Available online at www.sciencedirect.com

SCIENCE DIRECT®

C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 337 (2003) 705–710

COMPTES RENDUS MATHEMATIQUE

Équations aux dérivées partielles

Régularité dans une équation de Schrödinger avec potentiel singulier à distance finie et à l'infini

Lucie Baudouin, Otared Kavian, Jean-Pierre Puel

Laboratoire de mathématiques appliquées, Université de Versailles St Quentin, 45, avenue des États Unis, 78035 Versailles cedex, France

Reçu le 6 juin 2003 ; accepté après révision le 7 octobre 2003

Présenté par Pierre-Louis Lions

Résumé

Nous étudions dans cette Note l'équation de Schrödinger $\mathrm{i}\partial_t u + \Delta u + V_0 u + V_1 u = 0$ sur $\mathbb{R}^3 \times (0,T)$ avec pour condition initiale $u_0 \in \{v \in H^2(\mathbb{R}^3), \int_{\mathbb{R}^3}(1+|x|^2)^2|v|^2\,\mathrm{d}x < +\infty\}$ où V_0 est un potentiel singulier à distance finie, de type coulombien et où V_1, potentiel dont dérive un champ électrique, peut être non borné. Les deux potentiels peuvent dépendre des variables d'espace et de temps. Nous démontrons que cette équation d'évolution est bien posée et que la régularité de la condition initiale est conservée par la solution du problème. Les détails de la démonstration seront donnés ailleurs (Baudouin et al., à paraître). ***Pour citer cet article : L. Baudouin et al., C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 337 (2003).***

Abstract

Regularity in a Schrödinger equation with a potential singular at finite distance and at infinity. In this Note we study the Schrödinger equation $\mathrm{i}\partial_t u + \Delta u + V_0 u + V_1 u = 0$ on $\mathbb{R}^3 \times (0,T)$ with initial condition $u_0 \in \{v \in H^2(\mathbb{R}^3), \int_{\mathbb{R}^3}(1+|x|^2)^2|v|^2\,\mathrm{d}x < +\infty\}$ where V_0 is a coulombian potential, singular at finite distance and V_1 is an electric potential, possibly unbounded. Both of them may depend on space and time variables. We prove that this problem is well-posed and that the regularity of the initial data is conserved for the solution. The detailed proof will be given elsewhere (Baudouin et al., in press). ***To cite this article: L. Baudouin et al., C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 337 (2003).***

© 2003 Académie des sciences. Publié par Elsevier SAS. Tous droits réservés.

Abridged English version

We consider the following Schrödinger equation

$$\begin{cases} \mathrm{i}\partial_t u(x,t) + \Delta u(x,t) + V_0(x,t)u(x,t) + V_1(x,t)u(x,t) = 0, & x \in \mathbb{R}^3,\ t \in (0,T), \\ u(x,0) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}^3, \end{cases} \tag{1}$$

where V_0 and V_1 take their values in $\mathbb{R}$ and have non comparable properties. Actually, the hypotheses allow $V_0 + V_1$ to be the sum of a coulombian potential and an external electric potential which may be unbounded at infinity.

Adresses e-mail : baudouin@math.uvsq.fr (L. Baudouin), kavian@math.uvsq.fr (O. Kavian), jppuel@cmapx.polytechnique.fr (J.-P. Puel).

1631-073X/$ – see front matter
doi:10.1016/j.crma.2003.10.011

Let H^2 be the usual Sobolev space $H^2(\mathbb{R}^3)$. We define:

$$H_2=\left\{v\in L^2(\mathbb{R}^3),\ \int_{\mathbb{R}^3}\left(1+|x|^2\right)^2|v|^2\,\mathrm{d}x<+\infty\right\}.$$

Our main result is the following:

