Available online at www.sciencedirect.com
SCIENCE DIRECT
C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 337 (2003) 487–492
COMPTES RENDUS MATHEMATIQUE

Statistique/Probabilités

Sur la convergence uniforme presque complète dans l'estimation de la densité spectrale d'un processus à temps continu après échantillonnage du temps

Mustapha Rachdi

Université de Grenoble, IMAG-LMC UMR 5523 et LabSAD EA, UFR SHS, BP 47, 38040 Grenoble cedex 09, France

Reçu le 3 février 2003 ; accepté après révision le 17 juillet 2003

Présenté par Paul Deheuvels

Résumé

Soit $X = \{X(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ un processus à temps continu, strictement stationnaire et fortement mélangeant. Dans cette Note, nous prouvons, d'abord sous des conditions fortes sur la densité spectrale ϕ_X (à cause du phénomème de repliement des ondes : *aliasing*), la convergence uniforme presque complète de l'estimateur à noyau de la densité spectrale à partir d'un échantillonnage périodique. Ensuite, pour pallier le problème d'aliasing, nous considérons le processus échantillonné $\{X(t_n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$, où $\{t_n\}$ est un processus ponctuel stationnaire indépendant de X. La convergence uniforme presque complète de l'estimateur de la densité spectrale basé sur les observations discrètes $\{X(t_k), t_k\}$ est obtenue. Les vitesses de convergence sont également établies. ***Pour citer cet article : M. Rachdi, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 337 (2003).***

Abstract

On the almost complete and uniform convergence of spectral density estimation for a continuous-parameter process from time sampling. Let $X = \{X(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ be a continuous-time strictly stationary and strongly mixing process. In this paper, we prove in the setting of spectral density estimation, at first, under some hard conditions on the spectral density ϕ_X (because of aliasing phenomenon), the uniformly complete convergence of the spectral density estimate from periodic sampling. Afterwards, to overcome aliasing, we consider the sampled process $\{X(t_n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$, where $\{t_n\}$ is a stationary point process independent from X. The uniform complete convergence of the spectral estimate based on the discrete time observations $\{X(t_k), t_k\}$ is also obtained. The convergence rates are also established. ***To cite this article: M. Rachdi, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 337 (2003).***

Abridged English version

Let $X = \{X(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ be a real, second-order, zero mean strictly stationary stochastic process with continuous covariance function $R_X \in L^1 \cap L^2(\mathbb{R})$ and spectral density $\phi_X(\lambda) = 1/(2\pi)\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-\mathrm{i}t\lambda) R_X(t)\,\mathrm{d}t$.

Adresse e-mail : Mustapha.Rachdi@upmf-grenoble.fr, Mustapha.Rachdi@imag.fr (M. Rachdi).

doi:10.1016/j.crma.2003.07.006

Periodic sampling. Let W be any even function, such that: $\int_{-\infty}^{+\infty} W(\lambda)\,\mathrm{d}\lambda = 1$ and $\lambda^2 W(\lambda) \in L^1(\mathbb{R})$.

Define the spectral window W_N by: $W_N(\lambda) = M_N W(M_N \lambda)$, where M_N is a positive integer satisfying: $M_N \to \infty$ and $M_N/N \to 0$ as $N \to \infty$.

Let X be sampled at times $t_n = n/\varepsilon,\ n \in \mathbb{Z}$, where $\varepsilon > 0$ is the sampling rate. Then the discrete-parameter process $\widetilde{X} = \{X(n/\varepsilon)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ is strictly stationary with zero mean, and spectral density function $\phi_{\widetilde{X}}$ given by $\phi_{\widetilde{X}}(\lambda) = \varepsilon \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \phi_X(\varepsilon\lambda + 2\pi k\varepsilon)$.

