Available online at www.sciencedirect.com
SCIENCE DIRECT®
C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 336 (2003) 381–386
COMPTES RENDUS MATHEMATIQUE

Algèbre/Théorie des groupes

Sur l'homologie du groupe orthogonal à coefficients dans les algèbres de Clifford

On the homology of the orthogonal coefficient group in Clifford algebras

Jean-Guillaume Grebet

Department of Mathematical Sciences, University of Durham, Durham, DH1 3LE, UK

Reçu le 23 septembre 2002 ; accepté après révision le 30 janvier 2003

Présenté par Christophe Soulé

Résumé

Le but de cette Note est de montrer que la méthode utilisée par Dupont et Sah pour calculer les groupes d'homologie $\mathrm{H}_1(\mathbf{SO}(3;\mathbb{R}),\mathfrak{so}(3;\mathbb{R}))$ et $\mathrm{H}_2(\mathbf{SO}(3;\mathbb{R}),\mathfrak{so}(3;\mathbb{R}))$ peut être reformulée de manière plus générale en termes de formes différentielles non-commutatives sur les algèbres de Clifford. En appliquant alors ce formalisme à d'autres algèbres de Clifford, on est en mesure d'une part de retrouver les résultats de Cathelineau pour les groupes $\mathrm{H}_1(\mathbf{SL}_2(\mathbb{C}),\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}))$ et $\mathrm{H}_2(\mathbf{SL}_2(\mathbb{C}),\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}))$, et d'autre part de calculer les groupes $\mathrm{H}_1(\mathbf{SL}_2(\mathbb{R}),\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R}))$ et $\mathrm{H}_2(\mathbf{SL}_2(\mathbb{R}),\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R}))$, qui sont respectivement isomorphes à $\Omega^1_{\mathbb{R}|\mathbb{Q}}$ et au groupe nul. ***Pour citer cet article : J.-G. Grebet, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 336 (2003).***

Abstract

The object of this Note is to show that the method used by Dupont and Sah to compute the homology groups $\mathrm{H}_1(\mathbf{SO}(3;\mathbb{R}),\mathfrak{so}(3;\mathbb{R}))$ and $\mathrm{H}_2(\mathbf{SO}(3;\mathbb{R}),\mathfrak{so}(3;\mathbb{R}))$ can be reformulated more generally in terms of non-commutative differential forms over Clifford algebras. Applying then this formalism to other Clifford algebras, we are able on the one hand to retrieve the results of Cathelineau for the groups $\mathrm{H}_1(\mathbf{SL}_2(\mathbb{C}),\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}))$ and $\mathrm{H}_2(\mathbf{SL}_2(\mathbb{C}),\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}))$, and on the other hand to compute $\mathrm{H}_1(\mathbf{SL}_2(\mathbb{R}),\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R}))$ and $\mathrm{H}_2(\mathbf{SL}_2(\mathbb{R}),\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R}))$, which are isomorphic to $\Omega^1_{\mathbb{R}|\mathbb{Q}}$ and to the null group respectively. ***To cite this article: J.-G. Grebet, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 336 (2003).***

Adresse e-mail : j.g.grebet@durham.ac.uk (J.-G. Grebet).

1631-073X/03/$ – see front matter © 2003 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS. Tous droits réservés.
doi:10.1016/S1631-073X(03)00069-4

Abridged English version

0.1. Some classical facts on Clifford algebras. Let $\mathbb{F}$ be either a Pythagorean field, (i.e., an ordered field all of whose positive elements possess a square root), or a field of characteristic 0 which is square root-closed. Let V be a finitely generated $\mathbb{F}$-vector space, equipped with a non-degenerate quadratic form ψ.

Denote by $\mathrm{C}\ell(V,\psi)$ the associated Clifford algebra (see [8]), by $\mathrm{C}\ell^0(V,\psi)$ the subalgebra of even elements, and finally by $\mathrm{C}\ell^1(V,\psi)$ the $\mathrm{C}\ell^0(V,\psi)$-module of odd elements. Let ω stand for the volume element of $\mathrm{C}\ell(V,\psi)$. Also, denote by τ the anti-involution induced by transposition on $\mathrm{C}\ell(V,\psi)$. Finally, write α for the involution of $\mathrm{C}\ell(V,\psi)$ induced by $-\mathrm{id}_V$.

