Available online at www.sciencedirect.com
SCIENCE DIRECT
ELSEVIER
C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 336 (2003) 121–124
COMPTES RENDUS MATHEMATIQUE

Théorie des groupes/Théorie des nombres

Facteurs de transfert pour les intégrales de Kloosterman

Transfer factors for Kloosterman integrals

Hervé Jacquet

Math. Department, Columbia University, MC 4408, New York, NY 10027, USA

Reçu le 9 décembre 2002 ; accepté le 16 décembre 2002

Présenté par Hervé Jacquet

Résumé

On calcule les facteurs de transfert qui relient les intégrales de Kloosterman absolues et les intégrales de Kloosterman relatives à une extension quadratique. ***Pour citer cet article : H. Jacquet, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 336 (2003).***

Abstract

We compute the transfer factors which relate absolute Klosterman integrals and Kloosterman integrals relative to a quadratic extension. ***To cite this article: H. Jacquet, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 336 (2003).***

1. Enoncé du résultat

On complète les résultats de [1] dont on reprend les notations. Soient E/F une extension de corps locaux non-archimédiens et $\eta : F^\times \to \{\pm 1\}$ le caractère quadratique correspondant. On note $x \mapsto \bar{x}$ l'élément non-trivial du groupe de Galois. Soit ψ un caractère additif non trivial de F et $r \geqslant 1$ un entier. Soit N_r le groupe des matrices trigonales strictes dans $\mathrm{GL}(r, F)$ et $A_r(F)$ l'ensemble des matrices diagonales dans $M(r \times r, F)$. Soit $\theta : N_r(F) \to \mathbb{C}^\times$ le caractère défini par $\theta(n) = \psi(\sum n_{i,i+1})$. Ainsi $(n_1, n_2) \mapsto \theta(n_1 n_2)$ est un caractère du groupe produit $N_r(F) \times N_r(F)$. On fait opérer le groupe $N_r(F) \times N_r(F)$ sur $M(r \times r, F)$ par : $g \mapsto {}^t n_1 g n_2$. Si g est une matrice $r \times r$ on désigne par $\Delta_i(g)$ le déterminant de la sous-matrice formée des i premières lignes et i premières colonnes de g. Les fonctions Δ_i sont des invariants de l'action. Si Φ est une fonction lisse à support compact sur $M(r \times r, F)$ et $g \in M(r \times r, F)$ on définit les intégrales de Kloosterman :

$$\Omega(\Phi, \psi : g) = \int \Phi\left({}^t n_1 g n_2\right) \theta(n_1 n_2)\, \mathrm{d}n_1\, \mathrm{d}n_2;$$

Adresse e-mail : hj@math.columbia.edu (H. Jacquet).

1631-073X/03/$ – see front matter
doi:10.1016/S1631-073X(03)00012-8

l'intégrale est prise sur le quotient du produit $N_r(F) \times N_r(F)$ par le stabilisateur de g dans le produit ; l'élément g est *pertinent*, c'est-à-dire que $\theta(n_1 n_2)$ est trivial sur le stabilisateur de g. Si g est pertinent et $\Delta_r(g) = 0$ alors $\Delta_{r-1}(g) \neq 0$. En particulier, pour $a \in A_r(F)$, $a = \mathrm{diag}(a_1, a_2, \dots, a_r)$, a est pertinent lorsque $a_1 a_2 \cdots a_{r-1} \neq 0$; alors on écrit aussi :

$$\Omega(\Phi, \psi : a_1, a_2, \dots, a_r) = \int_{N_r(F)\times N_r(F)} \Phi\bigl({}^t n_1 a n_2\bigr)\theta(n_1 n_2)\,\mathrm{d}n_1\,\mathrm{d}n_2.$$

On définit $\sigma_r : A_r(F) \to F$ par

$$\sigma_r\bigl(\mathrm{diag}(a_1, a_2, \dots, a_r)\bigr) = a_1(a_1 a_2)\cdots(a_1 a_2 \cdots a_{r-1})$$

et on pose

$$\widetilde{\Omega}(\Phi, \psi : a) = \bigl|\sigma_r(a)\bigr|_F \Omega(\Phi, \psi : a).$$

De même, soit $H(r \times r, E/F)$ l'espace des matrices hermitiennes dans $M(r \times r, E)$. Soit $n \mapsto \theta(n\bar{n})$ le caractère du groupe $N_r(E)$ défini par $\theta(n\bar{n}) = \psi(\sum n_{i,i+1} + \bar{n}_{i,i+1})$. Le groupe $N_r(E)$ opère par $g \mapsto {}^t\bar{n}gn$. Soit Ψ une fonction lisse à support compact sur $H(r \times r, E/F)$. On définit les integrales de Kloosterman relatives :

$$\Omega(\Psi, E/F, \psi : g) = \int \Psi\bigl({}^t\bar{n}gn\bigr)\theta(n\bar{n})\,\mathrm{d}n;$$

l'intégrale est prise sur le quotient de $N_r(E)$ par le stabilisateur de g ; l'élement g est pertinent, c'est-à-dire que $\theta(n\bar{n})$ est trivial sur le stabilisateur de g.