Consider the sample $\{X(n/\varepsilon),\ n = 1,\dots,N\}$ from X, and assume that the spectral density is of compact support within $\mathcal{D} = [-\pi\varepsilon, \pi\varepsilon]$. The estimation of $\phi_X(\lambda)$ is then given by:

$$\hat{\phi}_X(\lambda) = \frac{1}{\varepsilon}\int_{-\infty}^{+\infty} W_N\left(\frac{\lambda}{\varepsilon} - u\right)\hat{I}_N(u)\,\mathrm{d}u \quad \text{where } \hat{I}_N(\lambda) = \frac{1}{2\pi N}\left|\sum_{k=1}^{N} X\left(\frac{k}{\varepsilon}\right)\exp(-\mathrm{i}k\lambda)\right|^2.$$

Theorem 0.1. *Assume that X is bounded α-mixing process, and there exists $0 < s < 1$ such that $(N - M_N)^{(1-\gamma+2s)/2}\alpha((N - M_N)^{1-s})$ is the general term of a convergent series for some γ with $1 - s/2 < \gamma < 4s - 1$. If the bandwidth is such that $M_N N^{\gamma-1} \to 0$ as $N \to \infty$ and the covariance verifies: $tR_X(t) \in L^1(\mathbb{R})$ and $\sum_{n=1}^{+\infty} n|R_X(n/\varepsilon)| < \infty$, then*

$$\sup_{\lambda\in\mathcal{D}}\left|\hat{\phi}_X(\lambda) - \phi_X(\lambda)\right| \to 0, \quad \textit{almost completely}.$$

X is said to be geometrically strong mixing (GSM) if $\exists\,\kappa > 0$, $\mu \in [0, 1[$ such that $\alpha(k) \leqslant \kappa\mu^k,\ k \geqslant 1$.

Theorem 0.2. *Under conditions of Theorem* 0.1*, if the mixing condition is replaced by X is GSM, then for $0 < \delta < 1/10$, we have*

$$\sup_{\lambda\in\mathcal{D}}\left|\hat{\phi}_X(\lambda) - \phi_X(\lambda)\right| = \mathrm{O}\big(\ln(N)/N\big)^{\delta}, \quad \textit{almost completely.}$$

Poisson sampling. Consider the sampled process $\check{X} = \{X(t_n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ associated to the process X, by sampling the time-parameter by a random sequence $\{t_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ independent of X and such that: $t_0 = 0$ and $t_n = t_{n-1} + \theta_n,\ n \in \mathbb{N}^*$, where $\{\theta_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ are i.i.d. positive random variables with common exponential distribution $F(x) = 1 - \mathrm{e}^{-\beta x}$.

For some fixed integer N, consider a sample $\{X(t_k),\ k = 1,\dots,N\}$ from $\check{X}$.

We have that $\phi_X(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \mathcal{G}_n(\lambda)$ in $L^2(\mathbb{R})$ where $\mathcal{G}_n(\lambda) = 1/(2\pi)\int_{-\infty}^{+\infty}\exp(-\mathrm{i}t\lambda)g_n(|t|)\,dt$ with $g_n(t) = \sum_{k=1}^{n} m_{n,k}\beta(\beta t)^{k-1}\mathrm{e}^{-\beta t}/(k-1)!\ \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(t)$ and $m_{n,k} = \sqrt{2/\beta}(-2)^{k-1}\mathcal{C}_{n-1}^{k-1}$. Then, we estimate $\phi_X(\lambda)$ by the truncated estimate: $\hat{\phi}_X(\lambda) = \sum_{n=1}^{M_N} W_n(N)\hat{a}_n(N)\mathcal{G}_n(\lambda)$, where $\hat{a}_n(N) = \sum_{k=1}^{n} m_{n,k}\hat{\rho}_k(N)$ with $\hat{\rho}_k(N) = 1/N\sum_{j=1}^{N-k} X(t_j)X(t_{j+k})$ for $1 \leqslant k \leqslant N$ and 0 elsewhere. The spectral window is such that $W_n(N) = W(\exp(n\varsigma)/N^b)$ with $\varsigma > \ln(3)$, $0 < b < \varsigma/(2\ln(3))$ and W satisfies hypotheses (4).