Recall that the algebra $\mathrm{C}\ell(V,\psi)$ is isomorphic as an $\mathbb{F}$-vector space to the exterior algebra $\bigwedge_{\mathbb{F}}^* V$, through the identification (1). The even and odd parts of $\mathrm{C}\ell(V,\psi)$ correspond to the even and odd exterior powers of V respectively.

The groups $\mathrm{Pin}(V,\psi)$ and $\mathrm{Spin}(V,\psi)$ act on $\mathrm{C}\ell(V,\psi)$ by algebra automorphisms through the graded adjoint action (2). With this action, the map (1) becomes an isomorphism of $\mathrm{Pin}(V,\psi)$-modules.

0.2. A vanishing result in homology. The following is a generalised version of a theorem by Dupont and Sah (see [4], Theorem 1.1), which is one of the key ingredients for the subsequent computations.

Theorem 0.1. *The inclusion of groups $O(\psi)\to O(\psi)\ltimes V$ gives rise to an isomorphism in low degrees in homology*: $\forall k\leqslant N,\ \mathrm{H}_k(O(\psi),\mathbb{Z})\cong \mathrm{H}_k(O(\psi)\ltimes V,\mathbb{Z})$, *where the natural integer N is given by*:

- $\dim_{\mathbb{F}} V$ *if either $\mathbb{F}$ is Pythagorean and ψ is positive definite, or $\mathbb{F}$ is square root-closed, or* $\dim_{\mathbb{F}} V\leqslant 4$;
- $\dim_{\mathbb{F}} V-1$ *if $\mathbb{F}$ is Pythagorean and ψ is of signature* $(1,\dim_{\mathbb{F}} V-1)$ *or* $(\dim_{\mathbb{F}} V-1,1)$;
- $\min(r,s)$ *if $\mathbb{F}$ is Pythagorean and ψ is of signature (r,s) with $(r-1)(s-1)>1$.*

The argument follows the lines of the proof given in [4], by substituting for the complex of configurations of points in affine Euclidean space defined in loc. cit. the chain complex (C_*,d) of configurations of points $(a_0,\dots,a_p)$ in the affine space V such that all faces of $(a_0,\dots,a_p)$ span a non-degenerate affine subspace with respect to ψ.

With some precautions, it is possible to construct a "circumcentric" subdivision and thus develop the same kind of argument as in [4].

We have to check, if $\mathbb{F}$ is Pythagorean and $\dim_{\mathbb{F}} V\leqslant 4$, that for $r\leqslant r',\ s\leqslant s'$ and $r+s=2$ the natural maps $\mathrm{H}_2(\mathbf{O}(r,s;\mathbb{F}),\mathbb{Q})\to \mathrm{H}_2(\mathbf{O}(r',s';\mathbb{F}),\mathbb{Q})$ are all surjective.

0.3. The short exact sequence of the adjoint action. Assume now that V is of dimension 4 over $\mathbb{F}$, that there is a vector on which ψ evaluates to 1, and that ω has square 1. Then $\mathrm{C}\ell(V,\psi)$ can be identified with $\mathcal{M}_2(C)$, where C is the Clifford algebra associated to the restriction of ψ to a non-degenerate plane of V, so that the subalgebra $\mathrm{C}\ell^0(V,\psi)$ is identified with the diagonal subalgebra $C_+\oplus C_-$, and the $\mathrm{C}\ell^0(V,\psi)$-module $\mathrm{C}\ell^1(V,\psi)$ is identified with the antidiagonal submodule $C_1\oplus C_2$.

The group $\mathrm{Spin}(V,\psi)\subset \mathrm{C}\ell^0(V,\psi)$ possesses one or two connected components (for the Zariski topology). Furthermore, the connected component of the identity $\mathrm{Spin}^1(V,\psi)$ canonically decomposes as a product of two isomorphic factors $S_+\times S_-$. With our matricial presentation, the group $\mathrm{Pin}(V,\psi)$ is generated by $\mathrm{Spin}(V,\psi)$ and the matrix $J=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$.

Denote by $\mu:\mathrm{C}\ell(V,\psi)\otimes_{\mathbb{Q}}\mathrm{C}\ell(V,\psi)\to \mathrm{C}\ell(V,\psi)$ the multiplication in $\mathrm{C}\ell(V,\psi)$ (considered as a $\mathbb{Q}$-algebra). The involution τ can be extended to the tensor powers of $\mathrm{C}\ell(V,\psi)$, so that τ commutes with μ. It is also easy to check that τ commutes with the action of $\mathrm{Pin}(V,\psi)$. We consider then the exact sequence (5) of $\mathrm{Pin}(V,\psi)$-modules.