Pour m entier, on désigne par w_m la matrice de permutation $m \times m$ dont les éléments anti-diagonaux sont 1. Les éléments de la forme

$$g = \begin{pmatrix} w_{m_1}a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & w_{m_2}a_2 & \cdots & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & 0 & \cdots & w_{m_j}a_j \end{pmatrix} \tag{1}$$

avec $m_1 + m_2 + \cdots + m_j = r$, $a_1, a_2, \dots, a_j \in F$, $\Delta_r(g) \neq 0$ ou $\Delta_{r-1}(g) \neq 0$, forment un sytème commun de représentants pour les deux ensembles d'orbites pertinentes.

On pose aussi

$$\widetilde{\Omega}(\Psi, E/F, \psi : a) = \eta\bigl(\sigma_r(a)\bigr)\bigl|\sigma_r(a)\bigr|_F \Omega(\Psi, E/F, \psi : a).$$

On écrit $\Phi \overset{\psi}{\leftrightarrow} \Psi$ et on dit que Φ correspond à Ψ par ψ si $\widetilde{\Omega}(\Phi, \psi : a) = \widetilde{\Omega}(\Psi, E/F, \psi : a)$ pour tout a pertinent dans $A_r(F)$. On a prouvé que tout Φ correspond à un Ψ et réciproquement [1,2].

Théorème 1.1. *Pour g de la forme* (1) *il existe un facteur de transfert $\gamma(g, \psi)$ tel que si $\Phi \overset{\psi}{\leftrightarrow} \Psi$ alors*

$$\Omega(\Phi, \psi : g) = \gamma(g, \psi)\Omega(\Psi, E/F, \psi : g).$$

Ceci est trivial pour $r = 1$. On peut donc supposer cette assertion établie pour $r' < r$. Si g est diagonal, on a déja $\gamma(g, \psi) = \eta(\sigma_{r-1}(g))$; en particulier $\gamma(g, \psi) = 1$ si $r = 1$. Supposons que g soit de la forme

$$g = \begin{pmatrix} wa & 0 \\ 0 & w'a' \end{pmatrix} \tag{2}$$

avec wa relevant dans $\mathrm{GL}(n, F) \cap H(n \times n, E/F)$, $w'a'$ relevant dans $M(m \times m, F) \cap H(m \times m, E/F)$ et $r = n + m$. Si g est diagonal, c'est-à-dire si $w = 1$ et $w' = 1$, alors

$$\gamma(g, \psi) = \gamma(a, \psi)\gamma(a', \psi)\eta(\det a)^m. \tag{3}$$

On introduit des intégrales orbitales partielles. Soit $U_{n,m}$ le radical unipotent du sous groupe parabolique standard de type (n,m). On pose :

$$\Omega\left[\Phi,\psi:\begin{pmatrix}A_n & 0\\ 0 & B_m\end{pmatrix}\right]=\int\limits_{U_{n,m}(F)\times U_{n,m}(F)}\Phi\left[{}^t u_2\begin{pmatrix}A_n & 0\\ 0 & B_m\end{pmatrix}u_1\right]\theta(u_1u_2)\,\mathrm{d}u_1\,\mathrm{d}u_2.$$

On peut définir les intégrales orbitales de cette fonction pour l'action de $(N_n(F)\times N_n(F))\times N_m(F)\times N_m(F)$. En particulier, pour g de la forme (2), l'intégrale orbitale évaluée sur le couple $(wa, w'a')$ n'est autre que $\Omega(\Phi,\psi:g)$. Des considérations analogues s'appliquent à

$$\Omega\left[\Psi,E/F,\psi:\begin{pmatrix}A_n & 0\\ 0 & B_m\end{pmatrix}\right]=\int\limits_{U_{n,m}(E)}\Psi\left[{}^t\bar{u}\begin{pmatrix}A_n & 0\\ 0 & B_m\end{pmatrix}u\right]\theta(u\bar{u})\,\mathrm{d}u.$$

