Available online at www.sciencedirect.com
SCIENCE DIRECT®

ELSEVIER

C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 336 (2003) 447–452

COMPTES RENDUS MATHEMATIQUE

Problèmes mathématiques de la mécanique

Étude d'un modèle de fragmentation secondaire pour les brouillards de gouttelettes
Study of a secondary breakup model for sprays

Guillaume Dufour [a], Marc Massot [b], Philippe Villedieu [a,c]

[a] MIP – UMR CNRS 5640, 118, route de Narbonne, 31062 Toulouse cedex 04, France
[b] MAPLY – UMR 5585, laboratoire de mathématiques appliquées de Lyon, Université Claude Bernard, Lyon 1, 69622 Villeurbanne cedex, France
[c] ONERA, centre de Toulouse, 2, avenue Edmond-Belin, 31055 Toulouse cedex 04, France

Reçu le 4 novembre 2002 ; accepté le 4 février 2003

Présenté par Olivier Pironneau

Résumé

La fragmentation secondaire désigne l'éclatement d'une goutte de liquide sous l'effet des forces exercées par le gaz environnant. Dans cette Note, nous proposons une modélisation de ce phénomène pour un brouillard de gouttes en nous appuyant sur le formalisme de la théorie cinétique et en nous servant de corrélations expérimentales (L.-P. Hsiang, G.M. Faeth, Int. J. Multiphase Flow 19 (5) (1993) 721–735 ; R. Maxey, J. Riley, Phys. Fluids 26 (4) (1983) 883–889 ; M. Pilch, C.A. Erdman, Int. J. Multiphase Flow 13 (6) (1987) 741–757) pour déterminer le taux de fragmentation et les caractéristiques des gouttelettes résultantes. Nous effectuons ensuite une étude mathématique de l'équation cinétique obtenue et nous montrons, sous des hypothèses physiquement peu restrictives, un théorème d'existence et d'unicité, ainsi qu'un résultat de comportement en temps long. ***Pour citer cet article : G. Dufour et al., C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 336 (2003).***

Abstract

In this Note, we first present a model for droplet secondary breakup, in liquid sprays. This model is based on the kinetic theory formalism and uses experimental correlations found in the literature (L.-P. Hsiang, G.M. Faeth, Int. J. Multiphase Flow 19 (5) (1993) 721–735; R. Maxey, J. Riley, Phys. Fluids 26 (4) (1983) 883–889; M. Pilch, C.A. Erdman, Int. J. Multiphase Flow 13 (6) (1987) 741–757) to determine the fragmentation rate and its outcome. We then conduct a mathematical study of the resulting kinetic equation. We prove, under some physically reasonable assumptions, an existence and uniqueness theorem and characterize the long-time behaviour of the solution.***To cite this article: G. Dufour et al., C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 336 (2003).***

Abridged English version

Sprays, where spray is understood as a dispersed phase of liquid droplets carried by a gaseous phase, are involved in a lot of combustion industrial applications, where the fuel is generally stored in condensed form and injected

Adresses e-mail : dufour@mip.ups-tlse.fr (G. Dufour), massot@maply.univ-lyon.fr (M. Massot), philippe.villedieu@cert.fr (P. Villedieu).

1631-073X/03/$ – see front matter © 2003 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS. Tous droits réservés.
doi:10.1016/S1631-073X(03)00067-0

as a spray in the carrier gaseous flow. The polydisperse character of the spray has a strong effect on all involved physical phenomena (vaporization rate, turbulent mixing, flame structure [5]). Secondary breakup is one of the physical mechanism which can lead to a strong modification of the droplet size distribution. The aim of this Note is to propose a kinetic model which takes into account this phenomenon and to prove its well-posedness under some physically reasonable assumptions.

In order to simplify the mathematical analysis, we assume that the characteristics of the gaseous phase (the density ρ_g and the velocity U_g) are given and do not depend on time t and space position x. The liquid phase is described using the droplet density function $f(t,x,r)$ where r denotes the droplet radius and v the droplet velocity, such that, by definition, $f(t,x,r,v)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}v$ denotes the number of droplets located at time t in a neighborhood $\mathrm{d}x\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}v$ around (x,r,v).