Theorem 0.3. *Assume that X is bounded, continuous in mean-square with almost sure continuous trajectories and α-mixing process, with $t\alpha(t) \in L^1(\mathbb{R})$, and $M_N = (N/\ln(N))^{\delta/2}$, where $0 < \delta < u$ and $u > 5/4$, then*

$$\sup_{\lambda\in\mathbb{R}}\left|\hat{\phi}_X(\lambda) - \phi_X(\lambda)\right| \to 0, \quad \textit{almost completely, as } N \to +\infty.$$

Theorem 0.4. *Let X be GSM and the bandwidth M_N verifies that: $M_N = (\ln(N)/N)^{-\nu}$ for $\nu > 4/25$. If $\sum_{n=M_N+1}^{+\infty}|a_n| = \mathrm{O}(N^{-r})$, $r > 0$, then*

$$\sup_{\lambda\in\mathbb{R}}\left|\hat{\phi}_X(\lambda) - \phi_X(\lambda)\right| = \mathrm{O}\big(\ln(N)/N\big)^{2s/(2s+1)}, \quad \textit{almost completely, with } 0 < s < \inf\big(\nu/(2-2\nu), 2r\big).$$

1. Introduction

L'analyse de Fourier des données et l'estimation de la densité spectrale pour les processus à temps continu ont prouvé leur utilité en communication [6] (dans le filtrage linéaire et la théorie de prédiction), en seismologie [4] (pour déterminer la nature d'un événement sismique), en océanographie [11] (pour l'étude des ondes océaniques), et dans divers domaines des sciences physiques, médicales,... .

Dans la statistique des processus à temps continu, les données sont souvent collectées en utilisant un schéma d'échantillonnage. Différents échantillonnages du temps peuvent être employés. Dans cette Note, nous considérons deux types d'échantillonnages : l'échantillonnage périodique et l'échantillonnage aléatoire. Ce choix est motivé par les raisons suivantes : soit $X = \{X(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ un processus réel, de second ordre, centré, strictement stationnaire de fonction de covariance $R_X \in L^1 \cap L^2(\mathbb{R})$ continue et de densité spectrale : $\phi_X(\lambda) = 1/(2\pi)\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-\mathrm{i}t\lambda)R_X(t)\,\mathrm{d}t$. Dans la théorie classique de l'estimation spectrale, le périodogramme est calculé à partir des observations de X sur $[0, T]$ où $T > 0$, par : $\hat{I}_T(\lambda) = 1/(2\pi T)|\int_0^T X(t)\exp(-\mathrm{i}\lambda t)\,\mathrm{d}t|^2,\ \forall\lambda \in \mathbb{R}$.

Cet estimateur n'est pas convergeant, mais en le lissant, on construit un estimateur de type noyau $\hat{\phi}_X$ qui est asymptotiquement consistant sous certaines conditions. La convergence en moyenne quadratique de $\hat{\phi}_X$ a été obtenue dans [12], et avec échantilllonnage du temps dans [9,10,7]. La convergence presque complète (p.co.) sans échantillonnage du temps a été obtenue dans [3].

Dans les applications pratiques, les observations de X ne sont pas obtenues sous une forme analytique, alors l'intégrale $\int_0^T X(t)\exp(-\mathrm{i}\omega t)\,\mathrm{d}t$, ne peut être calculée numériquement. Ceci constitue un problème majeur pour calculer le périodogramme. A cette fin, X est observé à des instants $\{t_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ et les observations sont $\{X(t_n),\ n = 1, \ldots, N\}$, avec $N \in \mathbb{N}$. Ces instants d'échantillonnage $\{t_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ sont à déterminer. Dans cette note, nous choisissons dans un premier temps, l'échantillonnage périodique. Ce choix introduit le phénomène de repliement des ondes (aliasing). Dans ce cas, la densité spectrale ϕ_X se calcule à partir de la densité spectrale $\phi_{\widetilde{X}}$ correspondante au processus échantillonné $\widetilde{X} = \{X(n/\varepsilon)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ où $\varepsilon > 0$, si le processus stochastique X est bande-limité (ϕ_X est à support dans $[-\pi\varepsilon, \pi\varepsilon]$) [9]. Nous construisons ensuite l'estimateur de ϕ_X, et établissons sa convergence p.co. et sa vitesse de convergence. La condition sur le support de ϕ_X semble être restrictive. C'est pour cela que dans un deuxième temps, nous adoptons l'échantillonnage aléatoire qui permet de pallier le phénomène d'aliasing [14,2]. Nous construisons ensuite l'estimateur de la densité spectrale, puis nous établissons sa convergence uniforme p.co. et donnons sa vitesse de convergence. Notons que la convergence en moyenne quadratique de cet estimateur a été établie dans [7].