The module $\bigwedge_{\mathbb{F}}^2 V$ is identified with $(C_+ \oplus C_-)^-$, where the $^-$ sign denotes the -1-eigenspace under the action of τ. Similarly, $\bigwedge_{\mathbb{Q}}^2 V$ is identified with $(C_1 \otimes_{\mathbb{Q}} C_2)^-$ (the action of both J and τ on $C_1 \otimes C_2$ is defined).

In these terms, the short exact sequence (5) translates to (6).

0.4. Computation of the homology of the group S_+ with coefficients in its adjoint action. Consider now the long exact sequence in homology associated to the exact sequence of $\mathrm{Pin}(V, \psi)$-modules (6). By Theorem 0.1, the groups $\mathrm{H}_k(\mathrm{Pin}(V, \psi), (C_1 \otimes_{\mathbb{Q}} C_2)^-)$ are zero for $k \leqslant 2$, which implies that we have an isomorphism $\mathrm{H}_k(\mathrm{Pin}(V, \psi), \bigwedge_{\mathbb{F}}^2 V) \cong \mathrm{H}_{k-1}(\mathrm{Pin}(V, \psi), I_1(C)^-)$ for $k = 1, 2$.

Theorem 0.2. (i) *The map $I_1(C) \to \mathrm{HH}_1(C) \cong \mathrm{HH}_1(\mathbb{F}) \cong \Omega^1_{\mathbb{F}|\mathbb{Q}}$ induces an isomorphism* $\mathrm{H}_0(\mathrm{Spin}^1(V, \psi), I_1(C)^-) \cong \Omega^1_{\mathbb{F}|\mathbb{Q}}$, *on which* $\mathrm{Pin}(V, \psi)/\mathrm{Spin}^1(V, \psi)$ *acts trivially.* (ii) *The group* $\mathrm{H}_1(\mathrm{Spin}^1(V, \psi), I_1(C)^-)$ *is zero.*

For the proof, we follow step by step the arguments of Dupont and Sah, replacing the algebra of quaternions with the Clifford algebra C.

Observe that $\mathrm{H}_k(\mathrm{Pin}(V, \psi), (C_+ \oplus C_-)^-)$ is the module of coinvariants of $\mathrm{H}_k(\mathrm{S}_+(V, \psi), {C_+}^-)$ under the action of $\mathrm{Spin}(V, \psi)/\mathrm{Spin}^1(V, \psi)$, for $k \leqslant 3$.

When $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ (or a square root-closed field), we have the isomorphism $S_+ \cong \mathbf{SL}_2(\mathbb{C})$ (or $S_+ \cong \mathbf{SL}_2(\mathbb{F})$). The group $\mathrm{Spin}(V, \psi)/\mathrm{Spin}^1(V, \psi) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ is generated by the class of the central element i, which implies that the action of this group on $\mathrm{H}_k(\mathrm{S}_+(V, \psi), {C_+}^-)$ is trivial. Thus Theorem 4.1 yields the results of Cathelineau (see [1], Théorème, p. 75).

When $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ (or a Pythagorean field), and if we consider the standard quadratic form of signature $(2, 2)$, we have $S_+ \cong \mathbf{SL}_2(\mathbb{R})$ (or $S_+ \cong \mathbf{SL}_2(\mathbb{F})$). It is not too difficult to show that $\mathrm{Spin}(V, \psi)/\mathrm{Spin}^1(V, \psi)$ acts trivially on the group $\mathrm{H}_k(\mathrm{S}_+(V, \psi), {C_+}^-)$. In particular, we find that $\mathrm{H}_1(\mathbf{SL}_2(\mathbb{R}), \mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})) = \Omega^1_{\mathbb{R}|\mathbb{Q}}$, and $\mathrm{H}_2(\mathbf{SL}_2(\mathbb{R}), \mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})) = 0$ (compare with [5]).

1. Quelques rappels sur les algèbres de Clifford

Soit $\mathbb{F}$ un corps pythagoricien (i.e., un corps ordonné dont tous les éléments positifs admettent une racine carrée), ou bien un corps de caractéristique 0 stable par passage à la racine carrée. Soit V un $\mathbb{F}$-espace vectoriel de dimension finie, muni d'une forme quadratique non-dégénérée ψ.

