



ELSEVIER

Available online at [www.sciencedirect.com](http://www.sciencedirect.com)

SCIENCE @ DIRECT®

C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 337 (2003) 493–498



Problèmes mathématiques de la mécanique

# Homogénéisation d'un matériau élastique renforcé de fibres très rigides : effets non locaux

Michel Bellieud<sup>a</sup>, Isabelle Gruais<sup>b</sup>

<sup>a</sup> UFR science, Université de Perpignan, 52, av. de Villeneuve, 66860 Perpignan cedex, France

<sup>b</sup> Université de Rennes I, I.R.M.A.R, campus de Beaulieu, 35042 Rennes cedex, France

Reçu le 31 mars 2003 ; accepté après révision le 30 août 2003

Présenté par Philippe G. Ciarlet

## Résumé

Nous étudions l'homogénéisation de problèmes élastiques du type :

$$\begin{aligned}
 -\operatorname{div}(\sigma_\varepsilon(u_\varepsilon)) &= f \quad \text{dans } \Omega \quad + \text{ conditions limites,} \\
 \sigma_\varepsilon(u_\varepsilon) &= \lambda_\varepsilon \operatorname{tr}(e(u_\varepsilon))I + 2\mu_\varepsilon e(u_\varepsilon), \quad e(u_\varepsilon) = \frac{1}{2}(\nabla u_\varepsilon + {}^t \nabla u_\varepsilon),
 \end{aligned}$$

lorsque les coefficients d'élasticité  $\lambda_\varepsilon, \mu_\varepsilon$ , périodiques de période  $\varepsilon$ , prennent des valeurs d'ordres de grandeur très élevés sur un sous-ensemble  $T_\varepsilon$  de  $\Omega$  (structure composée de fibres) dont la mesure tend simultanément vers 0. Nous obtenons des lois effectives non locales déduites d'un système couplé d'équations aux dérivées partielles. **Pour citer cet article : M. Bellieud, I. Gruais, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 337 (2003).**

© 2003 Académie des sciences. Publié par Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS. Tous droits réservés.

## Abstract

**Homogenization of an elastic material reinforced by very stiff fibers: nonlocal effects.** We study the homogenization of elasticity problems like

$$\begin{aligned}
 -\operatorname{div}(\sigma_\varepsilon(u_\varepsilon)) &= f \quad \text{in } \Omega \quad + \text{ boundary conditions,} \\
 \sigma_\varepsilon(u_\varepsilon) &= \lambda_\varepsilon \operatorname{tr}(e(u_\varepsilon))I + 2\mu_\varepsilon e(u_\varepsilon), \quad e(u_\varepsilon) = \frac{1}{2}(\nabla u_\varepsilon + {}^t \nabla u_\varepsilon),
 \end{aligned} \tag{1}$$

when the Lamé coefficients  $\lambda_\varepsilon, \mu_\varepsilon$  are  $\varepsilon$ -periodic and take very high values on a subset  $T_\varepsilon \subset \Omega$  (fibred structure) the measure of which tends to 0. We find a nonlocal effective equation deduced from an homogenized system of several equations. **To cite this article: M. Bellieud, I. Gruais, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 337 (2003).**

© 2003 Académie des sciences. Publié par Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS. Tous droits réservés.

Adresse e-mail : [bellieud@univ-perp.fr](mailto:bellieud@univ-perp.fr) (M. Bellieud).

### Abridged English version

We are concerned with the homogenization of elasticity problems like

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(\sigma_\varepsilon(u_\varepsilon)) = f & \text{in } \Omega, \quad u_\varepsilon \in H_0^1(\Omega, \mathbb{R}^3) \quad (f \in L^2(\Omega, \mathbb{R}^3)), \\ \sigma_\varepsilon(u_\varepsilon) = \lambda_\varepsilon \operatorname{tr}(e(u_\varepsilon))I + 2\mu_\varepsilon e(u_\varepsilon), \quad e(u_\varepsilon) = \frac{1}{2}(\nabla u_\varepsilon + {}^t \nabla u_\varepsilon), \end{cases} \quad (2)$$

when the elastic coefficients  $\lambda_\varepsilon, \mu_\varepsilon$  do not satisfy assumptions of uniform ellipticity and boundedness like  $0 < \alpha < \lambda_\varepsilon(x), \mu_\varepsilon(x) < \beta < +\infty$  which guarantee a classical asymptotic behaviour. In the case of scalar elliptic equations, it is well known that homogenization may then lead to unusual models such as non-local ones [6], which can be interpreted in the general context of Dirichlet forms [7]. Explicit computations have actually been performed in the case of a fiber reinforced structure [1]. In this Note, we present the extension of these results to the framework of elasticity, where the theory of Dirichlet forms breaks down [5].

