kähler but non-Kähler. The construction is inspired by the results of Loeb. We give two examples in dimensions 2 and 3. ***To cite this article: J. Renaud, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 338 (2004).***


## 1. Introduction

D'après le théorème de Siu, une surface complexe compacte admet une métrique kählérienne si et seulement si son premier nombre de Betti est pair. En revanche, si $b_1$ est impair, il est intéressant de savoir si l'on peut munir la surface d'une métrique localement conformément kählérienne. Nous rappelons qu'une métrique hermitienne $g$ sur une variété complexe $X$ est dite localement conformément kählérienne (l.c.K) s'il existe un recouvrement ouvert $\{U_i\}$ de $X$ et une famille de fonctions $\mathcal{C}^\infty$, $f_i : U_i \to \mathbb{R}$ tels que chaque métrique locale $\exp(-f_i)g_{|U_i}$ soit kählérienne.

Gauduchon et Ornea [3] et Belgun [1] se sont intéressés à la question. Les premiers ont montré que la réponse est positive pour les surfaces de Hopf, le second qu'elle est négative pour certaines surfaces d'Inoue $X = S^+_{n;p,q,r;t}$ où $t \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$. Dragomir et Ornea quant à eux, posent dans [2] (Chapter 3, p. 28) le problème de l'existence de variétés complexes, non compactes et non kählériennes admettant une métrique l.c.K.

*Adresse e-mail :* renaud@cmi.univ-mrs.fr (J. Renaud).

1631-073X/$ – see front matter © 2004 Académie des sciences. Publié par Elsevier SAS. Tous droits réservés.
doi:10.1016/j.crma.2004.03.032

## 2. La construction

Soient $A = (a_{ij}) \in \mathrm{SL}(n, \mathbb{Z})$ une matrice admettant $n$ valeurs propres $(\lambda_i)_{i=1,\dots,n}$ telles que $\lambda_1 > \cdots > \lambda_{n-1} > 1 > \lambda_n > 0$ et $D$ la matrice logarithme réel de $A$.

Notons $v_j = (v_{1j}, \dots, v_{nj})^t$, $j = 1, \dots, n$, des vecteurs propres réels associés aux $\lambda_j$, $P = (v_{ij})_{i,j}$ et $Q = (q_{ij})_{i,j}$ sa matrice inverse. Soit $V$ le domaine de $\mathbb{C}^n$ défini par

$$V := \left\{ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i \mid \alpha_i \in \mathbb{C} \text{ et } \Im\mathrm{m}\, \alpha_i > 0 \text{ pour } i = 1, \dots, n-1 \right\} \simeq \mathbb{H}^{n-1} \times \mathbb{C}.$$

Pour $K = \mathbb{Z}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$, nous définissons $G_K$ le groupe $K \times K^n$ muni de la loi de composition interne :

$$(z, b) \cdot (z_0, b_0) = \left(z + z_0, \mathrm{e}^{z_0 D} b + b_0\right),$$

ou encore en l'écrivant dans la base des $v_j$ avec $\rho_i := \ln \lambda_i$

$$(z, b_1, \dots, b_n) \cdot (\omega, \beta_1, \dots, \beta_n) = \left(z + \omega, \mathrm{e}^{\omega\rho_1} b_1 + \beta_1, \dots, \mathrm{e}^{\omega\rho_n} b_n + \beta_n\right).$$

Le domaine $\widetilde{\Omega} := \mathbb{C} \times V$ dans $G_{\mathbb{C}}$ est invariant à droite par l'action de $G_{\mathbb{R}}$.

Cela nous permet de considérer $\Omega := \widetilde{\Omega}/G_{\mathbb{Z}} \hookrightarrow G_{\mathbb{C}}/G_{\mathbb{Z}}$.