Cette Note est organisée comme suit. Dans la Section 2, nous étudions le cas de l'échantillonnage périodique. L'échantillonnage aléatoire est présenté dans la Section 3. Dans les deux sections, les propriétés asymptotiques (fortes) des estimateurs sont exposées.

2. Echantillonnage périodique

Echantillonnons le processus X aux instants $t_n = n/\varepsilon,\ n \in \mathbb{Z}$ où $\varepsilon > 0$. Alors le processus échantillonné $\widetilde{X} = \{X(n/\varepsilon)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ est strictement stationnaire, centré, de covariances : $C_n = R_X(n/\varepsilon)$ pour $n \in \mathbb{Z}$, et de densité spectrale : $\phi_{\widetilde{X}}(\lambda) = \varepsilon\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\phi_X(\varepsilon\lambda + 2\pi k\varepsilon)$.

Soit W une fonction réelle, paire et satisfaisant

$$W \in L^1(\mathbb{R}),\quad \int_{-\infty}^{+\infty} W(\lambda)\,\mathrm{d}\lambda = 1 \quad \text{et} \quad \lambda^2 W(\lambda) \in L^1(\mathbb{R}). \tag{1}$$

On définit la fenêtre spectrale W_N par : $W_N(\lambda) = M_N W(M_N\lambda)$, où $(M_N)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'entiers positifs satisfaisant (voir [13] pour le choix optimal) : $M_N \to \infty$ et $M_N/N \to 0$ quand $N \to \infty$.

Usuellement, la densité spectrale $\phi_{\widetilde{X}}$ est estimée à partir des observations $\{X(n/\varepsilon),\ n=1,\ldots,N\}$ par

$$\hat{\phi}_{\widetilde{X}}(\lambda)=\int_{-\infty}^{+\infty} W_N(\lambda-u)\hat{I}_N(u)\,\mathrm{d}u, \tag{2}$$

où $\hat{I}_N(u)$ est le périodogramme : $\hat{I}_N(u)=1/(2\pi N)|\sum_{k=1}^{N}X(k/\varepsilon)\exp(-\mathrm{i}ku)|^2$ (voir [12]).

Notons que, l'estimateur de $\phi_X(\lambda)$ n'est pas donné par (2). Nous estimons donc $\phi_X(\lambda)$par :

$$\hat{\phi}_X(\lambda)=(1/\varepsilon)\hat{\phi}_{\widetilde{X}}(\lambda/\varepsilon),$$

qui peut s'écrire sous la forme suivante, convenable pour les applications pratiques :

$$\hat{\phi}_X(\lambda)=\frac{1}{2\pi N\varepsilon}\left\{\sum_{k=1}^{N}X^2\left(\frac{k}{\varepsilon}\right)+2\sum_{n=1}^{N-1}W\left(\frac{n}{M_N}\right)\cos\left(\frac{n\lambda}{\varepsilon}\right)\sum_{k=1}^{N-n}X\left(\frac{k+n}{\varepsilon}\right)X\left(\frac{k}{\varepsilon}\right)\right\}.$$

Les propriétés statistiques de l'estimateur ci-dessus s'obtiennent à partir des résultats classiques sur l'estimation de la densité spectrale pour les processus à temps discret [12].

Dans la suite de cette section, nous supposons que ϕ_X est à support compact $\mathcal{D}=[-\pi\varepsilon,\pi\varepsilon]$. Donc le problème du phénomène d'aliasing ne se pose plus [14], et nous avons le théorème suivant.