We consider a fibered structure in  $\mathbb{R}^3: \Omega := \omega \times ]0, L[$  is a cylindrical domain,  $\omega$  being a bounded open domain of  $\mathbb{R}^2$  with smooth boundary. Given a sequence of positive reals  $(r_\varepsilon)$ , the geometry of the set  $T_\varepsilon$  (the “fibers”) is described in terms of the open disk  $D^\varepsilon := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, \sqrt{x_1^2 + x_2^2} < r_\varepsilon/\varepsilon\}$ , by considering first its periodization on all  $\mathbb{R}^2$  given by  $D_\#^\varepsilon := \bigcup_{i \in \mathbb{Z}^2} \{i\} + D^\varepsilon$ , then by setting  $T_\varepsilon := (\omega \cap \varepsilon D_\#^\varepsilon) \times (0, L)$  (see Fig. 1). The elastic coefficients  $\lambda_\varepsilon, \mu_\varepsilon$  defined by (4), take the constant values  $\lambda_0, \mu_0$  in the matrix  $\Omega \setminus T_\varepsilon$  and very high values on the fibers, while at the same time their Lebesgue measure  $|T_\varepsilon|$  tends to 0. More precisely, we assume (5). The limit problem we derive in Theorem 0.1 depends on  $k, \kappa$  and on the capacity parameter  $\gamma$  defined by (6). When  $0 < k, \gamma < +\infty$  or  $0 < \kappa, \gamma < +\infty$ , it consists of the coupled system of equations depending on the limit  $u$  of the sequence  $(u_\varepsilon)$  of the solutions of (2) and the weak limits  $v_p$  of some components  $v_{\varepsilon p}$  of the sequence  $v_\varepsilon$  defined by (7), which describes the average behaviour of the restriction of  $u_\varepsilon$  to the fibers. If  $0 < \kappa, \gamma < +\infty$ , it involves the fourth order derivatives of  $v$ . In the following theorem, the elementary case  $k = 0$  is added for the sake of completeness.

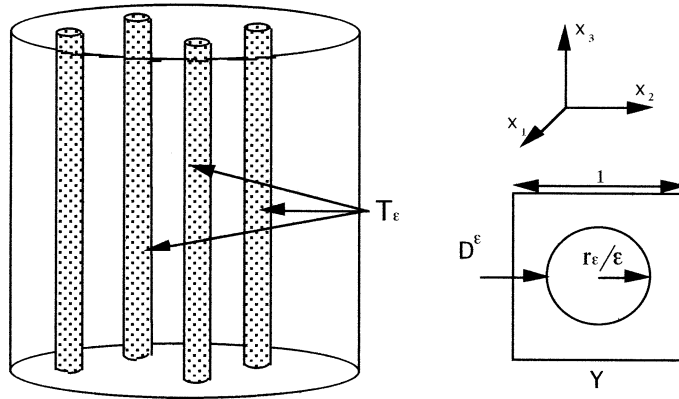
**Theorem 0.1.** *Assume (4), (5), and let  $(u_\varepsilon)$  be the sequence of the solutions of (2). Then*

- (1) *if  $k = 0$  the sequence  $(u_\varepsilon)$  converges weakly in  $H_0^1(\Omega, \mathbb{R}^3)$  to the unique solution of (9).*
- (2) *If  $\kappa = 0$  and  $k > 0$ ,  $(u_\varepsilon)$  converges weakly in  $H_0^1(\Omega, \mathbb{R}^3)$  to  $u$  and  $(v_{\varepsilon 3})$  defined by (7) converges weakly star in  $L^1(\Omega)$  to  $v_3$ , where  $(u, v_3)$  is the unique solution of (8) and (10).*
- (3) *If  $\kappa > 0$  the sequence  $(u_\varepsilon)$  converges weakly in  $H_0^1(\Omega, \mathbb{R}^3)$  to  $u$  and  $(v_\varepsilon)$  defined by (7) converges weakly star in  $L^1(\Omega, \mathbb{R}^3)$  to  $v$ , where  $(u, v)$  is the unique solution of (8) and (11).*

The homogenized problem is synthesized in (12). The proof of Theorem 0.1 is based on the use of appropriate test functions associated to the techniques developed in the study of the scalar case [1,3]. All details can be found in a complete version of this paper [4].

