Available online at www.sciencedirect.com
SCIENCE DIRECT®
C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 337 (2003) 603–608
COMPTES RENDUS MATHEMATIQUE

Probabilités

Normalisation d'un processus de branchement critique dans un environnement aléatoire

Yves Guivarc'h [a], Emile Le Page [b], Quansheng Liu [b,*,1]

[a] IRMAR, Université de Rennes I, campus de Beaulieu, 35042 Rennes, France
[b] L.M.A.M., Université de Bretagne Sud, campus de Tohannic, BP 573, 56017 Vannes, France

Reçu le 21 juillet 2003 ; accepté le 30 août 2003

Présenté par Jean-Pierre Kahane

Résumé

Soit (Z_n) un processus de branchement critique dans un environnement aléatoire indépendant et identiquement distribué (i.i.d.). Soit $C_n = E^\omega[Z_n \mid Z_n > 0]$ l'espérance conditionnelle de Z_n sachant $Z_n > 0$, pour un environnement ω fixé. Nous montrons l'analogue de la loi de Yaglom : lorsque $n \to \infty$, la loi conditionnelle de Z_n/C_n, sachant $Z_n > 0$, converge vers une loi non-dégénérée sur $[0, \infty[$. Nous établissons aussi l'analogue de la loi de Kolmogorov, ainsi qu'un théorème de limite locale pour le semi-groupe des fonctions génératrices de probabilités. ***Pour citer cet article : Y. Guivarc'h et al., C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 337 (2003).***

Abstract

Normalization of a critical branching process in a random environment. Let (Z_n) be a critical branching process in an independent and identically distributed (i.i.d.) random environment. For each fixed environment ω, let $C_n = E^\omega[Z_n \mid Z_n > 0]$ be the conditional expectation of Z_n given $Z_n > 0$. We prove an analogue of Yaglom's law: as $n \to \infty$, the conditional law of Z_n/C_n, conditional on $Z_n > 0$, converges to a non-degenerate law on $[0, \infty)$. We give also an analogue of Kolmogorov's law, as well as a local limit theorem for the semi-group of probability generating functions. ***To cite this article: Y. Guivarc'h et al., C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 337 (2003).***

Abridged English version

A branching process (Z_n) in a random environment can be described as follows [2,11]. Let (Θ, p) be a probability space, and $(\Theta^{\mathbb{N}^*}, p^{\mathbb{N}^*}) = (\Omega, \pi)$ the corresponding product space. For a sequence $\omega \in \Omega$, we denote $\omega = (\omega_1, \omega_2, \ldots)$, where ω_k are the kth coordinate functions on Ω. Associated with each $\theta \in \Theta$, there is a probability generating function:

* Auteur correspondant.
Adresses e-mail : guivarch@math.univ-rennes1.fr (Y. Guivarc'h), Emile.Le-Page@univ-ubs.fr (E. Le Page), Quansheng.Liu@univ-ubs.fr (Q. Liu).

[1] En partie soutenu par la « National Natural Science Foundation » de la République Populaire de Chine (bourse 10271020).

1631-073X/$ – see front matter
doi:10.1016/j.crma.2003.08.011

$$f(\theta, s) = \sum_{i=0}^{\infty} p_i(\theta) s^i \quad (0 \leqslant s \leqslant 1),$$

where $p_i(\theta)$ are measurable functions satisfying $p_i(\theta) \geqslant 0$ and $\sum_{i=0}^{\infty} p_i(\theta) = 1$. Given the environment sequence ω, the process (Z_n) is an inhomogeneous Galton–Watson process, whose offspring distributions in $(n-1)$th generation have probability generating functions $f_n(s) := f(\omega_n, s)$ $(n \geqslant 1)$. (Therefore (f_n) is a sequence of i.i.d. random variables with values in the semi-group G of probability generating functions.) Given $\omega \in \Omega$, we denote (Λ, P^ω) the probability space of the corresponding inhomogeneous branching process, and by E^ω the corresponding expectation symbol. Then, we can form the total probability space $(\Omega \times \Lambda, P)$ of the process, where $P = \int \delta_\omega \times P^\omega \, d\pi(\omega)$. The expectation with respect to P or π will be denoted by the same symbol E; there will be no confusion according to context. By definition, for given ω, the process can be expressed as follows:

$$Z_0 = 1 \quad \text{and} \quad Z_n = \sum_{i=1}^{Z_{n-1}} X_{n,i} \quad \text{for } n \geqslant 1, \tag{1}$$

where (under P^ω) $\{X_{n,i}\colon i \geqslant 1\}$ are integer-valued random variables independent of each other and independent of Z_n, and have the same probability generating function f_n; consequently,

$$E^\omega\big[s^{Z_n}\big] = f_1 \circ \cdots \circ f_n(s), \quad s \in [0,1]. \tag{2}$$