Théorème 2.1. *Soit X un processus stochastique réel, centré, de second ordre, strictement stationnaire et borné. Supposons de plus que X est α-mélangeant, tel qu'il existe* $0<s<1$:

$$(N-M_N)^{(1-\gamma+2s)/2}\alpha\big((N-M_N)^{1-s}\big), \tag{3}$$

est le terme général d'une série convergente pour γ vérifiant $1-s/2<\gamma<4s-1$*. Si la fonction de covariance vérifie : $t\,R_X(t)\in L^1(\mathbb{R})$ et $\sum_{n=1}^{+\infty}n|R_X(n/\varepsilon)|<\infty$, le noyau W satisfait la condition* (1)*, et le paramètre de lissage vérifie $M_N N^{\gamma-1}\to 0$ quand $N\to\infty$, alors*

$$\sup_{\lambda\in\mathcal{D}}\big|\hat{\phi}_X(\lambda)-\phi_X(\lambda)\big|\to 0,\quad \textit{p.co., quand } N\to+\infty.$$

Pour les processus α-mélangeants usuels, nous avons le corollaire suivant :

Corollaire 2.2. *Le Théorème* 2.1 *reste valide, si au lieu de la condition* (3)*, le coefficient de mélangeance α satisfait une des conditions suivantes* :

$$\alpha(t)=a\nu^t\quad \textit{avec } a>0,\ 0<\nu<1,\quad \textit{et}\quad M_N=N^\eta\quad \textit{où } 0<\eta<1/3,$$
$$\alpha(t)=c/t^\nu\quad \textit{pour } \nu>9/4,\ c>1,\quad \textit{et}\quad M_N=\ln N^\eta\quad \textit{avec } 0<\eta<1.$$

Nous établissons la vitesse de convergence de $\hat{\phi}_X$ dans le cas où le coefficient de mélangeance est à décroissance géométrique (GSM) : il existe $\kappa>0$ et $\mu\in[0,1[$ tel que $\alpha(k)\leqslant\kappa\mu^k,\ k\geqslant 1$ (voir [1]).

Théorème 2.3. *Soit X un processus réel, centré, de second ordre, strictement stationaire et borné. Si au lieu de l'hypothèse* (3)*, le processus X est GSM, alors pour* $0<\delta<1/10$*, nous avons*

$$\sup_{\lambda\in\mathcal{D}}\big|\hat{\phi}_X(\lambda)-\phi_X(\lambda)\big|=\mathrm{O}\big(\ln(N)/N\big)^{\delta},\quad \textit{p.co.}$$

3. Echantillonnage poissonien

Considérons le processus échantillonné $\check{X} = \{X(t_n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ associé au processus X, en échantillonnant le temps par la suite aléatoire $\{t_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Dans toute la suite de ce paragraphe, les instants d'échantillonnage sont supposés être indépendants du processus X et gérés par un processus de Poisson sur $[0,+\infty)$, tel que

$$t_0 = 0 \quad \text{et} \quad t_n = t_{n-1} + \theta_n, \quad n \in \mathbb{N}^*,$$

où $\{\theta_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de v.a. positives, i.i.d., et de loi $F(x) = 1 - e^{-\beta x}$, où $\beta > 0$ est la vitesse moyenne d'échantillonnage.

La suite des covariances C_n du processus échantillonné $\check{X}$ est donnée par : $C_n = \mathbb{E}\{X(t_{k+n})X(t_k)\} = \int_0^{+\infty} f_n(t)R_X(t)\,\mathrm{d}t$ (cf. [9]). Notons que la densité de probabilité de $(t_{k+n} - t_k)$ ne dépend pas de k et est donnée par :

$$f_n(t) = \beta(\beta t)^{n-1}/(n-1)!\,\mathrm{e}^{-\beta t}\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(t), \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Par ailleurs, le système $\{f_n(t)\}_{n\in\mathbb{N}}$ est complet dans $L^2(\mathbb{R}_+)$ et son orthonormalisation conduit au système $\{g_n(t)\}_{n\in\mathbb{N}}$: $g_n(t) = \sqrt{2\beta}\,L_{n-1}^{(0)}\exp(-\beta\,t)\,\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(t)$, où $L_n^{(0)}$ est le polynôme de Laguerre.

En plus, nous avons $g_n(t) = \sum_{k=1}^n \Gamma_{n,k}\,f_k(t)$ où $\Gamma_{n,k} = (-2)^{k-1}\sqrt{2/\beta}\,C_{n-1}^{k-1}$.

En conséquence $R_X(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n\,g_n(|t|) \in L^2(\mathbb{R}_+)$ avec $a_n = \int_0^{+\infty} R_X(t)\,g_n(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{k=1}^n \Gamma_{n,k}\,\rho_k$.