Notons $\mathrm{C}\ell(V, \psi)$ l'algèbre de Clifford associée (voir [8]), $\mathrm{C}\ell^0(V, \psi)$ la sous-algèbre des éléments pairs, et enfin $\mathrm{C}\ell^1(V, \psi)$ le $\mathrm{C}\ell^0(V, \psi)$-module des éléments impairs. Désignons par ω l'élément volume de $\mathrm{C}\ell(V, \psi)$, une fois choisie l'orientation de V. Notons également τ l'anti-involution induite par la transposition sur $\mathrm{C}\ell(V, \psi)$. Enfin, écrivons α pour l'involution de $\mathrm{C}\ell(V, \psi)$ induite par $-\mathrm{id}_V$. Cette involution commute avec τ, et a pour sous-espaces propres associés respectivement à 1 et -1 les parties paire et impaire de $\mathrm{C}\ell(V, \psi)$.

Rappelons que l'algèbre $\mathrm{C}\ell(V, \psi)$ est isomorphe comme $\mathbb{F}$-espace vectoriel à l'algèbre extérieure $\bigwedge_{\mathbb{F}}^* V$, à travers l'identification :

$$\begin{aligned} \textstyle\bigwedge_{\mathbb{F}}^* V &\longrightarrow \mathrm{C}\ell(V, \psi), \\ u_1 \wedge \cdots \wedge u_p &\longmapsto \frac{1}{p!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_p} (-1)^{|\sigma|} u_{\sigma(1)} \cdots u_{\sigma(p)}, \end{aligned} \tag{1}$$

les parties paire et impaire de $\mathrm{C}\ell(V, \psi)$ correspondant respectivement aux puissances extérieures paires et impaires de V.

Les groupes $\mathrm{Pin}(V, \psi)$ et $\mathrm{Spin}(V, \psi)$ agissent sur $\mathrm{C}\ell(V, \psi)$ par automorphismes d'algèbre via l'action adjointe graduée, qui s'écrit pour $x \in \mathrm{Pin}(V, \psi)$ et tout élément homogène $y \in \mathrm{C}\ell(V, \psi)$:

$$\mathrm{Ad}_x^{\mathrm{gr}}(y) = (-1)^{|x||y|} x \cdot y \cdot x^{-1}. \tag{2}$$

Avec cette action, l'application (1) devient un isomorphisme de $\mathrm{Pin}(V, \psi)$-modules.

2. Un résultat d'annulation en homologie

Nous donnons ici une version généralisée d'un théorème de Dupont et Sah (voir [4], Théorème 1.1), qui est l'un des ingrédients-clefs pour les calculs qui vont suivre.

Théorème 2.1. *L'inclusion de groupes $O(\psi) \to O(\psi) \ltimes V$ donne lieu à un isomorphisme en homologie en bas degrés* :

$$\forall k \leqslant N, \quad \mathrm{H}_k(O(\psi), \mathbb{Z}) \cong \mathrm{H}_k(O(\psi) \ltimes V, \mathbb{Z}), \tag{3}$$

où l'entier naturel N est égal à :

- $\dim_{\mathbb{F}} V$ *si $\mathbb{F}$ est pythagoricien et ψ (ou $-\psi$) est définie positive, ou bien si $\mathbb{F}$ est clos par passage à la racine carrée, ou encore si* $\dim_{\mathbb{F}} V \leqslant 4$;
- $\dim_{\mathbb{F}} V - 1$ *si $\mathbb{F}$ est pythagoricien et ψ est de signature* $(1, \dim_{\mathbb{F}} V - 1)$ *ou* $(\dim_{\mathbb{F}} V - 1, 1)$;
- $\min(r, s)$ *si $\mathbb{F}$ est pythagoricien et ψ est de signature (r, s) avec* $(r-1)(s-1) \geqslant 1$.

Nous reprenons la démonstration donnée dans [4], en substituant au complexe de configurations de points de l'espace affine euclidien le complexe de chaînes (C_*, d) des configurations de points $(a_0, \ldots, a_p)$ de l'espace affine V telles que toutes les faces de $(a_0, \ldots, a_p)$ engendrent un sous-espace affine non-dégénéré pour ψ.