## 1. Introduction et résultat

Nous nous intéressons à l’homogénéisation de problèmes d’élasticité (2) lorsque les coefficients  $\lambda_\varepsilon, \mu_\varepsilon$ , périodiques de période  $\varepsilon$ , ne satisfont pas les estimations uniformes usuelles du type  $0 < \alpha < \lambda_\varepsilon(x), \mu_\varepsilon(x) < \beta < +\infty$  qui garantissent un comportement effectif classique. Dans le cas scalaire on sait que le processus d’homogénéisation peut alors produire des modèles effectifs inhabituels, par exemple non locaux [6], qui s’interprètent dans le cadre général de la théorie des formes de Dirichlet [7]. De fait, les calculs explicites des équations limites ont été effectués pour des structures renforcées de fibres [1]. Nous présentons l’extension de ces résultats à l’élasticité linéaire, où la théorie des formes de Dirichlet ne s’applique pas [5].



$$\Omega := \omega \times (0, L)$$

Fig. 1. La structure fibrée.

Fig. 1. The fiber structure.

Dans cette Note, on considère une structure fibrée dans  $\mathbb{R}^3$  :  $\Omega := \omega \times ]0, L[$  est un domaine cylindrique,  $\omega$  étant un ouvert borné connexe de  $\mathbb{R}^2$  de frontière régulière. Etant donnée une suite de réels positifs  $(r_\epsilon)$ , l'ensemble des « fibres »  $T_\epsilon$  est construit à partir du disque ouvert  $D^\epsilon := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, \sqrt{x_1^2 + x_2^2} < r_\epsilon/\epsilon\}$ , en considérant d'abord l'ensemble périodique  $D_\#^\epsilon := \bigcup_{i \in \mathbb{Z}^2} \{i\} + D^\epsilon$ , puis en posant  $T_\epsilon := (\omega \cap \epsilon D_\#^\epsilon) \times (0, L)$  (voir Fig. 1).

Les coefficients  $\lambda_\epsilon(x)$  et  $\mu_\epsilon(x)$  sont définis par

$$\begin{cases} \mu_\epsilon(x) = \mu_{1\epsilon}, & \lambda_\epsilon(x) = \lambda_{1\epsilon}, & \text{si } x \in T_\epsilon, \\ \mu_\epsilon(x) = \mu_0 > 0, & \lambda_\epsilon(x) = \lambda_0, & \text{si } x \in \Omega \setminus T_\epsilon, \end{cases} \quad (4)$$

et prennent de très grandes valeurs sur les fibres tandis que la mesure de Lebesgue  $|T_\epsilon|$  de celles-ci tend simultanément vers 0. Plus précisément on suppose

$$\mu_{1\epsilon} = \frac{|\Omega|}{|T_\epsilon|} k_\epsilon, \quad \lambda_{1\epsilon} = l_\epsilon \mu_{1\epsilon}, \quad 0 < r_\epsilon \ll \epsilon, \quad \mu_\epsilon(x) > c > 0 \quad \text{dans } \Omega, \quad (5)$$

$$l_\epsilon \rightarrow l \in [0, +\infty[, \quad k_\epsilon \rightarrow k \in [0, +\infty[, \quad r_\epsilon^2 k_\epsilon \rightarrow \kappa \in [0, +\infty].$$

Le problème limite est fonction de  $k, \kappa$  et du paramètre capacitaire

$$\gamma := \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon^2 |\ln r_\epsilon|}. \quad (6)$$

Lorsque  $\gamma$  et  $k$  (ou  $\kappa$ ) sont des réels positifs, il s'exprime sous forme d'un système couplé d'équations elliptiques dépendant de la limite  $u$  de la suite  $(u_\epsilon)$  des solutions de (2) et d'une ou plusieurs variables auxiliaires  $v_p$ , limites faibles des composantes  $v_{\epsilon p}$  de la suite

$$v_\epsilon(x) := \frac{|\Omega|}{|T_\epsilon|} u_\epsilon(x) \quad \text{si } x \in T_\epsilon; \quad v_\epsilon(x) := 0 \quad \text{sinon.} \quad (7)$$

