



ELSEVIER

Available online at [www.sciencedirect.com](http://www.sciencedirect.com)

SCIENCE @ DIRECT®

C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 338 (2004) 91–96



## Automatique théorique

# Reconstructeurs d'état

Michel Fliess<sup>a</sup>, Hebertt Sira-Ramírez<sup>b</sup>

<sup>a</sup> *Laboratoire STIX, École polytechnique, 91128 Palaiseau, France*

<sup>b</sup> *Departamento de Ingeniería Eléctrica, Sección de Mecatrónica, Cinvestav-IPN, Avenida IPN No. 2508, Colonia San Pedro Zacatenco, AP 14740, 07300 México, D.F., Mexique*

Reçu le 12 mars 2003 ; accepté après révision le 4 novembre 2003

Présenté par Yves Meyer

---

### Résumé

Contrairement aux filtres de Kalman et aux observateurs asymptotiques, les *reconstructeurs d'état* ne nécessitent pas l'intégration d'équations différentielles. Ils éliminent les perturbations structurées et sont robustes pour des bruits aux propriétés statistiques mal connues. Les techniques sont, avant tout, d'ordre algébrique. **Pour citer cet article :** *M. Fliess, H. Sira-Ramírez, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 338 (2004).*

© 2003 Académie des sciences. Publié par Elsevier SAS. Tous droits réservés.

### Abstract

**State reconstructors.** In contrast to Kalman filters and asymptotic observers, the *state reconstructors* do not need the integration of differential equations. They eliminate structured perturbations and are robust with respect to noises without any precise knowledge of their statistical properties. The techniques used are, primarily, of algebraic nature. **To cite this article:** *M. Fliess, H. Sira-Ramírez, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 338 (2004).*

© 2003 Académie des sciences. Publié par Elsevier SAS. Tous droits réservés.

---

### Abridged English version

#### Introduction

Although Kalman filters [7] and asymptotic observers [8] are playing a key rôle, several difficulties are still persistent with respect to the tuning (gain schedule), the numerical analysis (Riccati's equation), and the sensitivity to perturbations. Our *reconstructors*, which are extending recent past works [4,6], are yielding estimations which do not necessitate the integration of any differential equation. Those estimates, which are eliminating structured perturbations, are also remarkably robust with respect to noises without any precise knowledge of their statistical properties. The techniques used are, primarily, of algebraic nature and are stemming from [4,6]. The robustness analysis is inspired from classical averaging techniques [2].

---

Adresses e-mail : [Michel.Fliess@stix.polytechnique.fr](mailto:Michel.Fliess@stix.polytechnique.fr) (M. Fliess), [hsira@mail.cinvestav.mx](mailto:hsira@mail.cinvestav.mx) (H. Sira-Ramírez).

### Theoretical background

We are utilising, with the same notations, the mathematical tools of [4,6], i.e., module theory and operational calculus in Mikusiński's setting [10,11].

*Identifiability of the state.* A linear system is a finitely generated, free  $\mathbb{C}[s]$ -module. By extending the ring of scalars to the ring  $\mathbb{C}(s)[\frac{d}{ds}]$  of linear differential operators with rational coefficients, we obtain a finitely generated left  $\mathbb{C}(s)[\frac{d}{ds}]$ -module where we have distinguished a finite set  $\boldsymbol{\pi} = (\pi_1, \dots, \pi_q)$  of perturbations. The initial state  $\boldsymbol{x}(0)$  is *linearly identifiable*, i.e., Eq. (2) holds, if, and only if, the system is observable.

### Structured perturbations

Assume that  $\pi_1, \dots, \pi_{q'}, 0 \leq q' \leq q$ , are

- *structured*, i.e.,  $\text{span}_{\mathbb{C}(s)[d/ds]}(\pi_1, \dots, \pi_{q'})$  is a torsion module,
- *compatible* with  $x_i(0)$ , i.e., Eq. (3) holds.

Eq. (3) yields *state reconstructors*.

### Unstructured noises

*Ergodicity.* Assume that any component  $\pi_\kappa, \kappa = q' + 1, \dots, q$ , of the unstructured noise satisfies the following conditions:

- There exists an integer  $\alpha \geq 0$  such that  $w_\kappa = \pi_\kappa/s^\alpha$  is a locally Lebesgue-integrable function, with a left bounded support.
- $w_\kappa$  satisfies the ergodic property  $\lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_0^T w_\kappa(t) dt = 0$ .