We consider the critical case where $E \log f_1'(1) = 0$. In the constant environment case (i.e. $\omega_1 = \omega_2 = \cdots =$ const.) with $f_1''(1) < \infty$, Kolmogorov's law [3] says that $\lim_n nP(Z_n > 0) = 2f_1''(1)$, while Yaglom's law says that the conditional law of $2Z_n/(nf_1''(1))$, given $Z_n > 0$, converges to the exponential law with parameter 1: for all $z > 0$, $\lim_n P(\frac{2Z_n}{n\sigma^2} > z \mid Z_n > 0) = \exp(-z)$. The following is the corresponding result in the random environment case. Notice that in the following theorem the constant environment case is excluded because of the first two conditions on $f_1'(1)$.

Theorem 0.1 (Kolmogorov's law and Yaglom's law). *Let (Z_n) be a branching process in an i.i.d. random environment with $E \log f_1'(1) = 0$, $\pi(f_1'(1) = 1) < 1$, $E[\log f_1'(1)]^2 < \infty$ and $E(f_1''(1)/f_1'(1)^2)^\varepsilon < \infty$ for some $\varepsilon > 0$. Then for some constant $0 < c < \infty$,*

$$\lim_{n\to\infty} n^{1/2} P(Z_n > 0) = c. \tag{3}$$

Setting $C_n = E^\omega(Z_n \mid Z_n > 0)$, the conditional law of Z_n/C_n, given $Z_n > 0$, converges to a probability law $\nu \neq \delta_0$ on $[0,\infty)$ with mean 1 and finite variance. Moreover, the limit law is the exponential law if f_n are linear- fractional generating functions of the form:

$$f_n(s) = 1 - \frac{\alpha_n}{1-\beta_n} + \frac{\alpha_n s}{1-\beta_n s}, \quad 0 \leqslant \alpha_n,\ 0 \leqslant \beta_n < 1,\ \alpha_n + \beta_n \leqslant 1,\ n \geqslant 0. \tag{4}$$

Remark 1. If $C_n = P_n B_n(1)$, where $P_0 = 1$ and, for $n \geqslant 1$, $P_n = f_1'(1) \ldots f_n'(1)$, $B_n(1) = \sum_{k=1}^n P_{k-1}^{-1} b_k(1)$ with $b_k(1) = f_k''(1)/2f_k'(1)^2$, then the conditional law of Z_n/C_n, given $Z_n > 0$, still converges to a non-degenerate probability law on $[0,\infty)$ with finite mean and finite variance, but the mean is not necessarily 1.

We observe that the survival probability $P(Z_n > 0)$ behaves like n^{-1} in the constant environment case, but like $n^{-1/2}$ in the random one. Yaglom's law was also considered in [2] (pp. 1855–1858), but was not made clear. Notice that in the constant environment case, the expression of C_n in the above remark is still valid: it then reduces to the classical norming of Yaglom: $C_n = nf_1''(1)/2$. The result (3) was proved by Geiger and Kersting [5] under the stronger moment conditions that $E[\log f_1'(1)]^2 < \infty$ and $E[\frac{f_1''(1)}{f_1'(1)^2}(1 + \log^+ f_1'(1))] < \infty$. It was first proved by Kozlov [9] in the case where f_n are of the form (4), under almost the same conditions as in the above, but with $\log^+ f_1'(1)$ replaced by $|\log f_1'(1)|$. We deduce our result from a local limit theorem on the semi-group of probability generating functions.

We mention that more general processes and other kind of Yaglom's laws are also considered in [8]. For sub-critical branching processes, we refer to [6,8]. For super-critical branching processes, see [7,8].