Physically, droplet secondary breakup may only occur beyond a critical Weber number We_c, where the Weber is defined as $We = 2r\rho_g\|v-U_g\|^2/\sigma$ with σ being the liquid surface tension. This phenomenon takes place when surface tension forces are not able anymore to resist to the aerodynamical stresses exerted by the gas on the droplet surface.

The evaluation of the fragmentation rate requires an estimate of the mean time it takes for a droplet to break. The TAB model [2,7] is based on an additional parameter (the droplet deformation) which is solution of a given evolution equation. It is assumed that breakup occurs if the deformation becomes greater than the initial radius of the droplet and this yields a deterministic way to compute the breakup rate. Here, since we want our model to remain valid in a large range of velocities and we prefer to avoid additional variables in the droplet distribution function, we have chosen to use experimental results to compute the breakup time. Following Villedieu and Hylkema [9], we introduce a statistical *breakup frequency* which we take equal to the expression (2) where ρ_l denotes the droplet density [1,9]. We also need to define the droplet size and velocity distribution after breakup, denoted by h. This can be done thanks to some empirical results found in the literature. Finally, taking into account the droplets that disappear by breakup and those that appear due to the fragmentation of a larger one, the "breakup operator" reads:

$$\Gamma(f)(r,v) = -\nu(r,v)f(r,v) + \int_{\Omega_r} \nu(r^*,v^*)h(r,v,r^*,v^*)f(r^*,v^*)\,\mathrm{d}r^*\,\mathrm{d}v^*, \tag{1}$$

where $\Omega_r =]r,+\infty[\times\mathbb{R}^3_v$. For more details, the reader may refer to [3]. Finally, the kinetic equation modelling the evolution of the spray [10,6] reads:

$$\begin{cases}\partial_t f + \partial_x\cdot(vf) + \partial_v\cdot(Af) = \Gamma(f),\\ f(0,x,r,v) = f_0(x,r,v),\end{cases}\qquad A = \frac{U_g - v}{\tau(r)},\ \ \tau(r) = \beta r^2, \tag{P}$$

where A represents the acceleration of a droplet due to the drag force and β is a positive constant related to the droplet density and the gas bulk viscosity.

In the present work, under some reasonable assumptions (H1) and (H2) on h and ν, we prove the following theorem (notations are defined below):

Theorem 0.1. *Let $f_0\in\mathcal{M}^6_b$ be positive. The problem* (P) *admits a unique positive solution $f\in L^\infty_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+,\mathcal{M}^3_b)$, weak $\star$ continuous. We also have the following regularity result, denoting* $\mathrm{d}\omega = \mathrm{d}x\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}v$:
- *If $f_0\in L^1(\Omega_x, r^3(1+\|v\|^6)\,\mathrm{d}\omega)$ then $f\in\mathcal{C}(\mathbb{R}_+, L^1(\Omega_x, r^3(1+\|v\|^3)\,\mathrm{d}\omega))$;*
- *If $f_0\in\mathcal{C}^1(\Omega_x)\cap L^1(\Omega_x, r^3(1+\|v\|^6)\,\mathrm{d}\omega)$ then $f\in\mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+,\mathcal{C}^1(\Omega_x)\cap L^1(\Omega_x, r^3(1+\|v\|^3)\,\mathrm{d}\omega))$.*

Let K be a compact set with respect to radius and velocity. The key idea of the demonstration is that the breakup operator is bounded from the space of K-supported measures into itself. Hence, we begin our proof by considering compactly-supported initial data and we use a classical semi-group and fixed point method to demonstrate existence and uniqueness of solutions. We then extend this result to any initial data which is approached by compactly-supported measures. Finally, we show that there is no accumulation of mass close to the null radius and that the droplet velocity tends to the gas one due to the combined effects of drag and breakup.

1. Introduction

Un brouillard est constitué d'une phase gazeuse porteuse et d'une phase liquide dispersée sous forme de fines gouttelettes. On rencontre ce type d'écoulement dans de nombreuses applications industrielles, en particulier dans le domaine de la combustion où, pour des raisons d'encombrement, le carburant est généralement stocké sous forme liquide et ensuite pulvérisé sous forme de brouillard dans la chambre du moteur. Dans ce cas, la granulométrie de la phase liquide joue un rôle déterminant sur le rendement de la combustion et l'émission de polluants, car le taux d'évaporation des gouttes et la qualité du mélange entre les deux phases en dépendent directement [5].