There exists then a reconstructor such that Proposition 4.1 holds true, i.e., the estimate is obtained asymptotically over a *large* time interval.

*High frequency.* Any component  $\pi_\kappa$  is a bounded locally Lebesgue-integrable function  $n : (-\infty, +\infty) \rightarrow \mathbb{C}$ , with a left bounded support, such that there exists a constant  $\Omega \gg 1$ , verifying  $|\int_{t_1}^{t_2} n(\tau) d\tau| = \mathcal{O}(\frac{1}{\Omega})$ . Proposition 4.2 holds true for a suitable reconstructor, i.e., an estimate may be obtained over an arbitrary *short* time interval.

**Remark 1.** This justification of robustness seems closer to experimental evidence than the one provided by ergodicity.

### Example

We want to determine  $\dot{y}(t)$  and  $\ddot{y}(t)$  for system  $y^{(3)} = u + \xi + \nu$ , where  $\xi$  is an unknown constant perturbation, and  $\nu$  a “non-classic” random noise. Fig. 1 shows excellent simulation results.

## 1. Introduction

Bien que filtres de Kalman [7] et observateurs asymptotiques [8] jouent un rôle considérable (voir, par exemple, [1] et sa bibliographie), diverses difficultés persistent quant au réglage (détermination du gain), au calcul numérique (équation de Riccati) et à la sensibilité aux perturbations. Les *reconstructeurs*, proposés ici, qui continuent des travaux récents (voir [4,6]), fournissent une estimation qui

- n'exige plus l'intégration d'équations différentielles,

- élimine les perturbations structurées,
- présente une remarquable robustesse par rapport aux bruits, dont il n'est plus nécessaire de connaître les propriétés statistiques.

Les méthodes utilisées, de nature algébrique, proviennent de [4,6]. L'analyse de la robustesse est inspirée des techniques usuelles de moyennisation des systèmes dynamiques en physique mathématique (voir, par exemple, [2]).

L'ensemble formé par cette Note et [3,4,6] offre une vision renouvelée de l'automatique linéaire, qui a déjà connu plusieurs illustrations concrètes. On trouve en [5] des extensions au traitement de signal.

## 2. Cadre mathématique

### 2.1. Systèmes

Soit  $\mathbb{C}[s]$  l'anneau principal de polynômes sur le corps  $\mathbb{C}$  des complexes, en l'indéterminée  $s$ . Un *système linéaire* [4] est un  $\mathbb{C}[s]$ -module libre  $\Lambda$ , de type fini. Distinguons-y un ensemble  $\underline{\pi} = (\pi_1, \dots, \pi_q)$  de *perturbations*. Soit  $\Lambda^{\text{nom}} = \Lambda / \text{span}_{\mathbb{C}[s]}(\underline{\pi})$  le système *nominal*. Écrivons  $\lambda^{\text{nom}} \in \Lambda^{\text{nom}}$  l'image canonique de tout élément  $\lambda \in \Lambda$ . Le système  $\Lambda$  est dit *commandable* si, et seulement si, le module  $\Lambda^{\text{nom}}$  est libre.

Une *dynamique linéaire* est un système  $\Lambda$  muni d'une *commande*, c'est-à-dire une partie finie  $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_m)$  de  $\Lambda$ , tel que le module quotient  $\Lambda^{\text{nom}} / \text{span}_{\mathbb{C}[s]}(\mathbf{u}^{\text{nom}})$  est de torsion, et  $\text{span}_{\mathbb{C}[s]}(\mathbf{u}) \cap \text{span}_{\mathbb{C}[s]}(\underline{\pi}) = \{0\}$ . Un *système entrée-sortie* est une dynamique linéaire  $\Lambda$  munie d'une *sortie*, c'est-à-dire une partie finie  $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_p)$  de  $\Lambda$ . Dorénavant,  $\Lambda$  sera un système entrée-sortie. Il est dit *observable* si, et seulement si,  $\Lambda^{\text{nom}} = \text{span}_{\mathbb{C}[s]}(\mathbf{u}^{\text{nom}}, \mathbf{y}^{\text{nom}})$ . Il existe [4] une représentation d'état, dite *kalmanienne*,