1. Introduction et résultats

Un processus de branchement dans un environnement aléatoire, noté (Z_n), peut être décrit de la manière suivante [2,11] : Soient (Θ, p) un espace probabilisé, $(\Theta^{\mathbb{N}^*}, p^{\mathbb{N}^*}) = (\Omega, \pi)$ l'espace produit correspondant. Pour $\omega \in \Omega$, nous notons $\omega = (\omega_1, \omega_2, \ldots)$, où ω_k est la $k$ième coordonnée. A chaque $\theta \in \Theta$ est associée une fonction génératrice de probabilité :

$$f(\theta, s) = \sum_{i=0}^{\infty} p_i(\theta) s^i \quad (0 \leqslant s \leqslant 1),$$

où $p_i(\theta)$ sont des fonctions mesurables vérifiant $p_i(\theta) \geqslant 0$ et $\sum_{i=0}^{\infty} p_i(\theta) = 1$. Lorsque ω est fixé, le processus (Z_n) est un processus de Galton–Watson non-homogène, dont la loi commune de reproduction des individus de la génération $n-1$ est donnée par une fonction génératrice de probabilité $f_n(s) := f(\omega_n, s)$ $(n \geqslant 1)$. (Donc (f_n) est une suite de variables aléatoires i.i.d. à valeurs dans le semi-groupe G des fonctions génératrices de probabilités.) Pour $\omega \in \Omega$ fixé, nous notons (Λ, P^ω) l'espace probabilisé du processus de branchement non-homogène, et E^ω l'espérance conditionnelle correspondante. Ainsi $(\Omega \times \Lambda, P)$ est l'espace probabilisé total du processus (Z_n), où $P = \int \delta_\omega \times P^\omega \, \mathrm{d}\pi(\omega)$. L'espérance par rapport à P ou par rapport à π sera noté E ; il n'y aura pas de confusion compte tenu du contexte. Par définition, pour ω fixé, le processus peut être representé de la manière suivante :

$$Z_0 = 1 \quad \text{et} \quad Z_n = \sum_{i=1}^{Z_{n-1}} X_{n,i} \quad \text{pour } n \geqslant 1, \tag{1}$$

où (sous P^ω) $\{X_{n,i}\colon i \geqslant 1\}$ sont des variables aléatoires entières, mutuellement indépendantes et indépendantes de Z_n, dont la fonction génératrice de probabilité commune est f_n. Par conséquent,

$$E^\omega\big[s^{Z_n}\big] = f_1 \circ \cdots \circ f_n(s), \quad s \in [0,1]. \tag{2}$$

Nous considérons le cas critique où $E \log f_1'(1) = 0$. Dans le cas où l'environnement est constant (i.e. $\omega_n =$ const.) avec $f_1''(1) < \infty$, la loi de Kolmogorov [3] dit que $\lim_n nP(Z_n > 0) = 2 f_1''(1)$; celle de Yaglom dit que la loi conditionnelle de $2Z_n/(nf_1''(1))$, sachant $Z_n > 0$, converge vers la loi exponentielle de paramètre 1 : pour tout $z > 0$, $\lim_n P(\frac{2Z_n}{n\sigma^2} > z \mid Z_n > 0) = \exp(-z)$. Le théorème suivant est le résultat correspondant dans le cas où l'environnement est aléatoire. Nous remarquons que dans l'énoncé suivant le cas d'un environnement constant est exclu à cause des deux premières conditions sur $f_1'(1)$.

Théorème 1.1 (Loi de Kolmogorov et loi de Yaglom). *Soit (Z_n) un processus de branchement dans un environnement i.i.d., avec $E \log f_1'(1) = 0$, $\pi(f_1'(1) = 1) < 1$, $E[\log f_1'(1)]^2 < \infty$ et $E(f_1''(1)/f_1'(1)^2)^\varepsilon < \infty$ pour un certain $\varepsilon > 0$. Alors il existe une constante $0 < c < \infty$ telle que*

$$\lim_{n\to\infty} n^{1/2} P(Z_n > 0) = c. \tag{3}$$

Posant $C_n = E^\omega(Z_n \mid Z_n > 0)$, la loi conditionnelle de Z_n/C_n, sachant $Z_n > 0$, converge vers une loi de probabilité $\nu \neq \delta_0$ sur $[0, \infty[$ avec moyenne 1 et variance finie. De plus, la loi limite est la loi exponentielle de paramètre 1 dans le cas (dit géométrique) où f_n est de la forme :

$$f_n(s) = 1 - \frac{\alpha_n}{1-\beta_n} + \frac{\alpha_n s}{1-\beta_n s}, \quad 0 \leqslant \alpha_n,\ 0 \leqslant \beta_n < 1,\ \alpha_n + \beta_n \leqslant 1,\ n \geqslant 0. \tag{4}$$