Celle-ci décrit le déplacement limite moyen des fibres. Les conditions aux limites effectives sont caractérisées par :  $u \in H_0^1(\Omega, \mathbb{R}^3)$  et

$$\begin{cases} v_3 \in L^2(\omega, H_0^1(0, L)) & \text{si } 0 < k \leq +\infty \text{ et } \kappa = 0, \\ \begin{cases} v_3 = 0, & v_1, v_2 \in L^2(\omega, H_0^2(0, L)), \\ \frac{\partial v_1}{\partial x_3} = \frac{\partial v_2}{\partial x_3} = 0 & \text{sur } \omega \times \{0, L\} \end{cases} & \text{si } 0 < \kappa \leq +\infty. \end{cases} \quad (8)$$

Dans le théorème qui suit, le cas  $k = 0$ , élémentaire, est donné pour compléter l'énoncé. On pose  $\chi := \frac{\lambda_0 + 3\mu_0}{\lambda_0 + \mu_0}$ .

**Théorème 1.1.** *Supposons (4), (5), et soit  $(u_\varepsilon)$  la suite des solutions de (2). Alors*

(1) *si  $k = 0$ , la suite  $(u_\varepsilon)$  converge faiblement dans  $H_0^1(\Omega, \mathbb{R}^3)$  vers la solution  $u$  de*

$$-\operatorname{div}(e(u)) = f \quad \text{dans } \Omega, \quad u \in H_0^1(\Omega, \mathbb{R}^3); \tag{9}$$

(2) *si  $\kappa = 0$  et  $k > 0$ , la suite  $(u_\varepsilon)$  converge faiblement dans  $H_0^1(\Omega, \mathbb{R}^3)$  vers un champ  $u$  et la suite  $(v_{\varepsilon 3})$  définie par (7) converge étoile-faiblement dans  $L^1(\Omega)$  vers une fonction  $v_3$ , où  $(u, v_3)$  est l'unique solution de (8) et*

(i) *si  $0 < k < +\infty$ ,*

$$\left\{ \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} -\operatorname{div}(\sigma_0(u)) + 2\mu_0\pi\gamma \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ u_3 - v_3 \end{pmatrix} = f \quad \text{dans } \Omega, \\ -2\mu_0\pi\gamma \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ u_3 - v_3 \end{pmatrix} - \frac{3l+2}{2(l+1)}k \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \partial^2 v_3 / \partial x_3^2 \end{pmatrix} = 0 \quad \text{dans } \Omega, \end{array} \right. \quad \text{si } 0 \leq \gamma < +\infty, \\ v_3 = u_3; \quad -\operatorname{div}(\sigma_0(u)) - \frac{3l+2}{2(l+1)}k \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \partial^2 u_3 / \partial x_3^2 \end{pmatrix} = f \quad \text{dans } \Omega, \quad \text{si } \gamma = +\infty; \end{array} \right. \tag{10}$$

(ii) *si  $k = +\infty$ ,  $v_3 = 0$  et*

$$\left\{ \begin{array}{l} -\operatorname{div}(\sigma_0(u)) + 2\mu_0\pi\gamma \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ u_3 \end{pmatrix} = f \quad \text{dans } \Omega, \quad \text{si } 0 \leq \gamma < +\infty, \\ u_3 = 0; \quad \begin{pmatrix} -(\operatorname{div}(\sigma_0(u)))_1 \\ -(\operatorname{div}(\sigma_0(u)))_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{dans } \Omega, \quad \text{si } \gamma = +\infty; \end{array} \right.$$

(3) *si  $\kappa > 0$  la suite  $(u_\varepsilon)$  converge faiblement dans  $H_0^1(\Omega, \mathbb{R}^3)$  vers  $u$  et  $(v_\varepsilon)$  définie par (7) converge étoile-faiblement dans  $L^1(\Omega, \mathbb{R}^3)$  vers  $v$ , où  $(u, v)$  est l'unique solution de (8) et*