$$s \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + B \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_m \end{pmatrix} + \Pi \begin{pmatrix} \pi_1 \\ \vdots \\ \pi_r \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_p \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + D_0 \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_m \end{pmatrix} + \Omega \begin{pmatrix} \pi_1 \\ \vdots \\ \pi_r \end{pmatrix}, \quad (1)$$

où  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ ,  $B \in \mathbb{C}^{n \times m}$ ,  $C \in \mathbb{C}^{p \times n}$ ,  $D_0 \in \mathbb{C}[s]^{p \times m}$ ,  $\Pi \in \mathbb{C}[s]^{n \times r}$ ,  $\Omega \in \mathbb{C}[s]^{p \times r}$ . On supposera dorénavant, pour simplifier, (1) *propre*, c'est-à-dire  $D_0 \in \mathbb{C}^{p \times m}$ .

### 2.2. Trajectoires

Soit  $\mathcal{M}$  le *corps de Mikusiński*, engendré par les *opérateurs* de Mikusiński [10,11], pris, ici, comme  $\mathbb{C}[s]$ -module. Alors,  $\text{Hom}(\Lambda, \mathcal{M})$  (resp.  $\text{Hom}(\Lambda^{\text{nom}}, \mathcal{M})$ ) désigne les  $\mathcal{M}$ -*trajectoires* (resp.  $\mathcal{M}$ -*trajectoires nominales*) de  $\Lambda$  (resp.  $\Lambda^{\text{nom}}$ ).

### 2.3. Algèbre non commutative et perturbations structurées

Soient  $\mathbb{C}(s)$  le corps de fractions de  $\mathbb{C}[s]$ , et  $\frac{d}{ds}$  la *dérivation algébrique* [10,11]. Rappelons [9] que l'anneau non commutatif  $\mathbb{C}(s)[\frac{d}{ds}]$  est principal à gauche et à droite. Soit  $\Lambda_{\mathbb{C}(s)[\frac{d}{ds}]} = \mathbb{C}(s)[\frac{d}{ds}] \otimes_{\mathbb{C}[s]} \Lambda$  le  $\mathbb{C}(s)[\frac{d}{ds}]$ -module à gauche, obtenu par extension des scalaires à l'anneau  $\mathbb{C}(s)[\frac{d}{ds}]$  des opérateurs différentiels linéaires  $\sum_{\text{fini}} \gamma_v \frac{d^v}{ds^v}$ , à coefficients rationnels  $\gamma_v \in \mathbb{C}(s)$ . Pour introduire des perturbations particulières, définissons un système  $\mathbf{L} = \Lambda_{\mathbb{C}(s)[\frac{d}{ds}]} / \mathbf{M}$  comme un  $\mathbb{C}(s)[\frac{d}{ds}]$ -module à gauche de type fini, où  $\mathbf{M}$  est un sous-module de  $\text{span}_{\mathbb{C}(s)[\frac{d}{ds}]}(\underline{\pi})$ . Appelons encore *perturbation* toute composante de  $\boldsymbol{\pi} = (\pi_1, \dots, \pi_q) \subset \mathbf{L}$ , image canonique de  $\underline{\pi}$ . Une perturbation  $\pi_\varepsilon$ ,  $\varepsilon = 1, \dots, q$ , est dite *structurée* si, et seulement si, le module  $\text{span}_{\mathbb{C}(s)[\frac{d}{ds}]}(\pi_\varepsilon)$  est de torsion.

### 3. Reconstructeurs d'états

#### 3.1. Identifiabilité de l'état initial

Les propriétés classiques du calcul opérationnel permettent d'introduire l'état initial  $\mathbf{x}(0) = (x_1(0), \dots, x_n(0))$  de (1). Le résultat essentiel suivant s'obtient par élimination.