Remarque 1. Si $C_n = P_n B_n(1)$, où $P_0 = 1$ et, pour $n \geqslant 1$, $P_n = f_1'(1) \dots f_n'(1)$, $B_n(1) = \sum_{k=1}^n P_{k-1}^{-1} b_k(1)$ avec $b_k(1) = f_k''(1)/2 f_k'(1)^2$, alors la loi conditionnelle de Z_n/C_n, sachant $Z_n > 0$, converge aussi vers une loi de probabilité non-dégénérée sur $[0, \infty[$, avec moyenne et variance finies, mais la moyenne n'est pas nécessairement 1.

Nous observons que la probabilité de survie $P(Z_n > 0)$ se comporte comme n^{-1} ou $n^{-1/2}$ selon que l'environnement est constant ou aléatoire. La loi de Yaglom a été aussi considérée dans [2] (pp. 1855–1858), mais la conclusion n'était pas claire. Nous constatons aussi que la normalisation C_n de la remarque précédente reste valable dans le cas où l'environnement est constant, car dans ce cas elle devient l'expression classique de Yaglom : $C_n = n f_1''(1)/2$.

2. Un théorème limite pour une marche aléatoire centrée

Soit (ω_n) la suite i.i.d. définie dans la section précédente. Soit $a : \Theta \to \mathbb{R}_+^*$ une fonction mesurable. Alors $\omega \mapsto a_n = a(\omega_n)$ sont des variables aléatoires positives i.i.d. Nous considérons le cas où $E \log a_1 = 0$, et la marche aléatoire $S_0 = 0$, $S_n = X_1 + \dots + X_n$, avec $X_n = \log a_n$, $n \geqslant 1$. Soit $M_n = \max(0, S_1, \dots, S_n)$. On a :

Lemme 2.1 [9]. *Si $EX_1 = 0$ et $0 < EX_1^2 < \infty$, alors pour tout $x \geqslant 0$, il existe $v(x) > 0$ telle qu'on ait, lorsque $n \to \infty$,*

$$\mu_n(x) := P(M_n \leqslant x) \sim v(x) n^{-1/2}. \tag{5}$$

De plus, pour tout $\lambda > 0$, lorsque $n \to \infty$, $E\,\mathrm{e}^{-\lambda M_n} \sim \tilde{v}(\lambda) n^{-1/2}$, où $\tilde{v}(\lambda) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}v(x)$. Posons $v(x) = 0$ pour $x < 0$. La fonction $v(x)$ vérifie $v(x) = E v(x - X_1)$ si $x \geqslant 0$ et $v(x) \sim cx$ lorsque $x \to \infty$, où $0 < c < \infty$ est une constante.

Soit $\pi_{n,x}$ la probabilité conditionnelle par rapport à π, sachant $M_n \leqslant x$: pour toute fonction $g : \Theta^{\mathbb{N}^*} \to \mathbb{R}_+$, mesurable, $\pi_{n,x}(g) = \pi(g; M_n \leqslant x)/\mu_n(x)$. Soit π_x la probabilité sur $\Theta^{\mathbb{N}^*}$ telle qu'on ait, pour tout $k \geqslant 1$ et toute fonction mesurable $g : \Theta^{\mathbb{N}^*} \to \mathbb{R}_+$ qui ne dépend que des k premières coordonnées,

$$\pi_x(g) = \frac{1}{v(x)} \pi\big[g v(x - S_k); M_k \leqslant x\big].$$

L'existence d'une telle probabilité vient du théorème de Kolmogorov. Une fonction $g : \Theta^k \to \mathbb{R}$ sera aussi identifiée à la fonction $(\omega_1, \omega_2, \dots) \mapsto g(\omega_1, \dots, \omega_k)$ définie sur $\Theta^{\mathbb{N}^*}$.