Dans cette Note, nous proposons tout d'abord un modèle permettant de prendre en compte les effets de la fragmentation secondaire sur l'évolution de la granulométrie du brouillard. Ce modèle est de type cinétique, au sens où la phase liquide est décrite par une fonction f, la densité de gouttelettes, dépendant du temps t, de la position x, du rayon des gouttes r et de leur vitesse v et telle que, par définition, $f(t,x,r,v)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}v$ représente le nombre moyen de gouttes (au sens statistique) situées, à l'instant t, dans un volume $\mathrm{d}x\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}v$ autour du point (x,r,v). Nous montrons ensuite, sous des hypothèses physiquement réalistes, un théorème d'existence et d'unicité pour les solutions de l'équation cinétique obtenue ainsi qu'un résultat de comportement en temps long.

2. Modélisation de la fragmentation

La forme générale de l'équation d'évolution pour f, introduite dans [10], est la suivante :

$$\begin{cases} \partial_t f + \partial_x \cdot (vf) + \partial_v \cdot (Af) = \Gamma(f), \\ f(0,x,r,v) = f_0(x,r,v) \end{cases} \qquad \text{avec } A = \frac{U_g - v}{\tau(r)} \text{ et } \tau(r) = \beta r^2, \tag{P}$$

où Γ désigne l'opérateur de fragmentation, A l'accélération d'une gouttelette due à la force de traînée et β est une constante positive dépendant de la densité de la goutte et de la viscosité dynamique du gaz [6].

Les termes d'évaporation et de collision ont été omis par souci de simplicité. De plus, on supposera dans la suite que les caractéristiques de la phase gazeuse, sa densité ρ_g et sa vitesse U_g, sont des constantes fixées.

Pour déterminer l'expression de l'opérateur Γ, il est nécessaire de disposer de relations définissant la fréquence de fragmentation et la distribution en taille et vitesse des gouttelettes produites par « breakup ». La rupture d'une goutte est pilotée par la compétition entre les forces de tension de surface et les forces de pression et de cisaillement aérodynamiques. Une goutte n'est susceptible de se fragmenter que si son nombre de Weber, $We = 2r\rho_g\|v-U_g\|^2/\sigma$, est supérieur à une valeur critique, notée We_c, de l'ordre de 10.

Toutefois, même au delà de cette valeur, la rupture de la goutte n'est pas instantanée. Pour estimer le temps de breakup, le modèle TAB [2,7] introduit une variable supplémentaire – la « déformation » de la goutte – et lui associe une équation d'évolution. Le critère de rupture retenu est l'amplitude de la déformation par rapport au rayon initial de la goutte. Ici, par souci de validité dans une grande plage de vitesses et également pour éviter l'introduction de variables supplémentaires, nous préférons suivre une approche plus statistique. Suivant Villedieu et Hylkema [9], nous définissons une *fréquence de rupture* des gouttes, $\nu(r,v)$, comme l'inverse du temps moyen de fragmentation, τ_{bup}, obtenu à partir de corrélations expérimentales. Typiquement, on suppose :

$$\nu(r,v) = \frac{1}{\tau_{\mathrm{bup}}} = \sqrt{\frac{\rho_g}{\rho_l}}\,\frac{\|v-U_g\|}{10r}\,g\left(\frac{We}{We_c}\right), \tag{2}$$

où ρ_l désigne la densité du liquide et g une fonction croissante, identiquement nulle pour $We < We_c$ et égale à 1 pour $We > We_c + 1$, [1,9].

Afin de rendre compte de la granulométrie et de la répartition en vitesse des gouttes après fragmentation, on introduit la fonction h définie comme suit : $h(r,v,r^*,v^*)\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}r^*\,\mathrm{d}v^*$ représente le nombre de gouttelettes situées dans un volume $\mathrm{d}r\,\mathrm{d}v$, centré au point (r,v), issues de la fragmentation de gouttes situées dans un volume $\mathrm{d}r^*\,\mathrm{d}v^*$, centré au point (r^*,v^*). Une expression de h peut être établie à partir de résultats expérimentaux disponibles dans la littérature. Pour cela, on renvoie à [3,9] et aux références citées.