Notons qu'une k-configuration qui engendre un sous-espace U de rang $k \leqslant \dim_{\mathbb{F}} V$ et dont toutes les faces sont non-dégénérées au sens précédent admet toujours un « centre de la sphère circonscrite ». Cependant, il peut très bien se faire que la subdivision associée à cette construction fasse apparaître des cellules ayant des faces dégénérées.

Aussi, le sous-complexe de C_* que nous considérons en lieu et place du complexe des cellules génériques de Dupont et Sah est le sous-complexe engendré par les cellules de rang maximal pour lesquelles la subdivision par les « centres de la sphère circonscrite » ne produit pas de cellules dégénérées. Cette condition reste suffisamment générique pour permettre de suivre le même argument que dans [4], modifié comme dans [3], Lemme 9.8.

L'autre point délicat, dans le cas de la dimension 4 pour $\mathbb{F}$ pythagoricien, consiste à vérifier que les applications naturelles $\mathrm{H}_2(\mathbf{O}(r, s; \mathbb{F}), \mathbb{Q}) \to \mathrm{H}_2(\mathbf{O}(r', s'; \mathbb{F}), \mathbb{Q})$ sont toutes surjectives pour $r \leqslant r'$, $s \leqslant s'$ et $r + s = 2$.

3. La suite exacte de l'action adjointe

Supposons désormais que V est de dimension 4 sur $\mathbb{F}$, que 1 est représenté par ψ, et que de plus l'élément volume ω soit de carré 1. Sous ces hypothèses, $\mathrm{C}\ell(V, \psi)$ s'identifie à $\mathcal{M}_2(C)$, où C est l'algèbre de Clifford associée à la restriction à un plan non-dégénéré de V.

Ainsi, C est une $\mathbb{F}$-algèbre de dimension 4, qu'on munit de l'anti-involution θ définie comme la restriction de $\tau \circ \alpha$ à C, de sorte que :

- la sous-algèbre $\mathrm{C}\ell^0(V, \psi)$ s'identifie à la sous-algèbre diagonale $C_+ \oplus C_-$, où C_+ et C_- désignent les sous-algèbres correspondant aux premier et deuxième blocs diagonaux respectivement ;
- le $\mathrm{C}\ell^0(V, \psi)$-module $\mathrm{C}\ell^1(V, \psi)$ s'identifie au groupe $C_1 \oplus C_2$, où C_1 et C_2 désignent les sous-modules correspondant aux blocs supérieur droit et inférieur gauche respectivement ;
- la transposition τ s'identifie à l'anti-involution de $\mathcal{M}_2(C)$ donnée par la formule :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \overset{\tau}{\longmapsto} \begin{pmatrix} \theta(a) & -\theta(c) \\ -\theta(b) & \theta(d) \end{pmatrix}. \tag{4}$$

Le groupe $\mathrm{Spin}(V, \psi) \subset \mathrm{C}\ell^0(V, \psi)$ admet une ou deux composantes connexes lorsque $\mathbb{F}$ est pythagoricien (le deuxième cas correspondant à la situation où ψ admet des sous-espaces isotropes), et deux composantes connexes (pour la topologie de Zariski) lorsque $\mathbb{F}$ contient une racine carrée de -1. Ces composantes connexes correspondent aux équations $a\tau(a) = 1$ et $a\tau(a) = -1$ respectivement. D'autre part, le sous-groupe $\mathrm{Spin}^1(V, \psi)$ correspondant à la composante connexe de l'identité dans $\mathrm{Spin}(V, \psi)$ se décompose en un produit de deux facteurs isomorphes $S_+ \times S_-$ avec $S_+ \subset C_+$ et $S_- \subset C_-$. Notons également qu'avec la présentation matricielle précédente, le groupe $\mathrm{Pin}(V, \psi)$ est engendré par le groupe $\mathrm{Spin}(V, \psi) \subset C_+ \oplus C_-$ et la matrice $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Notons ρ_+ et ρ_- les deux applications définies en composant l'inclusion $\mathrm{Spin}(V, \psi) \hookrightarrow \mathrm{C}\ell^0(V, \psi)$ avec les projections $\mathrm{C}\ell^0(V, \psi) \to C_+$ et $\mathrm{C}\ell^0(V, \psi) \to C_-$ respectivement. Ainsi, l'action de $\mathrm{Spin}(V, \psi)$ induite par l'action adjointe graduée sur C_1 (resp. sur C_2) est donnée par $g \cdot x = \rho_+(g)x\rho_-(g)^{-1}$ (resp. par $g \cdot x = \rho_-(g)x\rho_+(g)^{-1}$). De même, l'action de $\mathrm{Spin}(V, \psi)$ induite par l'action adjointe graduée sur C_+ (resp. sur C_-) est donnée par $g \cdot x = \rho_+(g)x\rho_+(g)^{-1}$ (resp. par $g \cdot x = \rho_-(g)x\rho_-(g)^{-1}$).