Enfin, ϕ_X se représente dans $L^2(\mathbb{R})$ de la façon suivante :

$$\phi_X(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n\mathcal{G}_n(\lambda) \in L^2(\mathbb{R}) \quad \text{où } \mathcal{G}_n(\lambda) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\exp(-\mathrm{i}t\lambda)g_n\big(|t|\big)\,\mathrm{d}t.$$

Soit N un entier, considérons l'échantillon $\{X(t_k),\ k = 1,\ldots,N\}$ de $\check{X}$. On estime $\phi_X(\lambda)$ par l'estimateur tronqué :

$$\hat{\phi}_X(\lambda) = \sum_{n=1}^{M_N} W_n(N)\hat{a}_n(N)\mathcal{G}_n(\lambda),$$

où $W_n(N) = W(\exp(n\varsigma)/N^b)$ avec $\varsigma > \ln(3)$ et $0 < b < \varsigma/(2\ln(3))$.

Remarque 1. Le choix de la forme de W_n est motivé par des applications pratiques [10]. Un autre choix (sous quelques conditions supplémentaires sur W) n'aura pas d'incidence sur nos résultats.

Le choix de la fonction W permettra d'établir ci-dessous la convergence de l'estimateur ; elle est donc supposée vérifier

$$\big|W(u)\big| \leqslant W(0) = 1, \quad \big|u\,W(u)\big| \leqslant \kappa_1, \quad \forall u \geqslant 1 \quad \text{and} \quad 1 - W(u) \leqslant \kappa_2|u|, \quad \forall u \in \mathbb{R}, \tag{4}$$

où κ_1 et κ_2 sont des constantes positives.

Les coefficients sont estimés par : $\hat{a}_n(N) = \sum_{k=1}^n m_{n,k}\hat{\rho}_k(N)$, où $m_{n,k} = (-2)^{k-1}\sqrt{2/\beta}\,C_{n-1}^{k-1}$ et où $\hat{\rho}_k(N) = 1/N\sum_{j=1}^{N-k} X(t_j)X(t_{j+k})$ si $1 \leqslant k \leqslant N$ et 0 sinon.

En utilisant le résultat de [5], nous obtenons alors :

Théorème 3.1. *Soit X un processus réel, borné, continu en moyenne quadratique et de trajectoires presque sûrement continues. De plus X est α-mélangeant, avec α tel que $t\alpha(t) \in L^1(\mathbb{R})$, et $M_N = (N/\ln(N))^{\delta/2}$, où $0 < \delta < u$ et $u > 5/4$. Si les hypothèses* (4) *sont satisfaites, alors* :

$$\sup_{\lambda\in\mathbb{R}}\big|\hat{\phi}_X(\lambda) - \phi_X(\lambda)\big| \to 0, \quad \textit{p.co., quand } N \to +\infty.$$

Corollaire 3.2. *Le résultat du Théorème* 3.1 *reste valide, si l'on remplace l'hypothèse* $t\alpha(t) \in L^1(\mathbb{R})$, *par l'une des conditions usuelles suivantes* :

$$\alpha(t) = c\mu^t, \quad \textit{avec } c > 0,\ 0 < \mu < 1, \quad \textit{et} \quad M_N = N^\eta \quad \textit{où } 0 < \eta < 1/2,$$
$$\alpha(t) = ct^{-\nu}, \quad \textit{pour } t \geqslant 1,\ c > 1, \quad \textit{et} \quad M_N = \ln N^\eta \quad \textit{avec } 0 < \eta < 1.$$

Théorème 3.3. *Soit X un processus réel de second ordre, strictement stationnaire, borné, continu en moyenne quadratique, de trajectoires presque sûrement continues et GSM. Supposons que le paramètre de lissage satisfait* : $M_N = (\ln(N)/N)^{-\nu}$ *pour* $\nu > 4/25$. *Si les hypothèses* (4) *sont satisfaites, et* $\sum_{n=M_N+1}^{+\infty} |a_n| = \mathrm{O}(N^{-r}),\ r > 0$, *alors*

$$\sup_{\lambda\in\mathbb{R}} \big|\hat{\phi}_X(\lambda) - \phi_X(\lambda)\big| = \mathrm{O}\big(\ln(N)/N\big)^{2s/(2s+1)}, \quad p.co.,$$

avec $0 < s < \inf(\nu/(2-2\nu), 2r)$.