Finalement, en tenant compte de ce qui précède et en effectuant le bilan des gouttes d'une taille et d'une vitesse données, qui apparaissent ou disparaissent suite à la fragmentation, on peut établir l'expression suivante pour l'opérateur Γ, en notant $\Omega_r =]r, +\infty[\, \times \mathbb{R}_v^3$:

$$\Gamma(f)(r, v) = -\nu(r, v) f(r, v) + \int_{\Omega_r} \nu(r^*, v^*) h(r, v, r^*, v^*) f(r^*, v^*)\, \mathrm{d}r^*\, \mathrm{d}v^*. \tag{3}$$

3. Principaux résultats

3.1. Hypothèses de travail

Afin de pouvoir montrer que l'équation (P) est bien posée, nous utiliserons les hypothèses suivantes, provenant principalement de considérations physiques simples. On pose $\Omega = \mathbb{R}_r^{\star+} \times \mathbb{R}_v^3$.

(H1) (i) $\nu \in \mathcal{C}^1(\Omega)$, $\nu \geqslant 0$, (ii) $\nu(r, v) = 0$ si $r\|v - U_g\|^2 \leqslant C$, (iii) $\exists C' \geqslant 0: \nu(r, v) \leqslant C'\|v\|^3\ \forall (r, v) \in \Omega$.

(H2) (i) $h \in \mathcal{C}^1(\Omega^2)$, $h \geqslant 0$, $h(r, v, r^*, v^*) = 0$ si $r^* \leqslant r$, (ii) $\int_\Omega r^3 h(r, v, r^*, v^*)\, \mathrm{d}r\, \mathrm{d}v = r^{*3}$, (iii) $h(r, v, r^*, v^*) = 0$ si $\|v - U_g\| > \|v^* - U_g\|$.

(H1)(ii) traduit l'existence d'un nombre de Weber critique en dessous duquel une goutte ne peut fragmenter, (H1)(iii) découle directement de l'expression (2) adoptée pour ν. Les hypothèses (H2)(i) et (H2)(ii) expriment respectivement le fait que la fragmentation entraine une diminution du rayon des gouttes et que la masse se conserve lors de ce processus. L'hypothèse (H2)(iii) traduit le fait qu'au cours du processus de fragmentation, la vitesse relative des gouttes par rapport au gaz ne peut que diminuer, ce qui est en accord avec la corrélation expérimentale donnée par Faeth dans [4].

3.2. Résultats

Précisons tout d'abord le choix des espaces fonctionnels naturels pour le problème étudié ici. Soit $\Omega_x = \mathbb{R}_x^3 \times \Omega$. Pour tout $\alpha \geqslant 0$, nous prenons les fonctions-test dans $\mathcal{C}_c^1(\Omega_x)$ et nous posons : $\|f\|_\alpha = \sup_{\|\Phi\|_\infty = 1} \int_{\Omega_x} \Phi(x, r, v) \times r^3(1 + \|v - U_g\|^\alpha)\, \mathrm{d}f$ et $\mathcal{M}_b^\alpha = \{f\colon \|f\|_\alpha < +\infty\}$.

Le choix de l'espace $\mathcal{M}_b^\alpha$ est naturel car il est laissé formellement invariant par les opérateurs de transport et de fragmentation. De plus, d'un point de vue technique, il est nécessaire dans notre démonstration de contrôler le moment d'ordre 6 en vitesse pour établir un résultat d'existence et d'unicité dans le cas où la donnée initiale n'est pas à support compact.

On notera le crochet de dualité entre $\mathcal{M}_b^\alpha$ et $\mathcal{C}_c^1(\Omega_x)$ par : $\langle f, \Phi\rangle \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\Omega_x} \Phi(x, r, v) r^3\, \mathrm{d}f(x, r, v)$. On peut alors définir la forme faible du problème (P) :

$$\forall \Phi \in \mathcal{C}_c^1(\Omega_x), \quad \big\langle f(t), \Phi\big\rangle = \langle f_0, \Phi\rangle + \int_0^t \Big(\big\langle \Gamma\big(f(s)\big), \Phi\big\rangle - \big\langle f(s), v\partial_x\Phi + F\partial_v\Phi\big\rangle\Big)\, \mathrm{d}s. \tag{EF}$$