Theorem 0.1. *Let p, q and θ be such that $p\geqslant 2$, $2\leqslant q<6$ and $\frac{2}{\theta}=3(\frac{1}{2}-\frac{1}{q})$ and q' and θ' be the conjugate exponents of q and θ. We assume that V_0 and V_1 take their values in $\mathbb{R}$ and satisfy*

$$V_0\in L^\infty\left(0,T;L^p(\mathbb{R}^3)\right),\qquad \partial_t V_0\in L^{\theta'}\left(0,T;L^{q'}(\mathbb{R}^3)\right),$$
$$\left(1+|x|^2\right)^{-1}V_1\in L^\infty\left(0,T;L^\infty(\mathbb{R}^3)\right)\quad \text{and}\quad \left(1+|x|^2\right)^{-1}\partial_t V_1\in L^1\left(0,T;L^\infty(\mathbb{R}^3)\right).$$

If $u_0\in H^2\cap H_2$, then there exists a unique solution u to Eq. (1) with $u\in L^\infty(0,T;H^2\cap H_2)$ and $\partial_t u\in L^\infty(0,T;L^2(\mathbb{R}^3))$.

In the case when $V_1=0$, K. Yajima [4] proved the $H^2(\mathbb{R}^d)$ regularity of the solution of (1). Here, in order to prove the theorem, we first regularize u_0, V_0 and V_1 by u_0^ε, V_0^ε and V_1^ε and obtain accurate estimates, independent of ε. The key point is to find an $L^2(\mathbb{R}^3)$-estimate of the time derivative of the solution u^ε. We approximate the equation solved by $\partial_t u^\varepsilon$, using an alternate direction method to separate the effects of V_0^ε and V_1^ε on each time sub-interval. We finally obtain an estimate which is independent of the splitting parameter and of ε. This type of result has already been obtained in the particular case when $V_1=-E(t)x_1$ in [2] and in [3] for the study of a bilinear optimal control problem. The application of our result to the bilinear control will be treated in a forthcoming paper.

1. Formulation des hypothèses et résultats

L'équation de Schrödinger que nous considérons dans $\mathbb{R}^3\times(0,T)$ pour un $T>0$ fixé est la suivante :

$$\begin{cases} \mathrm{i}\partial_t u(x,t)+\Delta u(x,t)+V_0(x,t)u(x,t)+V_1(x,t)u(x,t)=0, & \text{pour } (x,t)\in\mathbb{R}^3\times(0,T),\\ u(x,0)=u_0(x), & \text{pour } x\in\mathbb{R}^3, \end{cases}\tag{1}$$

où les potentiels V_0 et V_1 vérifient que

$$\begin{aligned} &V_0 \text{ et } V_1 \text{ sont à valeurs réelles},\\ &V_0\in L^\infty\left(0,T;L^p(\mathbb{R}^3)\right),\\ &\partial_t V_0\in L^{\theta'}\left(0,T;L^{q'}(\mathbb{R}^3)\right),\\ &\left(1+|x|^2\right)^{-1}V_1\in L^\infty\left(0,T;L^\infty(\mathbb{R}^3)\right)\quad \text{et}\\ &\left(1+|x|^2\right)^{-1}\partial_t V_1\in L^1\left(0,T;L^\infty(\mathbb{R}^3)\right), \end{aligned}\tag{2}$$

avec $p\geqslant 2$, $2\leqslant q<6$ et $\frac{2}{\theta}=3(\frac{1}{2}-\frac{1}{q})$ et où q' et θ' sont les exposants conjugués de q et θ.