(i) *si  $0 < \kappa < +\infty$ ,  $v_3 = 0$  et*

$$\left\{ \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} -\operatorname{div}(\sigma_0(u)) + 2\pi\mu_0\gamma \begin{pmatrix} \frac{\chi+1}{\chi}(u_1 - v_1) \\ \frac{\chi+1}{\chi}(u_2 - v_2) \\ u_3 \end{pmatrix} = f \quad \text{dans } \Omega, \\ -2\pi\mu_0\gamma \frac{\chi+1}{\chi} \begin{pmatrix} u_1 - v_1 \\ u_2 - v_2 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{\kappa}{4} \frac{3l+2}{2(l+1)} \begin{pmatrix} \frac{\partial^4 v_1}{\partial x_3^4} \\ \frac{\partial^4 v_2}{\partial x_3^4} \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \quad \text{dans } \Omega, \end{array} \right. \quad \text{si } 0 \leq \gamma < +\infty, \\ v = u; \quad -\operatorname{div}(\sigma_0(u)) + \frac{\kappa}{4} \frac{3l+2}{2(l+1)} \begin{pmatrix} \frac{\partial^4 u_1}{\partial x_3^4} \\ \frac{\partial^4 u_2}{\partial x_3^4} \\ 0 \end{pmatrix} = f \quad \text{dans } \Omega, \quad \text{si } \gamma = +\infty; \end{array} \right. \tag{11}$$

(ii) si  $\kappa = +\infty$ ,  $v = 0$  et

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(\sigma_0(u)) + 2\pi\mu_0\gamma \begin{pmatrix} \frac{\chi+1}{\chi}u_1 \\ \frac{\chi+1}{\chi}u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = f & \text{dans } \Omega, \quad \text{si } 0 \leq \gamma < +\infty, \\ v = u = 0, & \text{si } \gamma = +\infty. \end{cases}$$

**Commentaires.** (1) Le problème limite est le système d’Euler–Lagrange associé (en convenant  $0 \cdot \infty = 0$ ) à :

$$\begin{aligned} & \inf_{(u,v) \in \mathcal{D}} \Phi(u, v) - \int_{\Omega} f \cdot v \, dx, \\ \mathcal{D} & := H_0^1(\Omega, \mathbb{R}^3) \times \left\{ v \in L^2(\omega, H_0^2(0, L; \mathbb{R}^3)), \frac{\partial v_1}{\partial x_3} = \frac{\partial v_2}{\partial x_3} = 0 \text{ sur } \omega \times \{0, L\} \right\}, \\ \Phi(u, v) & = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sigma_0(u) : e(u) \, dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} 2\mu_0\pi\gamma \operatorname{diag}\left(\frac{\chi+1}{\chi}, \frac{\chi+1}{\chi}, 1\right)(v-u) \cdot (v-u) \, dx \\ & \quad + \frac{1}{2} \frac{3l+2}{2(l+1)} k \int_{\Omega} \left| \frac{\partial v_3}{\partial x_3} \right|^2 \, dx + \frac{1}{2} \frac{3l+2}{2(l+1)} \kappa \int_{\Omega} \left( \left| \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_3^2} \right|^2 + \left| \frac{\partial^2 v_2}{\partial x_3^2} \right|^2 \right) \, dx. \end{aligned} \tag{12}$$

(2) Dans le cas  $\gamma = +\infty$ ,  $0 < \kappa < +\infty$ , on retrouve les résultats obtenus dans [8].

**2. Preuve du Théorème 1.1 (cas  $0 < \kappa$ ,  $\gamma < +\infty$ )**

En multipliant l’Éq. (1) par  $u_\varepsilon$  et en intégrant par parties sur  $\Omega$ , on obtient

$$\int_{\Omega} \lambda_\varepsilon |\operatorname{tr}(e(u_\varepsilon))|^2 + 2\mu_\varepsilon |e(u_\varepsilon)|^2 \, dx = \int_{\Omega} f \cdot u_\varepsilon \, dx \leq \|f\|_{L^2(\Omega, \mathbb{R}^3)} \|u_\varepsilon\|_{L^2(\Omega, \mathbb{R}^3)},$$

dont on déduit les estimations suivantes (où l’on introduit la mesure  $m_\varepsilon := \frac{|\Omega|}{|T_\varepsilon|} 1_{T_\varepsilon} \, dx$ )