En outre, en considérant l'application exponentielle suivante :

$$\begin{aligned} \exp : \mathbb{C}^n &\to (\mathbb{C}^*)^n \\ (z_1, \dots, z_n) &\mapsto \left(\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi z_1}, \dots, \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi z_n}\right) \end{aligned}$$

nous pouvons définir de façon équivalente $\Omega$ comme étant le quotient de $\mathbb{C} \times \mathcal{R} := \mathbb{C} \times \exp(V)$ par le groupe engendré par l'automorphisme $\widetilde{g_A}$

$$(z, w_1, \dots, w_n) \overset{\widetilde{g_A}}{\mapsto} \left(z + 1, w_1^{a_{11}} w_2^{a_{12}} \cdots w_n^{a_{1n}}, \dots, w_1^{a_{n1}} w_2^{a_{n2}} \cdots w_n^{a_{nn}}\right).$$

Nous avons deux réalisations de la variété dépendant de la base choisie. Dans la première, les directions propres sont explicites, l'action de $G_{\mathbb{Z}}$ moins. C'est cette représentation qui sera utilisée dans la troisième partie de la note.

En revanche, dans la seconde, les directions propres n'apparaissent pas explicitement mais l'action de $G_{\mathbb{Z}}$ est très simple. Nous utiliserons cette représentation dans la seconde partie.

Une seconde classe de variétés apparaît au cours de la construction de $\Omega$ : la variété $\mathcal{R}/\langle g_A \rangle$ où $g_A$ est la restriction de $\widetilde{g_A}$ à $\mathcal{R}$.

## 3. Les variétés sont l.c.K

**Proposition 3.1.** *Les variétés $\Omega$ et $\mathcal{R}/\langle g_A \rangle$ admettent une métrique localement conformément kählérienne.*

**Démonstration.** Nous rappelons qu'une variété complexe $X$ est localement conformément kählérienne si et seulement s'il existe une forme kählérienne $\widetilde{\omega}$ sur le revêtement universel $\widetilde{X}$ et une représentation $\theta : \pi_1(X) \to \mathbb{R}_+^*$ tels que $\gamma^* \widetilde{\omega} = \theta(\gamma) \widetilde{\omega}$ pour tout $\gamma \in \pi_1(X)$ (voir [2], p. 5). Le but est donc de définir de telles formes kählériennes tordues sur $\widetilde{\Omega}$ et $\mathcal{R}$. Considérons les fonctions $\varphi_i$ définies sur $\mathcal{R}$ par :

$$\varphi_i(w) := \sum_{j=1}^{n} q_{ij} \ln|w_j|.$$

Les propriétés suivantes des $\varphi_i$ sont des conséquences immédiates de la construction :

(i) $\varphi_i$ est pluriharmonique pour $i = 1, \dots, n$ ;

(ii) pour $i = 1, \ldots, n-1$, la fonction $\varphi_i$ est à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$ et pour $i = n$, la fonction $\varphi_n$ est à valeurs dans $\mathbb{R}$ ;
(iii) sous l'action de $g_A$, nous avons $\varphi_i \circ g_A = \lambda_i \varphi_i$ ;
(iv) $\mathrm{d}\varphi_i$ ne s'annule pas pour $i = 1, \ldots, n$.

Soit la fonction $\varphi$ donnée par $\varphi := \sum_{i=1}^{n-1} \varphi_i^{r_i} + \varphi_n^2$ où les $r_i$ sont choisis tels que

$$\lambda_1^{r_1} = \cdots = \lambda_{n-1}^{r_{n-1}} = \lambda_n^2 =: \lambda.$$

En particulier, les $r_i$ sont strictement négatifs. $\varphi$ est strictement plurisousharmonique et sous l'action de $g_A$, $\varphi \circ g_A = \lambda\varphi$. La forme $\omega := \sqrt{-1}\,\partial\bar\partial\varphi$ est une forme kählérienne qui vérifie $g_A^*\omega = \lambda\omega$. La variété $\mathcal{R}/\langle g_A\rangle$ est donc l.c.K.