Notons $\mu : \mathrm{C}\ell(V, \psi) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathrm{C}\ell(V, \psi) \to \mathrm{C}\ell(V, \psi)$ la multiplication dans $\mathrm{C}\ell(V, \psi)$ (considérée comme $\mathbb{Q}$-algèbre). L'involution τ s'étend aux puissances tensorielles de $\mathrm{C}\ell(V, \psi)$ en utilisant la formule $\tau(x_1 \otimes \cdots \otimes x_p) = \tau(x_p) \otimes \cdots \otimes \tau(x_1)$. Avec cette définition, τ commute avec le produit μ. Par ailleurs, la transposition τ agissant sur $\mathrm{C}\ell^0(V, \psi)$ a pour sous-espaces propres associés à 1 et -1 respectivement $\mathbb{F} \cdot 1 \oplus \mathbb{F} \cdot \omega$ et $\bigwedge^2_{\mathbb{F}} V$. De manière analogue, τ agissant sur $\mathrm{C}\ell^1(V, \psi)$ a pour sous-espaces propres associés à 1 et -1 respectivement V et $\bigwedge^3_{\mathbb{F}} V$.

On vérifie également sans difficulté, à l'aide des considérations précédentes, que la transposition τ commute avec l'action du groupe $\mathrm{Pin}(V, \psi)$. On considère la suite exacte de $\mathrm{Pin}(V, \psi)$-modules suivante :

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow \bigwedge\nolimits^2_{\mathbb{Q}} V \longrightarrow \bigwedge\nolimits^2_{\mathbb{F}} V \longrightarrow 0, \tag{5}$$

où le morphisme $\bigwedge^2_{\mathbb{Q}} V \to \bigwedge^2_{\mathbb{F}} V$ est la projection naturelle.

On a identifié plus haut $\bigwedge^2_{\mathbb{F}} V$ à $(C_+ \oplus C_-)^-$, où le signe $^-$ indique que l'on considère le sous-espace propre associé à -1 sous l'action de τ. De même, $\bigwedge^2_{\mathbb{Q}} V$ s'identifie à $(V \otimes_{\mathbb{Q}} V)^-$. D'après la présentation matricielle de $\mathrm{C}\ell(V, \psi)$, on voit que $V \otimes_{\mathbb{Q}} V$ s'identifie comme $\mathrm{Pin}(V, \psi)$-module à $C_1 \otimes_{\mathbb{Q}} C_2$ (les morphismes $V \to C_\varepsilon$, $\varepsilon = 1, 2$ sont donnés par projection). Ici, le groupe $\mathrm{Spin}(V, \psi)$ agit diagonalement sur $C_1 \otimes_{\mathbb{Q}} C_2$ par les actions définies plus haut, et la matrice J agit par la formule $J \cdot x \otimes y = \theta(x) \otimes \theta(y)$. La transposition τ agit sur $C_1 \otimes_{\mathbb{Q}} C_2$ par la formule $\tau(x \otimes y) = \theta(y) \otimes \theta(x)$. Ainsi, la restriction de μ à $V \otimes_{\mathbb{Q}} V$ correspond sous cette identification à l'application $\nu : C_1 \otimes C_2 \to C_+ \oplus C_-$ définie par la formule $\nu(x \otimes y) = (xy, \theta(x)\theta(y))$.

En ces termes, la suite exacte (5) se réécrit :

$$0 \longrightarrow I_1(C)^- \longrightarrow (C_1 \otimes_{\mathbb{Q}} C_2)^- \xrightarrow{\nu} (C_+ \oplus C_-)^- \longrightarrow 0, \tag{6}$$