Nos principaux résultats sont les suivants :

Théorème 3.1. *Soit une donnée initiale positive $f_0 \in \mathcal{M}_b^6$. Alors, sous les hypothèses* (H1), (H2), *le problème* (EF) *admet une unique solution positive $f \in L^\infty_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_t^+, \mathcal{M}_b^3)$, faiblement-$\star$ continue. De plus, on a les régularités suivantes, en notant* $\mathrm{d}\omega = \mathrm{d}x\, \mathrm{d}r\, \mathrm{d}v$:

- *Si $f_0 \in L^1(\Omega_x, r^3(1 + \|v\|^6)\, \mathrm{d}\omega)$, alors $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_t^+, L^1(\Omega_x, r^3(1 + \|v\|^3)\, \mathrm{d}\omega))$* ;
- *Si $f_0 \in \mathcal{C}^1(\Omega_x) \cap L^1(\Omega_x, r^3(1 + \|v\|^6)\, \mathrm{d}\omega)$, alors $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_t^+, \mathcal{C}^1(\Omega_x) \cap L^1(\Omega_x, r^3(1 + \|v\|^3)\, \mathrm{d}\omega))$.*

Théorème 3.2. *Sous les hypothèses* (H1), (H2), *soit f solution du problème* (EV) *avec une donnée initiale positive dans $\mathcal{M}_b^6$. Alors, on a* : $\sup_{t \in \mathbb{R}_+} \int_v \int_{]0,\varepsilon[} r^3\, \mathrm{d}f(t) \stackrel{\varepsilon \mapsto 0}{\longmapsto} 0$ *et $f(t)$ tend, au sens faible-$\star$, vers une mesure de la forme $\delta_{v=U_g} \times \mu_{r,x}$ quand t tend vers $+\infty$.*

Dans le cas où la donnée initiale est à support compact en vitesse, la solution du problème (EF) reste à support compact en vitesse et on a préservation des supports du type $]0, R[\times B(U_g, M) \times \mathbb{R}^3_x$.

Le résultat de la Théorème 3.2 exprime d'une part qu'il ne peut y avoir accumulation de masse au voisinage de $r = 0$ lorsque $t \to +\infty$ et d'autre part que, du fait de l'action combinée de la force de traînée et de la fragmentation, la vitesse des gouttes tend vers celle du gaz.

4. Schéma des démonstrations

Il faut noter tout d'abord que l'opérateur de fragmentation n'est pas borné dans le cas général, en tant qu'opérateur de $\mathcal{M}^6_b$ dans lui même. On commence donc par établir certaines propriétés de l'opérateur de fragmentation, qui assurent qu'il est borné lorsqu'on le restreint aux mesures à support dans un compact donné. La norme de l'opérateur de fragmentation en tant qu'application linéaire dépend alors du support de la condition initiale. La démonstration du Théorème 3.1 consiste donc en deux étapes : existence et unicité de la solution pour une donnée initiale positive à support compact, puis extension de ce résultat à une donnée initiale positive quelconque par estimations a-priori et extraction d'une sous suite convergente.

4.1. Estimations a priori

Les estimations reposent sur les propriétés « physiques » naturelles de l'opérateur de fragmentation : conservation de la masse et diminution des moments en vitesse dans le référentiel du gaz pour le Lemme 4.1, préservation des supports en vitesse et en rayon pour le Lemme 4.2. Enfin, le Lemme 4.3 traduit le fait que, par fragmentation, le rayon des gouttes ne peut que diminuer si bien que la masse des gouttes de rayon inférieur à une valeur donnée ne peut que croître.