**Théorème 3.1.** *Si (1) est observable, toute composante de  $\mathbf{x}(0)$  est linéairement identifiable [6] :*

$$x_i(0) \in \text{span}_{\mathbb{C}(s)[d/ds]}(\mathbf{u}, \mathbf{y}, \boldsymbol{\pi}). \quad (2)$$

#### 3.2. Définition des reconstructeurs

Supposons structurées les perturbations  $\pi_\varepsilon, \varepsilon = 1, \dots, q', 0 \leq q' \leq q$ . On les supposera dorénavant *compatibles* avec  $x_i(0)$ , c'est-à-dire :

$$x_i(0) \in \text{span}_{\mathbb{C}(s)[d/ds]}(\mathbf{u}, \mathbf{y}, \pi_{q'+1}, \dots, \pi_q). \quad (3)$$

On obtient (3) en multipliant les deux termes de (2) par un opérateur  $\sum_{\text{fini}} \gamma_\nu \frac{d^\nu}{ds^\nu}$  d'ordre nul, tel que  $\gamma_0 \neq 0$ . Le résultat suivant, où  $\mathbb{C}[s, \frac{d}{ds}]$  désigne l'algèbre de Weyl des opérateurs différentiels à coefficients polynômiaux  $\sum_{\text{fini}} \delta_\nu \frac{d^\nu}{ds^\nu}, \delta \in \mathbb{C}[s]$ , est facile.

**Proposition 3.2.** *Il existe un polynôme  $\varpi_i \in \mathbb{C}[s]$ , de degré minimal, unique à une multiplication près par une constante non nulle, tel que*

$$\varpi_i x_i(0) \in \text{span}_{\mathbb{C}[s, d/ds]}(\mathbf{u}, \mathbf{y}, \pi_{q'+1}, \dots, \pi_q). \quad (4)$$

L'expression de  $\varpi_i x_i(0)$  dans  $\text{span}_{\mathbb{C}[s, d/ds]}(\mathbf{u}, \mathbf{y}, \pi_{q'+1}, \dots, \pi_q)$  est appelée *reconstructeur primitif de l'état*  $x_i(0)$ . Toute expression obtenue en multipliant les deux membres de (4) par un élément de  $\mathbb{C}(s)[\frac{d}{ds}]$ , qui n'annule pas le premier, est appelée *reconstructeur d'état*.

#### 3.3. Propriété des reconstructeurs

Une fraction rationnelle de  $\mathbb{C}(s)$  est dite *propre* (resp. *strictement propre*) si, et seulement si, le degré du numérateur est inférieur (resp. strictement inférieur) à celui du dénominateur. Un élément  $\sum_{\text{fini}} \gamma_\nu \frac{d^\nu}{ds^\nu}$  de  $\mathbb{C}(s)[\frac{d}{ds}]$  est dit (strictement) *propre* si, et seulement si, les  $\gamma_\nu$  le sont. Un reconstructeur d'état  $\varrho x_i(0) \in \text{span}_{\mathbb{C}(s)[d/ds]}(\mathbf{u}, \mathbf{y}, \pi_{q'+1}, \dots, \pi_q)$  où  $\varrho \in \mathbb{C}(s)$ , est dit (strictement) *propre* si, et seulement si,  $\varrho$  et les opérateurs différentiels du terme à gauche le sont. Le résultat suivant est facile.

**Proposition 3.3.** *On peut obtenir des reconstructeurs d'état (strictement) propres.*

### 4. Bruits non structurés

Contrairement à l'ergodicité, qui fournit une justification asymptotique pour un intervalle de temps *grand*, celle due à la haute fréquence semble plus proche de la pratique.

#### 4.1. Ergodicité

Toute composante non structurée  $\pi_\kappa, \kappa = q' + 1, \dots, q$ , est supposée satisfaire les conditions suivantes :

- Il existe un entier  $\alpha \geq 0$  tel que  $w_\kappa = \pi_\kappa/s^\alpha$  est une fonction localement Lebesgue-intégrable, à support limité à gauche.
- $w_t$  vérifie la propriété ergodique  $\lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_0^T w_\kappa(t) dt = 0$ .

Alors,

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T^{\mu+\nu+1}} \int_0^T \int_0^t \int_0^{t_\nu} \dots \int_0^{t_1} t_0^\mu w_\kappa(t_0) dt dt_\nu \dots dt_1 = 0.$$

Il existe un entier  $\alpha_0 \geq 0$  tel que, en multipliant les deux membres de (4) par  $s^{-\alpha}$ ,  $\alpha \geq \alpha_0$ , et pour toute commande  $u : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{C}^m$  continue, à support dans  $[0, +\infty[^m$ , on puisse passer au *temporel*, c'est-à-dire considérer les éléments comme fonctions  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ . Notons  $\mathcal{R}_\alpha^{[0,t]}(x_t(0))$  la valeur numérique obtenue par ce reconstruteur sur l'intervalle  $[0, t]$ . Il vient :

**Proposition 4.1.**  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \mathcal{R}_\alpha^{[0,t]}(x_t(0)) = x_t(0)$ .