En fait, ces conditions sont suffisament générales pour englober les potentiels coulombiens du type $\frac{k}{|x-a(t)|}$ avec $a\in W^{1,\infty}(0,T;\mathbb{R}^3)$ et ceux correspondant à un champ électrique extérieur du type $E(t,x)=\nabla V_1(x,t)$, E étant par exemple créé par un faisceau laser. On note H^2 l'espace de Sobolev usuel $H^2(\mathbb{R}^3)$ et on définit l'espace fonctionnel

$$H_2=\left\{v\in L^2(\mathbb{R}^3),\ \int_{\mathbb{R}^3}\left(1+|x|^2\right)^2|v|^2\,\mathrm{d}x\right\}.$$

Les résultats principaux de notre travail permettent la démonstration du théorème suivant :

Théorème 1.1. *Sous la condition* (2)*, si* $u_0 \in H^2 \cap H_2$*, alors il existe une unique solution* u *à l'Éq.* (1) *avec* $u \in L^\infty(0,T;\, H^2 \cap H_2)$ *et* $\partial_t u \in L^\infty(0,T;\, L^2(\mathbb{R}^3))$.

Dans la situation où $V_1 = 0$, K. Yajima [4] démontre que l'Éq. (1) étudiée dans l'espace $\mathbb{R}^d \times (0,T)$ avec $u_0 \in H^2(\mathbb{R}^d)$ admet une unique solution $u \in C([0,T];\, H^2(\mathbb{R}^d)) \cap C^1([0,T];\, L^2(\mathbb{R}^d))$.

Remarque 1. On peut démontrer que la solution u est faiblement continue en temps, à valeurs dans l'espace concerné et qu'elle est fortement continue en temps à valeurs dans l'espace $H^1 \cap H_1 = \{v \in H^1(\mathbb{R}^3),\ \int_{\mathbb{R}^3}(1 + |x|^2)|v|^2\,\mathrm{d}x\}$.

Dans la suite de cette Note, nous allons donner une ébauche de la méthode de démonstration du Théorème 1.1.

Remarque 2. Sous des hypothèses un peu plus fortes pour le potentiel V_1 et avec un potentiel V_0 coulombien, nous avons pu établir à l'aide de ce théorème de régularité, un résultat de contrôle optimal bilinéaire que l'on pourra trouver dans [1].

2. Schéma de la démonstration

Afin d'étudier l'Éq. (1), nous approchons u_0, V_0 et V_1 par $u_0^\varepsilon \in C_c^\infty(\mathbb{R}^3)$ et par les potentiels à valeurs réelles V_0^ε et $V_1^\varepsilon \ \in C^1([0,T];\, C^1 \cap L^\infty(\mathbb{R}^3))$, les normes de V_0^ε et V_1^ε dans les espaces de définition de V_0 et V_1 etant majorées à une constante près par celles de V_0 et V_1 respectivement. Une régularisation classique permet d'obtenir ces approximations (cf. [4], p. 423) mais il faut préalablement appliquer une fonction de troncature à V_1 pour pouvoir utiliser le lemme suivant, qui permet d'amorcer notre raisonnement.

Lemme 2.1. *Si* V *est un potentiel à valeurs réelles tel que* $V \in C^1([0,T];\, L^\infty(\mathbb{R}^3))$ *et si* $u_0 \in H^2 \cap H_2$ *alors il existe une unique solution au problème*

$$\begin{cases} \mathrm{i}\partial_t u(x,t) + \Delta u(x,t) + V(x,t)u(x,t) = 0, & \textit{pour}\ \ (x,t) \in \mathbb{R}^3 \times (0,T), \\ u(x,0) = u_0(x), \quad \textit{pour}\ x \in \mathbb{R}^3 \end{cases}$$

et on a $u \in C([0,T];\, H^2 \cap H_2)$.

Pour démontrer ce résultat, on se réfère tout d'abord à [4] pour pouvoir affirmer qu'il existe une unique solution $u \in C([0,T];\, H^2)$. On considère ensuite la fonction $\zeta \in C_c^\infty(\mathbb{R}^3)$, $0 \leqslant \zeta \leqslant 1$, telle que :

$$\zeta(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } |x| \leqslant 1, \\ 0 & \text{si } |x| \geqslant 2 \end{cases}$$