Lemme 4.1. *Si $f_0 \in \mathcal{M}^\alpha_b$ est positive et si f est une solution positive de* (EF)*, alors on a pour tout $t \geqslant 0$ et tout $\alpha \geqslant 0$: $\int_{\Omega_x} r^3 \,\mathrm{d}f(t) = \int_{\Omega_x} r^3 \,\mathrm{d}f_0$ et $\int_{\Omega_x} r^3 \|v - U_g\|^\alpha \,\mathrm{d}f(t) \leqslant \int_{\Omega_x} r^3 \|v - U_g\|^\alpha \,\mathrm{d}f_0$.*

Lemme 4.2. *Soient une mesure $f \in \mathcal{M}^\infty_b$, $R > 0$ et $M > 0$ tels que le support de f est inclus dans $]0, R[\times B(U_g, M)$, où $B(U_g, M)$ désigne la boule de $\mathbb{R}^3$ de rayon M et de centre U_g. Alors, si ϕ est une fonction-test nulle sur $]0, R[\times B(U_g, M)$, on a : $\langle \Gamma(f), \phi \rangle = 0$. Donc la mesure $\Gamma(f)$ a son support également inclus dans $]0, R[\times B(U_g, M)$.*

Lemme 4.3. *Soient $M > 0$ et $R > 0$. On note $B(U_g, M)$ la boule de $\mathbb{R}^3$ de rayon M et de centre U_g. Si $f_0 \in \mathcal{M}^3_b$ est positive et si f est une solution positive de* (EF)*, la fonction : $t \mapsto \int_{]0,R] \times B(U_g, M)} r^3 \,\mathrm{d}f(t)$ est croissante.*

4.2. Existence et unicité

On commence par traiter le cas où la donnée initiale est à support compact en vitesse, le Lemme 4.2 assure alors que la solution est également à support compact. On utilise une méthode de perturbation de semi-groupe par un opérateur linéaire continu : on résout d'abord l'équation sans second membre par la méthode des caractéristiques, ce qui donne le semi-groupe S_t au sens des mesures ($f(t) = S_t f_0$) : $\forall \Phi \in \mathcal{C}_b$, $\int_{\Omega_x} r^3 \Phi \,\mathrm{d}f(t) = \int_{\Omega_x} r^3 \Phi(x + vt, r, (v - U_g)\,\mathrm{e}^{-t/\tau} + U_g) \,\mathrm{d}f_0$. On utilise ensuite la formule de Duhamel et un théorème de point fixe pour trouver une solution de l'équation avec l'opérateur de fragmentation dans le second membre. Pour s'assurer de la positivité de la solution si la condition initiale est positive, on considère la suite suivante, pour Λ assez grand : $f^0 = f_0$ et pour $n \geqslant 0$, $(1 + \Lambda) f^{n+1}(t) = \Lambda f^n + S_t f_0 + \int_0^t S_{t-s} \Gamma(f^n(s)) \,\mathrm{d}s$. On voit que la régularité de $t \mapsto S_t f_0$ dépend de la régularité de la condition initiale. En particulier, si $f_0 \in \mathrm{L}^1(\Omega_x, r^3(1 + \|v\|^6)\,\mathrm{d}\omega)$, la solution de l'équation sans second membre est continue de $\mathbb{R}^+_t$ dans $\mathrm{L}^1(\Omega_x, r^3(1 + \|v\|^6)\,\mathrm{d}\omega)$ car elle s'écrit $f(t, x, r, v) = \mathrm{e}^{t/\tau} f_0(x - vt, r, (v - U_g)\,\mathrm{e}^{t/\tau} + U_g)$.

Dans le cas où le support de la donnée initiale n'est pas compact, on démontre l'existence d'une solution positive en approchant la donnée initiale positive f_0 par une suite de données initiales f_0^n à support compact, obtenue en tronquant f_0. Grâce aux estimations a-priori, on a alors une suite de solutions f^n vérifiant, si $T > 0$ est fixé (la constante C dépend de T) : $\forall t \in [0, T]$, $\|f^n(t)\|_\alpha \leqslant C\|f_0^n\|_\alpha \leqslant C\|f_0\|_\alpha$.

Modulo l'extraction d'une sous-suite, on trouve une limite vérifiant la formulation faible du problème (P). De plus, cette limite est faiblement-* continue, car si l'on considère une fonctions-test ϕ dans $\mathcal{C}_c^1(\Omega_x)$, on montre que la suite de fonctions $t \mapsto \langle f^n(t), \phi\rangle$ est uniformément équicontinue.