Remarque 2. (i) La condition de bornage du processus dans les Théorèmes 2.1, 2.3, 3.1 et 3.3 n'est pas une hypothèse fondamentale. Elle peut être remplacée par : $\exists c > 0$, tel que $\mathbb{E}|X_t|^k \leqslant c^{k-2} k!\ \mathbb{E}(X_t^2) < +\infty$ où $t = 1, \ldots, n$ et $k = 3, 4, \ldots$ (voir [1]).

(ii) Les processus satisfaisant l'hypothèse $\sum_{n=M_N+1}^{+\infty} |a_n| = \mathrm{O}(N^{-r}),\ r > 0$, appartiennent à la classe des processus dont la fonction de covariance vérifie (voir Lemme 2.1 dans [8]) : il existe un entier $r > 2$, tel que $\forall t \geqslant 0,\ R_X(t) \in \mathcal{AC}^r(\mathbb{R}^+)$ et $t^{r/2} R_X^{(k)}(t) \in L^2(\mathbb{R}^+)$ pour $k = 0, 1, \ldots, r$, où $\mathcal{AC}^r(\mathbb{R}^+)$ désigne l'ensemble des fonctions r-fois dérivables et de dérivées successives bornées, et $R_X^{(k)}$ est la dérivée d'ordre k de la fonction de covariance R_X. Le processus de Gauss–Markov en est un exemple.

Remerciements

Je tiens à remercier D. Politis de l'Université de Californie San Diego, pour les divers échanges très instructifs que nous avons eu sur le sujet, ainsi que les rapporteurs dont les critiques ont permis d'améliorer le contenu de cette note.

Références

[1] D. Bosq, Nonparametric Statistics for Stochastic Processes: Estimation and Prediction, Second edition, in: Lecture Notes in Statistics, Vol. 110, Springer-Verlag, 1998.
[2] D.R. Brillinger, Time Series Analysis and Theory, Holt, Rienhart and Winston, New York, 1975.
[3] M. Carbon, Sur la convergence uniforme presque sûre des estimateurs de la densité spectrale des processus stationnaires et mélangeants. Application à l'erreur de prédiction linéaire, C. R. Acad. Sci. Paris 292 (1981) 95–98.
[4] E.W. Carpenter, Explosions seismology, Science 147 (1967) 363–373.
[5] F. Charlot, M. Rachdi, On the statistical properties of continuous-time stationary process sampled by a random process, Statist. & Probab. Lett. 2003, in press.
[6] W.B. Davenport, W.L. Root, An Introduction to the Theory of Random Signals and Noise, McGraw-Hill, New York, 1958.
[7] K.S. Lii, E. Masry, Spectral estimation of continuous-time stationary processes from random sampling, Stochastic Process. Appl. 52 (1994) 39–64.
[8] E. Masry, Discrete-time spectral estimation of continuous-time processes: the orthogonal series method, Ann. Statist. (1980) 1100–1109.
[9] E. Masry, D. Klamer, C. Mirabile, Spectral estimation of continuous-time processes: performance comparison between periodic and poisson sampling schemes, IEEE Trans. Automat. Control AC-23 (4) (1978) 679–685.
[10] F. Messaci, Estimation de la densité spectrale d'un processus en temps continu par échantillonnage poissonnien (I), Pub. Inst. Statist. Univ. XXXIII (3) (1988) 33–48.
[11] M.I. Moore, P.J. Thomson, T.G.L. Shirtcliffe, Spectral analysis of ocean profiles from unequally spaced data, J. Geophys. Res. 93 (1988) 655–664.
[12] M.B. Priestley, Spectral Analysis and Time Series, Vol. 1: Univariate Series, Academic Press, 1981.
[13] M. Rachdi, Cross-validated choice of the spectral bandwidth for a continuous stationary process, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I 327 (8) (1998) 777–780.
[14] H.S. Shapiro, R.A. Silverman, Alias-free sampling of random noise, Soc. Indust. Appl. Math. 8 (2) (1960) 225–248.