puis on construit

$$\theta_R(x) = |x|^2 \zeta\left(\frac{x}{R}\right)$$

qui a la particularité de vérifier que pour tout x dans $\mathbb{R}^3$, $|\nabla\theta_R(x)|^2 \leqslant C\theta_R(x)$ où C est une constante indépendante de $R > 1$. Des estimations d'énergie classiques permettent de démontrer que

$$E_R(t) = \int_{\mathbb{R}^3} \bigl(1 + \theta_R(x) + \theta_R(x)^2\bigr)\bigl|u(x,t)\bigr|^2\,\mathrm{d}x + \int_{\mathbb{R}^3} \bigl|\nabla u(x,t)\bigr|^2\,\mathrm{d}x$$

vérifie

$$\partial_t E_R(t) \leqslant C E_R(t) + C'.$$

Le lemme de Gronwall et la possibilité de faire tendre R vers l'infini donnent alors une solution $u(t) \in H_2$ pour $t \in [0, T]$ et le Lemme 2.1 est démontré.

On fixe ainsi un $\varepsilon > 0$ et on considère la solution $u_\varepsilon \in C([0, T]; H^2 \cap H_2)$ de

$$\begin{cases} \mathrm{i}\partial_t u_\varepsilon + \Delta u_\varepsilon + V_0^\varepsilon u_\varepsilon + V_1^\varepsilon u_\varepsilon = 0, & \text{dans } \mathbb{R}^3 \times (0, T), \\ u_\varepsilon(x, 0) = u_0^\varepsilon(x), & \text{pour } x \in \mathbb{R}^3. \end{cases} \tag{3}$$

Dans un premier temps, puisque les potentiels V_0 et V_1 vérifient (2) et toujours à l'aide des techniques classiques d'estimation d'énergie, nous démontrons une inégalité concernant une partie de l'énergie $E_\varepsilon(t) = \|(1 + |x|^2)u_\varepsilon\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)} + \|\partial_t u_\varepsilon\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)}$ du système (3). Il faut noter que la constante multiplicative C qui apparait ci-dessous ne dépend pas de ε.

$$\partial_t \Big(\big\| \big(1 + |x|^2\big) u_\varepsilon(t) \big\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)} \Big) \leqslant C \left(\|V_0(t)\|^2_{L^p(\mathbb{R}^3)} + \left\| \frac{V_1(t)}{1 + |x|^2} \right\|^2_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} \right) E_\varepsilon(t).$$

Remarque 3. Les calculs et intégrations par parties effectués nécessairement pour arriver à cette estimation sont légitimés par la grande régularité des données.

On a par suite, pour tout t dans $[0, T]$,

$$\big\| \big(1 + |x|^2\big) u_\varepsilon(t) \big\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)} \leqslant C \|u_0^\varepsilon\|^2_{H_2} + C \int_0^t \left(\|V_0(s)\|^2_{L^p(\mathbb{R}^3)} + \left\| \frac{V_1(s)}{1 + |x|^2} \right\|^2_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} \right) E_\varepsilon(s)\,\mathrm{d}s.$$

Remarque 4. Un raisonnement classique utilisant les inégalités de Hölder, d'interpolation et de Young permet de montrer que u_ε vérifie

$$\|u_\varepsilon\|_{H^2} \leqslant C_\rho \|\partial_t u_\varepsilon\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} + C_\rho \big\| \big(1 + |x|^2\big) u_\varepsilon \big\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}, \tag{4}$$

où C_ρ est une constante indépendante de ε mais dépendante de ρ qui est telle que V_0 et V_1 appartiennent à la boule de rayon ρ dans les espaces où ils sont définis.