Il résulte de (3) que la fonction

$$(A_n,B_m)\mapsto\Omega\left[\Phi,\psi:\begin{pmatrix}A_n & 0\\ 0 & B_m\end{pmatrix}\right]$$

sur $\mathrm{GL}(n,F)\times M(m\times m,F)$ correspond par ψ à la fonction

$$(A_n,B_m)\mapsto\eta\big(\det(A_n)\big)^m\Omega\left[\Psi,E/F,\psi:\begin{pmatrix}A_n & 0\\ 0 & B_m\end{pmatrix}\right]$$

sur $(\mathrm{GL}(n,E)\cap H(n\times n,E/F))\times H(m\times m,E/F)$. Par l'hypothèse de récurrence, cela implique l'existence du facteur $\gamma(g,\psi)$ avec

$$\gamma(g,\psi)=\gamma(wa,\psi)\gamma(w'a',\psi)\eta\big(\det(wa)\big)^m.$$

Pour le cas de $g=w_ra$ on utilise une formule élémentaire. On définit des transformées de Fourier :

$$\check{\Phi}(x)=\int\limits_{M(r\times r,F)}\Phi(y)\psi\big(-\mathrm{Tr}(yw_rx_rw_r)\big)\,\mathrm{d}y,$$

$$\check{\Psi}(x)=\int\limits_{H(r\times r,E/F)}\Psi(y)\psi\big(-\mathrm{Tr}(yw_rx_rw_r)\big)\,\mathrm{d}y.$$

Alors [2] :

$$|a|^{m^2-1}\Omega(\Phi,\psi:w_ra)=\int\Omega\left[\check{\Phi},\bar{\psi}:\begin{pmatrix}-w_{m-1}a^{-1} & 0\\ 0 & b\end{pmatrix}\right]\mathrm{d}b \tag{4}$$

et on a une formule correspondante pour Ψ. Comme $\check{\Phi}\overset{\bar{\psi}}{\leftrightarrow}c(E/F,\psi)^{r(r-1)/2}\check{\Psi}$, ou $c(E/F,\psi)$ est la constante de Weil, on en déduit l'existence du facteur $\gamma(w_ra,\psi)$ avec :

$$\gamma(w_ra,\psi)=\gamma(-w_{r-1}a^{-1},\bar{\psi})c(E/F,\psi)^{r(r-1)/2}\eta\big(\det(-w_{r-1}a^{-1})\big).$$

On a $\gamma(w_1a,\psi)=1$. Rappelons que

$$c(E/F,\psi)^2=\eta(-1),\qquad c(E/F,\psi)c(E/F,\bar{\psi})=1.$$

On peut calculer $\gamma(w_ra,\psi)$ par récurrence. Ses 8 premières valeures sont

$$1,\quad c(E/F,\psi)\eta(-a),\quad \eta(a),\quad 1,\quad \eta(-1),\quad c(E/F,\psi)\eta(-a),\quad \eta(-a),\quad 1.$$

De plus $\gamma(w_9a,\psi)=1$. Comme les facteurs $c(E/F,\psi)^{r(r-1)/2}$ et $\eta(\det(-w_{r-1}a^{-1}))$ sont des fonctions périodiques de r de période 8, on en conclut que $\gamma(w_ra,\psi)$, vu comme fonction de r, est périodique de période 8.

2. Densité des intégrales diagonales

Théorème 2.1. *Si les intégrales orbitales diagonales de Φ s'annulent, alors toutes les intégrales orbitales de Φ s'annulent.*

Comme plus haut on procède par récurrence sur r. Il suffit donc de prouver que $\Omega(\Phi,\psi:w_r a)=0$. Rappelons la formule d'inversion [2]

$$\begin{aligned}&\widetilde{\Omega}(\check{\Phi},\psi:a_1,a_2,\ldots,a_r)\\&\quad=\int\widetilde{\Omega}(\Phi,\psi:p_1,p_2,\ldots,p_r)\psi\left(-\sum_{i=1}^{i=r}p_i a_{r+1-i}+\sum_{i=1}^{i=r-1}\frac{1}{p_i a_{r-i}}\right)\mathrm{d}p_r\,\mathrm{d}p_{r-1}\cdots\mathrm{d}p_1.\end{aligned}\tag{5}$$

Elle montre que les intégrales orbitales diagonales de $\check{\Phi}$ sont nulles. Il en est donc de même de l'intégrale

$$\Omega\left[\check{\Phi},\overline{\psi}:\begin{pmatrix}-w_{m-1}a^{-1}&0\\0&b\end{pmatrix}\right].$$

La conclusion suit de la formule (4). Un résultat analogue s'applique aux intégrales orbitales relatives.

Remarque 1. Les résultats précédents sont déjà dans [3]. Toutefois, pour simplifier, dans [3], on avait traité seulement le cas d'une extension non-ramifiée de caractéristique 0. En tout cas, les démonstrations présentées ici sont plus simples.

Remerciement

Recherche financée en partie par NSF DMS 96 19766.

Références

[1] H. Jacquet, Transfert lisse d'intégrales de Kloosterman, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I 335 (2002) 229–232.
[2] J. H. Jacquet, Smooth Transfer of Kloosterman integrals, Duke Math. J., to appear.
[3] H. Jacquet, A theorem of density for Kloosterman integrals, Asian J. Math. 2 (1998) 759–778.