Il en est de même pour la variété $\Omega$. Définissons $\widetilde{\omega}$ par $\widetilde{\omega} := \omega + \sqrt{-1}\,\mathrm{e}^{\alpha(z+\bar z)}\,\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}\bar z$ où $\alpha$ est une constante à déterminer :

$$\begin{aligned}
\widetilde{g_A}^*\widetilde{\omega} &= g_A^*\omega + \sqrt{-1}\,\mathrm{e}^{\alpha(z+\bar z+2)}\,\mathrm{d}(z+1) \wedge \mathrm{d}(\bar z+1) \\
&= \lambda\omega + \sqrt{-1}\,\mathrm{e}^{2\alpha}\,\mathrm{e}^{\alpha(z+\bar z)}\,\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}\bar z \\
&\overset{\mathrm{e}^{2\alpha}:=\lambda}{=} \lambda\widetilde{\omega}.
\end{aligned}$$

En conclusion, $\Omega = (\mathbb{C} \times \mathcal{R})/\langle \tilde{g_A}\rangle$ est l.c.K.

## 4. Les variétés ne sont pas kählériennes

**Lemme 4.1.** *Il n'existe pas de fonction strictement plurisousharmonique sur $\widetilde{\Omega}$, invariante à droite par $G_{\mathbb{R}}$.*

**Démonstration.** La démonstration reprend les résultats de Loeb ([4], pp. 73–75, Proposition 3) que nous appliquerons une fois que nous nous serons ramenés à un problème en dimension 2. Considérons les sous-groupes $H_{\mathbb{C}}$ et $H_{\mathbb{R}}$ de $G_{\mathbb{C}}$ et $G_{\mathbb{R}}$ respectivement, donnés par :

$$\begin{aligned}
H_{\mathbb{C}} &:= \bigl\{(z, 0, \ldots, 0, b) \mid (z, b) \in \mathbb{C}^2\bigr\}, \\
H_{\mathbb{R}} &:= \bigl\{(\omega, 0, \ldots, 0, \beta) \mid (\omega, \beta) \in \mathbb{R}^2\bigr\}.
\end{aligned}$$

Il est facile de vérifier que $H_{\mathbb{C}}$ est invariant par l'action à droite de $H_{\mathbb{R}}$.

Soient $a$ l'élément de $\widetilde{\Omega}$ de la forme $(0, \mathrm{i}, \ldots, \mathrm{i}, 0)$ et $a.H_{\mathbb{C}}$ l'ensemble :

$$a.H_{\mathbb{C}} = \bigl\{\bigl(z, \mathrm{e}^{z\rho_1}\mathrm{i}, \ldots, \mathrm{e}^{z\rho_{n-1}}\mathrm{i}, b\bigr) \mid (z, b) \in \mathbb{C}^2\bigr\}$$

$(z, \mathrm{e}^{z\rho_1}\mathrm{i}, \ldots, \mathrm{e}^{z\rho_{n-1}}\mathrm{i}, b)$ appartient à $\widetilde{\Omega}$ si et seulement si $\Im\mathrm{m}\, z\rho_j \in \left]-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right[$ pour $j = 1, \ldots, n-1$. Comme $\rho_1 > \cdots > \rho_{n-1}$, la condition est équivalente à $\Im\mathrm{m}\, z\rho_1 \in \left]-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right[$ . Nous définissons le sous-ensemble $\Lambda$ de $G_{\mathbb{C}}$ de dimension 2 comme étant la composante connexe :

$$\Lambda := \left\{\bigl(z, \mathrm{e}^{z\rho_1}\mathrm{i}, \ldots, \mathrm{e}^{z\rho_{n-1}}, b\bigr) \,\middle|\, b \in \mathbb{C},\ \Im\mathrm{m}\, z \in \rho_1^{-1}\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\right\}.$$