$$\|u_\varepsilon\|_{H_0^1(\Omega)} \leq C, \quad \int |u_\varepsilon|^2 \, dm_\varepsilon \leq C, \quad \int \left| \frac{u_{\varepsilon 3}}{r_\varepsilon} \right|^2 \, dm_\varepsilon \leq C, \quad \int \left| \frac{1}{r_\varepsilon} e(u_\varepsilon) \right|^2 \, dm_\varepsilon \leq C,$$

puis, en raisonnant comme dans [1,2], l’existence de deux fonctions  $u$  et  $v$  vérifiant à des suites extraites près :

$$\begin{aligned} u_\varepsilon & \rightharpoonup u, \quad \text{faiblement dans } H_0^1(\Omega, \mathbb{R}^3), \quad u_\varepsilon \mu_\varepsilon \xrightarrow{*} v \, dx, \quad \text{au sens des mesures,} \\ v & \in L^2(\omega, H_0^2(0, L)), \quad v_3 = 0, \quad \frac{\partial v_1}{\partial x_3} = \frac{\partial v_2}{\partial x_3} = 0 \quad \text{sur } \omega \times \{0, L\}. \end{aligned} \tag{13}$$

Fixant deux champs arbitraires  $\varphi, \psi \in \mathcal{D}(\Omega; \mathbb{R}^3)$  tels que  $\psi_3 = 0$ , on pose

$$\Phi_\varepsilon = \varphi_1(\vec{e}_1 - \theta_\varepsilon^{(1)}) + \bar{\psi}_{\varepsilon 1} \theta_\varepsilon^{(1)} + \varphi_2(\vec{e}_2 - \theta_\varepsilon^{(2)}) + \bar{\psi}_{\varepsilon 2} \theta_\varepsilon^{(2)} + \varphi_3(\vec{e}_3 - \theta_\varepsilon^{(3)}). \tag{14}$$

Notant  $D_\varepsilon^i := \varepsilon(i + D^\varepsilon)$  et  $B_\varepsilon := \{x \in \Omega, r_\varepsilon < \operatorname{dist}(x, T_\varepsilon) < R_\varepsilon\}$ , où  $(R_\varepsilon)$  est choisie telle que  $r_\varepsilon \ll R_\varepsilon \ll \varepsilon$ , les champs  $\psi_\varepsilon$  et  $\bar{\psi}_\varepsilon$  sont donnés, pour  $(x_1, x_2) \in \varepsilon((i_1, i_2) + (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})^2)$ , par

$$\psi_\varepsilon(x, t) := \sum_i \left( \int_{D_\varepsilon^i} \psi(\cdot, \cdot, x_3, t) \right), \quad \bar{\psi}_\varepsilon(x) = \begin{pmatrix} \psi_{\varepsilon 1}(x) \\ \psi_{\varepsilon 2}(x) \\ r_\varepsilon \left( -\frac{\partial \psi_{\varepsilon 1}}{\partial x_3} \frac{(x_1 - i_1)}{r_\varepsilon} - \frac{\partial \psi_{\varepsilon 2}}{\partial x_3} \frac{(x_2 - i_2)}{r_\varepsilon} \right) \end{pmatrix},$$

et les champs  $\theta_\varepsilon^{(p)}$  ( $p \in \{1, 2, 3\}$ ) sont les solutions de  $\inf\{\int_{B_\varepsilon} \frac{1}{2}\lambda_0 |\text{tr}(e(\theta))|^2 + \mu_0 |e(\theta)|^2 dx \mid \theta(x) = \bar{e}_p \text{ sur } T_\varepsilon; \theta(x) = \bar{0} \text{ sur } \Omega \setminus B_\varepsilon\}$ . Multiplions (1) par la fonction test  $\Phi_\varepsilon$  et intégrons par parties :

$$\int_{\Omega} \sigma_\varepsilon(u_\varepsilon) : e(\Phi_\varepsilon) dx = \int_{\Omega} f \cdot \Phi_\varepsilon dx. \quad (15)$$

On déduit de (13) et (14) que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} f \Phi_\varepsilon dx = \int_{\Omega} f \varphi dx. \quad (16)$$