Lemme 2.2. *Pour tout $k \geqslant 1$ et toute fonction $g : \Theta^k \mapsto \mathbb{R}$, mesurable et bornée,*

$$\lim_{n\to\infty} \pi_{n,x} g = \pi_x g, \quad x \geqslant 0.$$

Lemme 2.3. *On suppose que $EX_1 = 0$ et $0 < EX_1^2 < \infty$. Soit $h_n : \Theta^n \to \mathbb{R}_+$ une suite de fonctions mesurables et uniformément bornées telles que, pour tout $x \geqslant 0$, la limite $h(\omega_1, \omega_2, \dots) = \lim h_n(\omega_1, \dots, \omega_n)$ existe π_x p.s. Alors $\lim_{n\to\infty} \pi_{n,x} h_n = \pi_x h$.*

Théorème 2.4. *Sous les conditions du Lemme 2.3, si de plus*

$$\limsup_{x\to\infty} \limsup_{n\to\infty} n^{1/2} E[h_n; M_n > x] = 0, \tag{6}$$

alors la fonction $x \mapsto v(x)\pi_x h$ est non-décroissante sur $[0, \infty[$, et

$$\lim_{n\to\infty} n^{1/2} E h_n = \lim_{x\to\infty} v(x) \pi_x h. \tag{7}$$

3. Marche aléatoire centrée sur le groupe affine

Dans cette section nous notons $\omega_n = (a_n, b_n)$ une suite de variables aléatoires i.i.d. à valeurs dans $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$, avec $E \log a_1 = 0$. Considérons les transformations affines $g_n(x) = a_n x + b_n$ $(x \in \mathbb{R})$, et la marche aléatoire $(g_1 \circ \cdots \circ g_n)$ sur le groupe affine. Posons $A_0 = 1$ et, pour $n \geqslant 1$, $A_n = a_1 \ldots a_n$, $B_n = \sum_{k=1}^n A_{k-1} b_k$. Alors

$$g_1 \circ \cdots \circ g_n(x) = A_n x + B_n, \quad n \geqslant 1.$$

Nous sommes interessés par les propriétés asymptotiques de la distribution de $g_1 \circ \cdots \circ g_n$, qui est bien sûr caractérisée par la loi conjointe de (A_n, B_n).

Théorème 3.1. *On suppose $EX_1 = 0$, $0 < EX_1^2 < \infty$, $E(|b_1|^\varepsilon) < \infty$ et $E(|b_1|^{-\varepsilon}) < \infty$ pour un certain $\varepsilon > 0$. Alors il existe une mesure de Radon ν sur $\mathbb{R}$, telle qu'on ait, pour tout $\beta > 0$, $0 < \int (1 + |y|)^{-\beta} \,\mathrm{d}\nu(y) < \infty$, et pour toute fonction continue $h : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ vérifiant $h(x, y) \leqslant C/(1 + y)^\beta$ pour certaines constantes $C, \beta > 0$ et tous $(x, y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$,*

$$\lim_{n\to\infty} n^{1/2} Eh(A_n, B_n) = \int h(0, y) \,\mathrm{d}\nu(y); \tag{8}$$

pour toute fonction continue $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ vérifiant $\psi(y) \leqslant C/(1 + |y|)^\beta$ pour certaines constantes $C, \beta > 0$ et tout $y \in \mathbb{R}$, la fonction $x \mapsto v(x)\pi_x \psi(B)$ est non-décroissante sur $[0, \infty[$ et

$$\nu(\psi) = \lim_{x\to\infty} v(x)\pi_x \psi(B) < \infty, \tag{9}$$

où $B := \lim_n B_n \in \mathbb{R}$ π_x p.s. De plus, ν est une mesure de Radon sur $\mathbb{R}$, μ-stationnaire : $\lambda = \mu * \lambda = \int f(\nu) \,\mathrm{d}\mu(f)$, où $f(\nu)$ désigne la mesure image de ν par f ; à une constante près, il n'y a qu'une seule mesure μ-stationnaire.