Dans un deuxième temps, il s'agit d'obtenir une estimation $L^2(\mathbb{R}^3)$ de $\partial_t u_\varepsilon$. On considère $\partial_t u_\varepsilon = w_\varepsilon^1 + w_\varepsilon^2$ et $L_\varepsilon = \mathrm{i}\partial_t + \Delta + V_0^\varepsilon + V_1^\varepsilon$ où w_ε^1 et w_ε^2 sont respectivement solutions de

$$\begin{cases} L_\varepsilon w_\varepsilon^1 = -\partial_t V_1^\varepsilon u_\varepsilon, & \text{dans } \mathbb{R}^3 \times (0, T), \\ w_\varepsilon^1(0) = \mathrm{i}\Delta u_0^\varepsilon + \mathrm{i} V_0^\varepsilon(0) u_0^\varepsilon + \mathrm{i} V_1^\varepsilon(0) u_0^\varepsilon, & \text{dans } \mathbb{R}^3, \end{cases} \tag{5}$$

et

$$\begin{cases} L_\varepsilon w_\varepsilon^2 = -\partial_t V_0^\varepsilon u_\varepsilon, & \text{dans } \mathbb{R}^3 \times (0, T), \\ w_\varepsilon^2(0) = 0, & \text{dans } \mathbb{R}^3. \end{cases} \tag{6}$$

En travaillant sur l'Éq. (5), il est aisé de voir que pour $t \in [0, T]$,

$$\begin{aligned} \big\| w_\varepsilon^1(t) \big\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)} \leqslant{}& C \left(\|V_0\|^2_{L^\infty(0,T;L^p(\mathbb{R}^3))} + \left\| \frac{V_1}{1 + |x|^2} \right\|^2_{L^\infty(0,T;L^\infty(\mathbb{R}^3))} \right) \|u_0^\varepsilon\|^2_{H^2 \cap H_2} \\ &+ C \int_0^t \left\| \frac{\partial_t V_1(s)}{1 + |x|^2} \right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} E_\varepsilon(s)\,\mathrm{d}s. \end{aligned}$$

On aura besoin des lemmes suivant pour étudier l'Éq. (6) :

Lemme 2.2 (Inégalité de Strichartz). *Soient a, b, q et r tels que*

$$2 \leqslant q \leqslant 2^* = \frac{2d}{d-2}, \qquad \frac{2}{\theta} = d\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q}\right),$$
$$2 \leqslant b \leqslant 2^*, \qquad \frac{2}{a} = d\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{b}\right),$$

soient θ' et q' les exposants conjugués de θ et q et soit

$$F(x,t) = \int_0^t S(t-s) f(x,s)\,\mathrm{d}s,$$

où $(S(t))_{t \geqslant 0}$ représente le semi-groupe libre de Schrödinger. Si $f \in L^{\theta'}(0,T; L^{q'}(\mathbb{R}^d))$, alors on a

$$\|F\|_{L^a(0,T;L^b(\mathbb{R}^d))} \leqslant C\|f\|_{L^{\theta'}(0,T;L^{q'}(\mathbb{R}^d))}.$$

On pourra se référer à [4] et [6] pour la démonstration. Dans cette Note, $d = 3$.

Lemme 2.3. *Soient θ et q tels que $2 \leqslant q \leqslant 6$ et $\frac{2}{\theta} = 3(\frac{1}{2} - \frac{1}{q})$ et soient θ' et q' leurs exposants conjugués. Si $V \in C^0([0,T]; C^1(\mathbb{R}^3))$ prend ses valeurs dans $\mathbb{R}$ et si $f \in L^{\theta'}(0,T; L^{q'}(\mathbb{R}^3))$, alors*

$$\begin{cases} \mathrm{i}\partial_t v(x,t) + \Delta v(x,t) + V(x,t)v(x,t) = f(x,t), & x \in \mathbb{R}^3,\ t \in (0,T), \\ v(x,0) = 0, & x \in \mathbb{R}^3 \end{cases} \tag{7}$$

admet une unique solution $v \in L^\infty(0,T; L^2(\mathbb{R}^3))$ et il existe une constante $C > 0$ indépendante de V telle que

$$\|v\|_{L^\infty(0,T;L^2(\mathbb{R}^3))} \leqslant C\|f\|_{L^{\theta'}(0,T;L^{q'}(\mathbb{R}^3))}. \tag{8}$$