$\Lambda$ est invariant par l'action à droite de $H_{\mathbb{R}}$ puisque $\widetilde{\Omega}$ et $a.H_{\mathbb{C}}$ le sont. Grâce au diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
(z, b) \arrow[r] \arrow[d, "\substack{\textit{ACTION de}\\ H_{\mathbb{R}}}"'] & (z, 0, \ldots, 0, b) \arrow[r, "a."] \arrow[d] & (z, \mathrm{e}^{z\rho_1}\mathrm{i}, \ldots, \mathrm{e}^{z\rho_{n-1}}\mathrm{i}, b) \arrow[d, "\substack{\textit{ACTION de}\\ (\omega,0,\ldots,0,\beta)\in H_{\mathbb{R}}}"] \\
(z+\omega, \mathrm{e}^{\omega\rho_n} b + \beta) \arrow[r] & (z+\omega, 0, \ldots, 0, \mathrm{e}^{\omega\rho_n} b + \beta) \arrow[r] & (z+\omega, \mathrm{e}^{\eta\rho_1}\mathrm{i}, \ldots, \mathrm{e}^{\eta\rho_{n-1}}\mathrm{i}, \mathrm{e}^{\omega\rho_n} b + \beta)
\end{tikzcd}$$

nous sommes ramenés à un problème de dimension 2 sur la bande

$$\left\{(z,b)\in\mathbb{C}^2 \;\middle|\; \Im\mathrm{m}\, z\in\rho_1^{-1}\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\right\}:=B,$$

bande pour laquelle l'action de $H_{\mathbb{R}}$ est donnée par $(z,b)\cdot(\omega,\beta)=(z+\omega,\mathrm{e}^{\omega\rho_n}b+\beta)$. La suite de la démonstration utilise les résultats de Loeb.

**Proposition 4.2.** *La variété $\Omega$ n'est pas kählérienne.*

**Démonstration.** On combine la démonstration du Théorème 5, p. 95 et de la Proposition 12, p. 96 [4]. En raisonnant par l'absurde et en supposant que $\Omega$ est kählérienne, nous pouvons construire par intégration une métrique kählérienne $\widetilde{\omega}$ sur $\widetilde{\Omega}$ invariante à droite par $G_{\mathbb{R}}$. En restreignant le problème à la dimension 2, nous avons donc une métrique kählérienne $\widehat{\omega}$ sur $B$, invariante à droite par $H_{\mathbb{R}}$. Mais ceci est impossible sinon l'on pourrait construire une fonction strictement plurisousharmonique invariante.

## 5. Applications

Nous finissons en donnant deux exemples, en dimensions 2 et 3, de matrices vérifiant les propriétés initiales. En dimension 2, en considérant une matrice $A\in\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ ayant une trace strictement supérieure à 2 (les valeurs propres sont strictement positives, une est strictement supérieure à 1, l'autre strictement inférieure) et en suivant la construction donnée ci-dessus, nous obtenons une surface d'Inoue–Hirzebruch $S$ privée de ses courbes rationnelles $D$. Ce qui précède nous permet de conclure que la variété complexe, non compacte $S\backslash D$ est l.c.K mais non kählérienne.

En dimension 3, l'extension de corps $K=\mathbb{Q}(\alpha)$ où $\alpha^3-4\alpha+1=0$ nous donne deux matrices $A$ et $B$ ayant les propriétés requises :

$$A=\begin{pmatrix}0&0&1\\-1&4&0\\0&-1&4\end{pmatrix}\quad\text{et}\quad B=\begin{pmatrix}2&-1&0\\0&2&-1\\1&-4&2\end{pmatrix}.$$

Les valeurs propres de $A$ valent approximativement 0.064, 3.46, 4.47 et celles de $B$ 0.14, 1.75, 4.11.

## Références


[1] F. Belgun, On the metric structure of non-kähler complex surfaces, Math. Ann. 317 (2000) 1–40.

[2] S. Dragomir, L. Ornea, Locally Conformally Kähler Manifold, Birkhäuser, 1998.

[3] P. Gauduchon, L. Ornea, Locally conformally Kähler metrics on Hopf surfaces, Ann. Inst. Fourier 48 (4) (1998) 1107–1127.

[4] J.J. Loeb, Action d'une forme réelle d'un groupe de Lie complexe sur les fonctions plurisousharmoniques, Ann. Inst. Fourier 35 (4) (1985) 59–97.