Ce théorème de limite locale complète un résultat de Le Page et Peigné [10] sur la loi conjointe de (A_n, B_n), et améliore leur résultat sur la loi de B_n. Notons qu'ici la loi μ n'admet pas nécessairement de densité. Le résultat apparaît comme une conséquence du Théorème 2.4 appliqué à $h_n = h(A_n, B_n)$. En effet, sous les conditions $0 < EX_1^2 < \infty$, $E|b_1|^\varepsilon < \infty$ et $E(X_1 |b_1|^\varepsilon) < \infty$ pour un certain $\varepsilon > 0$, nous pouvons montrer que $\pi_x(A_{k-1}^\varepsilon |b_k|^\varepsilon) = \mathrm{O}(k^{-3/2})(k \to \infty)$; par conséquent π_x p.s. $\lim_{k\to\infty} A_k = 0$ et $B := \lim_{k\to\infty} B_k \in \mathbb{R}$, ce qui donne la convergence π_x p.s. de h_n. La condition $E|b_1|^{-\varepsilon} < \infty$ nous permet de montrer que pour $\beta > 0$ assez petit, $\limsup_{n\to\infty} n^{1/2} E[\mathrm{e}^{\beta M_n/2}/(1 + |B_n|)^\beta] < \infty$, et par conséquent la condition (6) du Théorème 2.4 est satisfaite car $n^{1/2} E[h(A_n, B_n); M_n > x] \leqslant C n^{1/2} E[(1 + |B_n|)^{-\beta} \mathrm{e}^{\beta(M_n - x)/2}] \leqslant CC_1 \mathrm{e}^{-\beta x/2}$. L'unicité de la mesure stationnaire a été obtenue dans [4].

4. Marche aléatoire sur le semi-groupe des fonctions génératrices

Rappelons que (f_n) est une suite de v.a. i.i.d. à valeurs dans G, le semi-groupe pour la composition des fonctions génératrices de probabilités. Soit $\widetilde{G}$ le semi-groupe défini par $\widetilde{G} = G \cup [0, 1]$ (une constante $c \in [0, 1]$ est identifiée à la fonction $c(s) = c$ pour $s \in [0, 1[$ et $c(1) = 1$), muni de la topologie de convergence simple. Bien sûr, si $f, g \in \widetilde{G}$ sont indépendantes de lois μ et ν, alors la convolution $\mu * \nu$ est la loi de $f \circ g$. On pose $a_n = 1/f_n'(1)$, et on définit $b_n(s)$ par :

$$\bigl(1 - f_n(s)\bigr)^{-1} = a_n(1 - s)^{-1} + b_n(s), \quad 0 \leqslant s < 1, \tag{10}$$

et $b_n(1) := \lim_{s\uparrow 1} b_n(s) = f_n''(1)/2f_n'(1)^2$. Dans le cas géométrique, $b_n(s) = b_n(1)$ pour tout $s \in [0, 1[$. Dans le cas général, par un calcul simple, $(f_n'(1) - (1 - f_n(0)))/f_n'(1)^2 \leqslant b_n(s)$ pour tout $s \in [0, 1[$; si $f_n''(1) < \infty$, par un résultat d'Agresti [1,9], $b_n(s) \leqslant 2b_n(1)$ pour tout $s \in [0, 1[$. Par itération,

$$\bigl(1 - f_1 \circ \cdots \circ f_n(s)\bigr)^{-1} = A_n(1 - s)^{-1} + B_n(s), \quad 0 \leqslant s < 1, \tag{11}$$

où $A_0 = 1$, et pour $n \geqslant 1$, $A_n = a_1 \ldots a_n$, $B_n(s) = \sum_{k=1}^n A_{k-1} b_k(f_{k+1} \circ \cdots \circ f_n(s)) \leqslant 2B_n(1)$. On voit donc qu'il y a une relation étroite entre les marches aléatoires sur le groupe affine et sur le semi-groupe des fonctions génératrices de probabilités.

Théorème 4.1. *On suppose* $EX_1 = 0$, $0 < EX_1^2 < \infty$ *et* $E[b_1(1)^\varepsilon] < \infty$ *pour un certain* $\varepsilon > 0$. *Soit* μ *la loi de* f_1. *Alors pour toute fonction* $\psi : \widetilde{G} \to \mathbb{R}_+$ *continue bornée vérifiant* $\psi(f) \leqslant C(1 - f(0))^\beta$ *pour certaines constantes* $C, \beta > 0$ *et tout* $f \in G$, *on a :*

$$\lim_{n\to\infty} n^{1/2} E\psi(f_1 \circ \cdots \circ f_n) = \lim_{x\to\infty} v(x)\pi_x \psi(q) =: \lambda(\psi) < \infty,$$

où $q = q(\omega) = \lim f_1 \circ \cdots \circ f_n(0)$, $x \mapsto v(x)\pi_x\psi(q)$ *est non-décroissante sur* $[0, \infty[$. *De plus,* λ *est une mesure de Radon sur* $[0, 1[$, μ*-stationnaire :* $\lambda = \mu * \lambda = \int f(\lambda)\, \mathrm{d}\mu(f)$, *où* $f(\lambda)$ *désigne la mesure image de* λ *par* f *; à une constante près, il n'y a qu'une seule mesure* μ*-stationnaire.*