Enfin, toujours pour des données initiales à support non compact, l'unicité d'une solution positive s'obtient en étudiant le problème adjoint : étant donnée une fonction $\Psi \in \mathcal{C}_c^1(\Omega_x)$ positive, trouver une fonction ϕ de classe $\mathcal{C}^1$ à support compact vérifiant : $\partial_t\phi + v\partial_x\phi + \beta(v)\partial_v\phi - \nu\phi + \frac{\nu}{r^3}\int_\Omega h\phi^* r^{*3}\,\mathrm{d}r^*\,\mathrm{d}v^* = \Psi$, $\phi(T, x, r, v) = 0$.

Les fonctions ν et h étant supposées de classe $\mathcal{C}^1$, on obtient, de la même manière que précédemment après le changement de variable $t = T - s$, l'existence d'une solution $\mathcal{C}^1$ à support compact au problème adjoint, ce qui assure de l'unicité d'une solution positive au problème (P).

4.3. Comportement asymptotique

On commence par démontrer la Théorème 3.2 dans le cas d'une donnée initiale à support compact :

Lemme 4.4. *Soit f vérifiant les hypothèses de la Théorème* 3.2 *et supposons de plus que la donnée initiale est à support compact en vitesse. Alors il existe $\alpha_0 > 0$ tel que $\forall R \leqslant \alpha_0$, $\forall S \leqslant R$: $t \mapsto \int_v \int_{]S,R[} r^3\,\mathrm{d}f(t)$ est une fonction croissante.*

Ce résultat découle de l'existence d'un nombre de Weber critique (donc d'un rayon critique) en dessous duquel la fragmentation est impossible. On en déduit qu'il ne peut y avoir accumulation de masse vers les petits rayons si f_0 est de masse finie. On étend ensuite ce résultat pour une donnée initiale positive quelconque.

Pour étudier le comportement asymptotique de la distribution en vitesse, on utilise la décroissance stricte de l'énergie cinétique de la phase liquide dans le référentiel du gaz à cause de la force de traînée.

Lemme 4.5. *Sous les hypothèses du Lemme* 4.4*, si de plus il existe R tel que* $\mathrm{supp}_r\, f_0 \subset\,]0, R]$*, la quantité $A(t) = \int_{\Omega_x}(v - U_g)^2 r^3\,\mathrm{d}f(t)$ vérifie l'inégalité $A(t) \leqslant A(0)\exp(-2t/(\beta R^2))$.*

Références

[1] P. Achim, Simulation de collisions, coalescence et rupture de gouttes par une approche lagrangienne : application aux moteurs à propergol solide, Thèse de Doctorat, Faculté des Sciences de l'Université de Rouen, Septembre 1999.

[2] C. Baranger, Collisions, coalescences et fragmentations des gouttelettes dans un spray : écriture précise des équations relatives au modèle TAB, Mémoire de DEA, École Normale Supérieure de Cachan, Juillet 2001.

[3] G. Dufour, Un modèle multi-fluide eulerien pour la fragmentation de gouttes dans un brouillard, Mémoire de DEA, Université Paul Sabatier Toulouse III, Juin 2002.

[4] L.-P. Hsiang, G.M. Faeth, Drop properties after secondary breakup, Int. J. Multiphase Flow 19 (5) (1993) 721–735.

[5] M. Massot, M. Kumar, A. Gomez, M.D. Smooke, Counterflow spray diffusion flames of heptane: Computations and experiments, in: 27th Symp. on Combustion, The Comb. Institute, 1975–1983, 1998.

[6] R. Maxey, J. Riley, Equation of motion of a small rigid sphere in a non-uniform flow, Phys. Fluids 26 (4) (1983) 883–889.

[7] P.J. O'Rourke, A. Amsden, The TAB method for numerical calculation of spray droplet breakup, Tech. Report, Los Alamos National Laboratory, Los Alamos, New Mexico 87545, 1987.

[8] M. Pilch, C.A. Erdman, Use of breakup time data and velocity history data to predict the maximum size of stable fragments for acceleration-induced breakup of a liquid drop, Int. J. Multiphase Flow 13 (6) (1987) 741–757.

[9] P. Villedieu, J. Hylkema, Modèles numériques Lagrangiens pour la phase dispersée dans les propulseurs à poudre, Rapport Final n°1/3784.00/DTIM ONERA, 2000.

[10] F.A. Williams, Spray combustion and atomization, Phys. Fluids 1 (1958) 541–555.