Si les  $\pi_\kappa$  sont, comme il est usuel en théorie, des bruits blancs gaussiens, débutant à  $t = 0$ ,  $w_\kappa = \pi_\kappa/s$  est un processus brownien. Presque sûrement ses trajectoires sont continues et vérifient la propriété d'ergodicité.

#### 4.2. Haute fréquence

Toute composante  $\pi_\kappa$  est une fonction bornée  $n : ]-\infty, +\infty[ \rightarrow \mathbb{C}$ , localement Lebesgue-intégrable, à support limité à gauche, telle qu'il existe une constante  $\Omega \gg 1$ , vérifiant  $|\int_{t_1}^{t_2} n(\tau) d\tau| = \mathcal{O}(1/\Omega)$ . Il vient, avec un reconstruteur construit comme celui de la Proposition 4.1,

**Proposition 4.2.** Pour tout  $t \geq 0$ ,  $\mathcal{R}_\alpha^{[0,t]}(x_t(0)) = x_t(0) + \mathcal{O}(1/\Omega)$ .

Il convient de prendre  $\Omega$  comme un analogue d'une *haute fréquence*, par exemple,

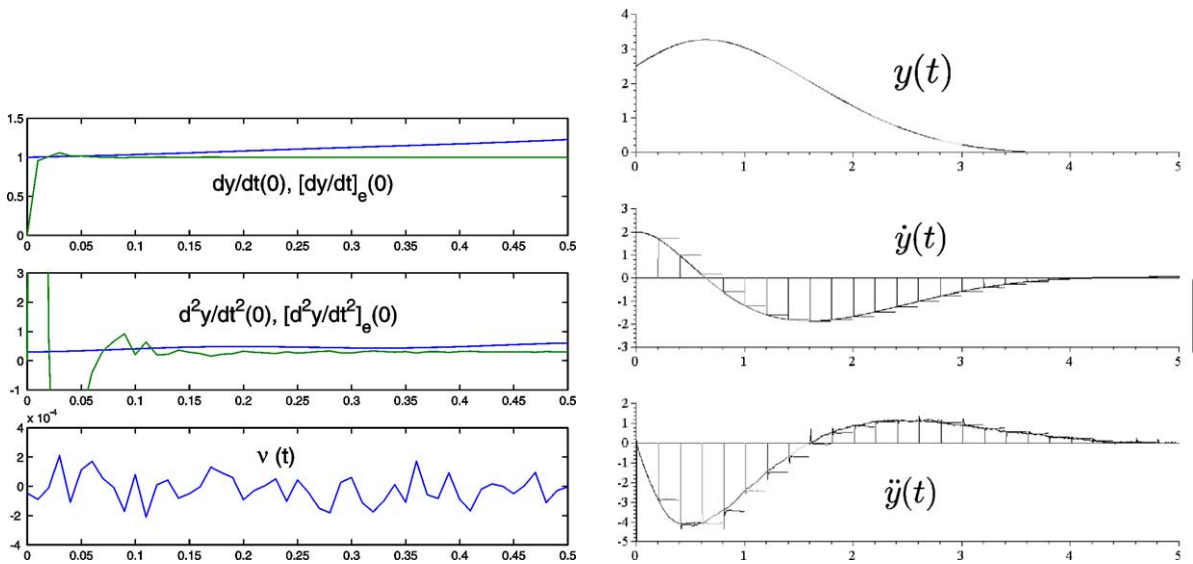
$$n(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0, \\ \sin(\Omega t + \varphi) & \text{si } t \geq 0. \end{cases}$$