Ce théorème de limite locale est encore une application du Théorème 2.4. La convergence π_x p.s. de $h_n = \psi(f_1 \circ \cdots \circ f_n)$ est assurée par le fait que pour tout $s \in [0, 1[$, $q = \lim_{n\to\infty} f_1 \circ \cdots \circ f_n(s) < 1$ π_x p.s. ; la condition (6) du Théorème 2.4 est satisfaite car pour tout $k \leqslant n$, $1 - f_1 \circ \cdots \circ f_n(0) \leqslant 1 - f_1 \circ \cdots \circ f_k(0) \leqslant f_1'(1) \ldots f_k'(1)$, et donc $h_n \leqslant C\,\mathrm{e}^{-\beta M_n}$.

5. Esquisse de la démonstration du Théorème 1.1

La loi de Kolmogorov est une conséquence directe du Théorème 4.1 et du fait que $P(Z_n > 0) = E(1 - f_1 \circ \cdots \circ f_n(0))$. Pour la loi de Yaglom, nous remarquons que

$$C_n = E^\omega(Z_n \mid Z_n > 0) = P_n / \big[1 - f_1 \circ \cdots \circ f_n(0)\big] = \big[A_n + B_n(0)\big]/A_n,$$

et que la transformée de Laplace de la loi de Z_n/C_n, sachant $Z_n > 0$, est :

$$L_n(t) = 1 - \frac{E[1 - f_1 \circ \cdots \circ f_n(\mathrm{e}^{-tA_n/(A_n+B_n(0))})]}{E[1 - f_1 \circ \cdots \circ f_n(0)]}, \quad 0 < t < \infty. \tag{12}$$

Nous avons déjà precisé au Théorème 4.1 un équivalent du dénominateur de la dernière fraction ; encore par une application du Théorème 2.4 nous pouvons obtenir un équivalent du numérateur. On en déduit que la limite $L(t) := \lim_{n\to\infty} L_n(t)$ existe, et vérifie $(1 - L(t))/t = 1 + \mathrm{O}(t)$ $(t \to 0)$, ce qui donne le résultat désiré.

Références

[1] A. Agresti, On the extinction times of varying and random environment branching processes, J. Appl. Probab. 12 (1975) 39–46.
[2] K.B. Athreya, S. Karlin, Branching processes with random environments (I & II), Ann. Math. Statist. 42 (1971) 1499–1520, 1843–1858.
[3] K.B. Athreya, P.E. Ney, Branching Processes, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1972.
[4] M. Babillot, P. Bougerol, L. Elie, The random difference equation $X_n = A_n X_{n-1} + B_n$ in the critical case, Ann. Probab. 25 (1) (1997) 478–493.
[5] J. Geiger, G. Kersting, The survival probability of a critical branching process in random environment, Teor. Verojatnost. i Primenen. 45 (2000) 607–615.
[6] J. Geiger, G. Kersting, V.A. Vatutin, Limit theorems for branching processes in random environment, Preprint, 2001.
[7] Y. Guivarc'h, Q. Liu, Propriétés asymptotiques des processus de branchement en environnement aléatoire, C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. I 332 (2001) 339–344.
[8] Y. Guivarc'h, E. Le Page, Q. Liu, Branching processes in random environments and local limit theorems for random walks, Preprint, 2001.
[9] M.V. Kozlov, On the asymptotic behaviour of the probability of non-extinction for critical branching processes in a random environment, Theory Probab. Appl. 21 (4) (1976) 742–751.
[10] E. Le Page, M. Peigné, A local limit theorem on the semi-direct product of $R*^+$ and R^d, Ann. Inst. Henri Poincaré 33 (1997) 223–252.
[11] W.L. Smith, W.E. Wilkinson, On branching processes in random environments, Ann. Math. Statist. 40 (1969) 814–827.