où $I_1(C)$ désigne le groupe des 1-formes différentielles non-commutatives fermées (on reprend les notations de [4], par. 4, voir aussi [7]), c'est-à-dire le groupe des 1-cycles du complexe $(\Omega_*(C), \partial)$ des formes différentielles non-commutatives sur C. On sait que $\mathrm{H}_*(\Omega_*(C), \partial)$ calcule $\mathrm{HH}_*(C)$ l'homologie de Hochschild de C, et que d'autre part C est isomorphe à une algèbre de matrices à coefficients dans $\mathbb{F}$, $\mathbb{C}_{\mathbb{F}}$ ou $\mathbb{H}_{\mathbb{F}}$ (avec $\mathbb{C}_{\mathbb{F}} = \mathbb{F}[\mathrm{i}]$ et $\mathbb{H}_{\mathbb{F}}$ l'algèbre des quaternions sur $\mathbb{F}$), les deux derniers cas apparaissant seulement lorsque $\mathbb{F}$ est pythagoricien. On déduit alors comme dans [4], par. 4, de l'invariance de Morita de l'homologie de Hochschild et du théorème de Hochschild–Kostant–Rosenberg, que $\mathrm{H}_k(\Omega_*(C), \partial) \cong \mathrm{HH}_*(C) \cong \mathrm{HH}_*(\mathbb{F}) \cong \Omega^k_{\mathbb{F}|\mathbb{Q}}$, où $\Omega^k_{\mathbb{F}|\mathbb{Q}}$ est l'espace des formes de Kähler.

4. Calcul de l'homologie du groupe S_+ à coefficients dans son action adjointe

Considérons à présent la suite exacte longue d'homologie associée à la suite exacte de $\mathrm{Pin}(V, \psi)$-modules (5). En vertu du Théorème 2.1, les groupes $\mathrm{H}_k(\mathrm{Pin}(V, \psi), (C_1 \otimes_{\mathbb{Q}} C_2)^-)$ sont nuls pour $k \leqslant 2$, ce qui implique que l'on a un isomorphisme $\mathrm{H}_k(\mathrm{Pin}(V, \psi), \bigwedge^2_{\mathbb{F}} V) \cong \mathrm{H}_{k-1}(\mathrm{Pin}(V, \psi), I_1(C)^-)$ pour $k = 1, 2$.

Théorème 4.1. (i) *L'application* $I_1(C) \to \mathrm{HH}_1(C) \cong \mathrm{HH}_1(\mathbb{F}) \cong \Omega^1_{\mathbb{F}|\mathbb{Q}}$ *induit un isomorphisme* $\mathrm{H}_0(\mathrm{Spin}^1(V,\psi), I_1(C)^-) \cong \Omega^1_{\mathbb{F}|\mathbb{Q}}$, *sur lequel* $\mathrm{Pin}(V,\psi)/\mathrm{Spin}^1(V,\psi)$ *agit trivialement.* (ii) *Le groupe* $\mathrm{H}_1(\mathrm{Spin}^1(V,\psi), I_1(C)^-)$ *est nul.*

Pour la preuve, on considère les actions de $\mathrm{Spin}^1(V,\psi)$ et τ sur $\Omega_1(C) \subset C_1 \otimes C_2$ définies précédemment, et on les étend comme dans [4] au complexe $(\Omega_*(C), \partial)$. Il est facile de généraliser les raisonnements de loc. cit. pour établir les faits suivants :

- Le groupe $\mathrm{Spin}^1(V,\psi)$ agit trivialement sur $\mathrm{HH}_*(C)$.
- La transposition τ agit sur $\mathrm{HH}_k(C)$ comme la multiplication par $(-1)^k$.
- Si l'on considère l'action du sous-groupe $S_- \subset \mathrm{Spin}^1(V,\psi)$, on a :

$$\mathrm{H}_0\big(S_-, \Omega_k(C)\big) = \begin{cases} \mathbb{F} & \text{si } k = 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \tag{7}$$

Le reste de l'argument est le strict analogue du raisonnement de Dupont et Sah pour les quaternions.

On déduit du théorème précédent que $\mathrm{H}_2(\mathrm{Pin}(V,\psi), (C_+ \oplus C_-)^-) = 0$, et $\mathrm{H}_1(\mathrm{Pin}(V,\psi), (C_+ \oplus C_-)^-) = \Omega^1_{\mathbb{F}|\mathbb{Q}}$. On observe alors d'une part que $\mathrm{H}_k(\mathrm{Spin}^1(V,\psi), (C_+ \oplus C_-)^-) = \mathrm{H}_k(\mathrm{S}_+(V,\psi), C_+{}^-) \oplus \mathrm{H}_k(\mathrm{S}_+(V,\psi), C_-{}^-)$ pour $k \leqslant 3$, et que la matrice J agit sur ce groupe par échange des facteurs. D'autre part, $C_+{}^-$ est l'algèbre de Lie du groupe S_+. Par conséquent, $\mathrm{H}_k(\mathrm{Pin}(V,\psi), (C_+ \oplus C_-)^-)$ est le groupe des coinvariants de $\mathrm{H}_k(\mathrm{S}_+(V,\psi), C_+{}^-)$ sous l'action de $\mathrm{Spin}(V,\psi)/\mathrm{Spin}^1(V,\psi)$, pour $k \leqslant 3$.