Pour calculer la limite du terme du membre de gauche de (15), on écrit

$$\int_{\Omega} \sigma_\varepsilon(u_\varepsilon) : e(\Phi_\varepsilon) dx = \int_{\Omega} f \cdot \Phi_\varepsilon dx = I_{1\varepsilon} + I_{2\varepsilon} + I_{3\varepsilon},$$

$$I_{1\varepsilon} := \int_{\Omega \setminus (B_\varepsilon \cup T_\varepsilon)} \sigma_\varepsilon(u_\varepsilon) : e(\Phi_\varepsilon) dx, \quad I_{2\varepsilon} := \int_{B_\varepsilon} \sigma_\varepsilon(u_\varepsilon) : e(\Phi_\varepsilon) dx, \quad I_{3\varepsilon} := \int_{T_\varepsilon} \sigma_\varepsilon(u_\varepsilon) : e(\Phi_\varepsilon) dx.$$

On obtient

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} I_{1\varepsilon} = \int_{\Omega} \sigma_0(u) e(\varphi) dx, \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} I_{3\varepsilon} = \frac{\kappa}{4} \frac{3l+2}{l+1} \int_{\Omega} \left( \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_3^2} \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2 v_2}{\partial x_3^2} \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial x_3^2} \right) dx. \quad (17)$$

L'évaluation de la limite de  $I_{2\varepsilon}$  nécessite le calcul explicite des champs  $\theta_\varepsilon^{(p)}$ . On trouve

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} I_{2\varepsilon} = \sum_{\alpha=1}^2 2\mu_0 \frac{\chi+1}{\chi} \pi \gamma \int_{\Omega} (\psi_\alpha - \varphi_\alpha)(v_\alpha - u_\alpha) dx + 2\mu_0 \pi \gamma \int_{\Omega} (-\varphi_3)(-u_3) dx. \quad (18)$$

En passant à la limite dans (15), compte tenu de (16)–(18) et (19), on obtient la formulation variationnelle

$$\int_{\Omega} \sigma_0(u) : e(\varphi) dx + 2\mu_0 \frac{\chi+1}{\chi} \pi \gamma \int_{\Omega} ((\psi_1 - \varphi_1)(v_1 - u_1) + (\psi_2 - \varphi_2)(v_2 - u_2)) dx$$

$$+ 2\mu_0 \pi \gamma \int_{\Omega} (-\varphi_3)(-u_3) dx + \frac{\kappa}{4} \frac{3l+2}{l+1} \int_{\Omega} \left( \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_3^2} \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2 v_2}{\partial x_3^2} \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial x_3^2} \right) dx = \int_{\Omega} f \cdot \varphi dx,$$

conduisant au problème limite annoncé dans le cas correspondant du théorème. Pour la preuve des autres cas (et pour plus de détails) on se référera à [4].

## Références

- [1] M. Bellieud, G. Bouchitté, Homogenization of elliptic problems in a fiber reinforced structure. Nonlocal effects, *Ann. Scuola Norm. Sup. Cl. Sci.* IV 26 (1998) 407–436.
- [2] M. Bellieud, G. Bouchitté, Homogenization of a soft elastic material reinforced by fibers, *Asymptotic Anal.* 32 (2) (2002) 153–183.
- [3] M. Bellieud, Homogénéisation de problèmes d'évolution dans une structure renforcée de fibres, *C. R. Mécanique* 330 (12) (2002) 843–848.
- [4] M. Bellieud, I. Gruais, Homogenization of an elastic material reinforced by very rigid fibers. Nonlocal effects, Preprint, Laboratoire M.A.N.O., Université de Perpignan, 2003.
- [5] M. Camar-Eddine, P. Seppecher, Determination of the closure of the set of elasticity functionals, Preprint Anla 2002-2, Univ. de Toulon, *Arch. Rational Mech. Anal.*, in press.
- [6] E.Y. Khruslov, Homogenized Models of Composite Media, in: *Progr. Nonlinear Differential Equations Appl.*, Birkhäuser, 1991.
- [7] U. Mosco, Composite media and asymptotic Dirichlet forms, *J. Funct. Anal.* 123 (1994) 368–421.
- [8] C. Pideri, P. Seppecher, A second gradient material resulting from the homogenization of an heterogeneous linear elastic medium, *Contin. Mech. Thermodyn.* 9 (1997) 241–257.