### 5. Example

Considérons le système  $y^{(3)}(t) = u(t) + \xi + \nu$ , où  $\xi$  est une perturbation constante, de grandeur inconnue,  $\nu$  un bruit aléatoire centré, uniformément distribué à chaque instant dans l'intervalle  $[-0,5; 0,5]$  (ce type de bruit n'est pas traité dans les filtres de Kalman). On désire déterminer, grâce aux mesures de la commande  $u(t)$  et de la sortie  $y(t)$ , les dérivées  $\dot{y}(t)$  et  $\ddot{y}(t)$ . Il vient

$$\begin{bmatrix} \frac{(t-t_0)^3}{6} & (t-t_0)^2 \\ 0 & \frac{(t-t_0)^3}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{y}(t_0) \\ \dot{y}(t_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\int_{t_0}^{(3)} (t-t_0)u) - (\int_{t_0}^{(4)} u) - (t-t_0)y(t) + 4(\int_{t_0} y) - 3(t-t_0)y(t_0) \\ \left\{ \begin{array}{l} 2(\int_{t_0}^{(4)} (t-t_0)u) - (\int_{t_0}^{(3)} (t-t_0)^2 u) + (t-t_0)^2 y(t) \\ -8(\int_{t_0} (t-t_0)y) + 12(\int_{t_0}^{(2)} y) - 3(t-t_0)^2 y(t_0) \end{array} \right\} \end{bmatrix},$$

où  $\int_{t_0}^{(v)}$  désigne l'intégrale itérée  $\int_{t_0}^t \int_{t_0}^{\tau_{v-1}} \dots \int_{t_0}^{\tau_1}$ . On obtient  $\dot{y}(t_0)$  et  $\ddot{y}(t_0)$  sur un intervalle  $[t_0, t_0 + \varepsilon]$ ,  $\varepsilon > 0$ , aussi *petit* soit  $\varepsilon$ . Ces calculs sont donc répétables *en ligne*. Pour les simulations,  $\xi = -0,5$ ,  $\dot{y}(0) = 1,5$ ,  $\ddot{y}(0) = 0$ ,  $\varepsilon = 0,1$ . La figure montre que les estimées de  $\dot{y}(t)$  et  $\ddot{y}(t)$  sont excellentes.

Fig. 1. Estimées de  $\dot{y}(t)$  et  $\ddot{y}(t)$ .Fig. 1. Estimates of  $\dot{y}(t)$  and  $\ddot{y}(t)$ .

## Remerciements

Ce travail bénéficie de l'action spécifique *Méthodes algébriques pour les systèmes de communications numériques* (CNRS, RTP 24) et du projet de recherche *Conacyt 42231-Y* (Mexique). Un des auteurs (HSR) remercie le Laboratoire STIX de l'École polytechnique pour son hospitalité.

## Références

- [1] B. d'Andréa Novel, M. Cohen de Lara, *Commande linéaire des systèmes dynamiques*, Masson, Paris, 1983.
- [2] V. Arnold, *Les méthodes mathématiques de la mécanique classique* (traduit du russe), MIR, Moscou, 1976.
- [3] M. Fliess, R. Marquez, Continuous-time linear predictive control and flatness: a module-theoretic setting with examples, *Internat. J. Control* 73 (2000) 606–623.
- [4] M. Fliess, R. Marquez, E. Delaleau, H. Sira-Ramírez, Correcteurs proportionnels intégraux généralisés, *ESAIM Control Optim. Calc. Var.* 7 (2002) 23–41.
- [5] M. Fliess, M. Mboup, H. Mounier, H. Sira-Ramírez, Questioning some paradigms of signal processing via concrete examples, in: *Proc. 1st Workshop Algebraic Methods Flatness Signal Process. State Estim.*, CINVESTAV-IPN, México, D.F., 2003.
- [6] M. Fliess, H. Sira-Ramírez, An algebraic framework for linear identification, *ESAIM Control Optim. Calc. Var.* 9 (2003) 151–168.
- [7] R.E. Kalman, R.S. Bucy, New results in linear filtering and prediction, *J. Basic Engrg. (Trans. ASME Ser. D)* 83 (1961) 95–107.
- [8] D.G. Luenberger, An introduction to observers, *IEEE Trans. Automat. Control* 16 (1971) 596–603.
- [9] J.C. McConnell, J.C. Robson, *Noncommutative Noetherian Rings*, American Mathematical Society, Providence, RI, 2000.
- [10] J. Mikusiński, *Operational Calculus*, vol. 1, 2nd edition, PWN & Oxford University Press, Varsovie & Oxford, 1983.
- [11] J. Mikusiński, T.K. Boehme, *Operational Calculus*, vol. 2, 2nd edition, PWN & Oxford University Press, Varsovie & Oxford, 1987.