Lorsque $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ (ou un corps stable par passage à la racine carrée), on a $S_+ \cong \mathbf{SL}_2(\mathbb{C})$ (ou $S_+ \cong \mathbf{SL}_2(\mathbb{F})$). Le groupe $\mathrm{Spin}(V,\psi)/\mathrm{Spin}^1(V,\psi) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ est engendré par la classe de l'élément central $\mathfrak{i}$, ce qui implique que l'action de ce groupe sur $\mathrm{H}_k(\mathrm{S}_+(V,\psi), C_+{}^-)$ est triviale. On retrouve ainsi les résultats de Cathelineau (voir [1], Théorème, p. 75).

Lorsque $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ (ou un corps pythagoricien), et si l'on considère la forme quadratique standard de signature $(2,2)$, on a $S_+ \cong \mathbf{SL}_2(\mathbb{R})$ (ou $S_+ \cong \mathbf{SL}_2(\mathbb{F})$). Par l'étude d'une suite spectrale calculant $\mathrm{H}_k(\mathrm{T}S_+, \mathbb{Z})$, où $\mathrm{T}S_+$ désigne le groupe tangent de S_+ (voir [9], revisité comme dans [2] ou [6]), il est assez facile de montrer que $\mathrm{Spin}(V,\psi)/\mathrm{Spin}^1(V,\psi)$ agit trivialement sur le groupe $\mathrm{H}_k(\mathrm{S}_+(V,\psi), C_+{}^-)$. En particulier, on trouve ainsi que $\mathrm{H}_1(\mathbf{SL}_2(\mathbb{R}), \mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})) = \Omega^1_{\mathbb{R}|\mathbb{Q}}$, et $\mathrm{H}_2(\mathbf{SL}_2(\mathbb{R}), \mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})) = 0$ (comparer avec [5]).

Remarque 1. Il est possible d'écrire une présentation matricielle similaire en dimension (paires) supérieures pour $\mathrm{C}\ell(V,\psi)$, et d'établir ainsi l'analogue de la suite (5). La première difficulté qui se présente alors est que l'on ne dispose plus d'une décomposition en produit de $\mathrm{Spin}^1(V,\psi)$. De plus, dans les cas où $\mathbb{F}$ ne contient pas de racine carrée de -1, le domaine de validité du Théorème 2.1 se retrouve plus ou moins réduit. Il serait intéressant pour cela d'affiner les théorèmes connus de stabilité pour les groupes orthogonaux.

Références

[1] J.-L. Cathelineau, Sur l'homologie de SL_2 à coefficients dans l'action adjointe, Math. Scand. 63 (1988) 51–86.

[2] J.-L. Cathelineau, Homology of tangent groups considered as discrete groups and scissors congruences, J. Pure Appl. Algebra 132 (1998) 9–25.

[3] J.L. Dupont, Scissors congruences, group homology and characteristic classes, in: Nankai Tracts in Math., Vol. 1, World Scientific, 2001.

[4] J.L. Dupont, C.-H. Sah, Homology of Euclidean groups of motions made discrete and Euclidean scissors congruences, Acta Math. 164 (1990) 1–27.

[5] P. Elbaz-Vincent, Homology of linear groups with coefficients in the adjoint action and K-theory, K-Theory 16 (1999) 35–50.

[6] J.-G. Grebet, Aspects infinitésimaux du troisième problème de Hilbert, Thèse de doctorat, Université de Nice-Sophia Antipolis, 2001.

[7] M. Karoubi, K-théorie multiplicative et homologie cyclique, C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. A–B 322 (1996) 813–817.

[8] H.B. Lawson, M.-L. Michelsohn, Spin Geometry, Princeton University Press, 1989.

[9] W. Parry, C.-H. Sah, Third homology of $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ made discrete, J. Pure Appl. Algebra 30 (1983) 181–209.