La démonstration utilise la méthode des directions alternées. Pour un entier $N \geqslant 1$ fixé on décompose l'opérateur $\Delta + V$ et le second membre f sur des intervalles de longueur T/N. On obtient à partir de (7) deux types d'équations pour lesquelles sont connues existence, unicité et estimations d'énergie de la solution. On pose $v_0(0) = 0$ et pour $0 \leqslant n < N$ entier, on définit les fonctions $v_{n+\frac{1}{2}}$ et v_{n+1} par les équations :

$$\begin{cases} \mathrm{i}\partial_t v_{n+\frac{1}{2}} + \Delta v_{n+\frac{1}{2}} = 2f, & \text{dans } \mathbb{R}^3 \times [\frac{nT}{N}, \frac{(2n+1)T}{2N}], \\ v_{n+\frac{1}{2}}(\frac{nT}{N}) = v_n(\frac{nT}{N}), & \text{dans } \mathbb{R}^3, \end{cases} \tag{9}$$

$$\begin{cases} \mathrm{i}\partial_t v_{n+1} + \Delta v_{n+1} + 2V v_{n+1} = 0, & \text{dans } \mathbb{R}^3 \times [\frac{(2n+1)T}{2N}, \frac{(n+1)T}{N}], \\ v_{n+1}(\frac{(2n+1)T}{2N}) = v_{n+\frac{1}{2}}(\frac{(2n+1)T}{2N}), & \text{dans } \mathbb{R}^3. \end{cases} \tag{10}$$

Pour les équations de type (9), on utilise l'estimation du Lemme 2.2 sur chaque sous-intervalle et en ce qui concerne les équations de type (10), la conservation de la norme $L^2(\mathbb{R}^3)$ est bien connue. On définit enfin $v^{(N)}$ sur $[0,T]$ de la manière suivante : pour $0 \leqslant n \leqslant N-1$ on pose

$$\begin{cases} v^{(N)} = v_{n+\frac{1}{2}}, & \text{sur } \mathbb{R}^3 \times [\frac{nT}{N}, \frac{(2n+1)T}{2N}], \\ v^{(N)} = v_{n+1}, & \text{sur } \mathbb{R}^3 \times [\frac{(2n+1)T}{2N}, \frac{(n+1)T}{N}], \end{cases}$$

on obtient $v^{(N)} \in C([0,T]; L^2(\mathbb{R}^3))$ ainsi que l'estimation suivante, indépendante de N :

$$\left\|v^{(N)}\right\|_{L^\infty(0,T;L^2(\mathbb{R}^3))} \leqslant C\|f\|_{L^{\theta'}(0,T;L^{q'}(\mathbb{R}^3))}.$$

On fait alors tendre N vers l'infini et on obtient l'estimation (8) pour un certain v qui est en fait l'unique solution de l'Éq. (7), ce que l'on démontre en utilisant la compacité de $(v^{(N)})_{N \geqslant 1}$ dans $C([0,T]; H^{-1}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^3))$ et la référence [5].

Par la suite, notre hypothèse sur $\partial_t V_0$ ainsi que le Lemme 2.3 permettent d'écrire, pour $\alpha = \frac{\theta'}{2}$, $\tau \in [0, T]$ et une fonction $\delta \in L^1(0, T)$:

$$\left\|w_\varepsilon^2\right\|_{L^\infty(0,\tau;L^2(\mathbb{R}^3))} \leqslant C\|\partial_t V_0^\varepsilon u_\varepsilon\|_{L^{\theta'}(0,\tau;L^{q'}(\mathbb{R}^3))} \leqslant C_\rho \left(\int_0^\tau \delta(s) E_\varepsilon(s)^\alpha \, \mathrm{d}s\right)^{1/(2\alpha)}.$$

Donc pour $t \in [0, T]$

$$\left\|w_\varepsilon^2(t)\right\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)} \leqslant C_\rho \left(\int_0^t \delta(s) E_\varepsilon(s)^\alpha \, \mathrm{d}s\right)^{1/\alpha}.$$

Nous avons ainsi finalement démontré qu'il existe des constantes C, C' et C'' qui ne dépendent pas de ε et qui sont proportionnelles à

$$\|V_0\|^2_{L^\infty(0,T;L^p(\mathbb{R}^3))} + \left\|\left(1+|x|^2\right)^{-1} V_1\right\|^2_{L^\infty((0,T)\times\mathbb{R}^3)}$$

telles que pour $t \in [0, T]$,

$$E_\varepsilon(t) \leqslant C\|u_0^\varepsilon\|^2_{H^2\cap H_2} + C' \int_0^t \gamma(s) E_\varepsilon(s)\, \mathrm{d}s + C''\left(\int_0^t \delta(s) E_\varepsilon(s)^\alpha \, \mathrm{d}s\right)^{1/\alpha}$$

avec $\gamma, \delta \in L^1(0, T)$, où $\gamma(s) = \|(1+|x|^2)^{-1}\partial_t V_1(s)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)}$ et $\delta(s) = \|\partial_t V_0(s)\|^{\theta'}_{L^{q'}(\mathbb{R}^3)}$.

L'application du lemme de Gronwall à la fonction

$$\psi(t) = C\|u_0^\varepsilon\|^2_{H^2\cap H_2} + C' \int_0^t \gamma(s) E_\varepsilon(s)\, \mathrm{d}s + C''\left(\int_0^t \delta(s) E_\varepsilon(s)^\alpha \, \mathrm{d}s\right)^{1/\alpha}$$

permet enfin d'obtenir $\forall t \in [0, T]$, $E_\varepsilon(t) \leqslant K(T)\|u_0^\varepsilon\|^2_{H^2\cap H_2}$. On peut alors faire tendre ε vers 0 et passer à la limite au sens des distributions dans l'Éq. (3). Cela donne

$$\left\|u(t)\right\|^2_{H^2\cap H_2} + \left\|\partial_t u(t)\right\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)} \leqslant K(T)\|u_0\|^2_{H^2\cap H_2}, \quad \forall t \in [0, T],$$

où u est la solution de (1) et vérifie donc $u \in L^\infty(0, T; H^2 \cap H_2)$ et $\partial_t u \in L^\infty(0, T; L^2(\mathbb{R}^3))$. L'unicité est démontrée dans $L^\infty(0, T; L^2(\mathbb{R}^3))$.

Remarque 5. L'application de ce résultat à un problème de contrôle optimal bilinéaire sera traitée dans [1]. Des travaux en cours s'appuient également sur ce théorème pour un problème de Schrödinger non linéaire couplé avec une equation différentielle ordinaire, dans l'esprit de ce qui est présenté dans la référence [2].

Références

[1] L. Baudouin, O. Kavian, J.-P. Puel, Regularity for a Schrödinger equation with a potential singular at finite distance and at infinity and application to a bilinear optimal control problem, à paraître.

[2] E. Cancès, C. Le Bris, On the time-dependent Hartree–Fock equations coupled with a classical nuclear dynamics, Math. Models Methods Appl. Sci. 9 (7) (1999) 963–990.

[3] E. Cancès, C. Le Bris, M. Pilot, Contrôle optimal bilinéaire d'une equation de Schrödinger, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 330 (2000) 567–571.

[4] K. Yajima, Existence of solutions for Schrödinger evolution equations, Comm. Math. Phys. 110 (1987) 415–426.

[5] J. Simon, Compact sets in the space $L^p(0, T; B)$, Ann. Mat. Pura Appl. (4) 146 (1987) 65–96.

[6] R. Strichartz, Restrictions of Fourier transforms to quadratic surfaces and decay of solutions of wave equations, Duke Math. J. 44 (1977) 705–714.