Available online at www.sciencedirect.com
SCIENCE DIRECT
C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 336 (2003) 949–954
COMPTES RENDUS MATHEMATIQUE

Probabilités/Analyse fonctionnelle

Sous-dualités et noyaux (reproduisants) associés

Xavier Mary [a], Denis De Brucq [b], Stephane Canu [a]

[a] *INSA Rouen, BP 08, avenue de l'université, 76801 Saint-Étienne-du-Rouvray cedex, France*
[b] *Université de Rouen, 1, rue Thomas Becket, 76821 Mont Saint Aignan, France*

Reçu le 15 janvier 2003 ; accepté après révision le 22 avril 2003

Présenté par Paul Deheuvels

Résumé

Une manière d'aborder l'étude des mesures non gaussiennes consiste à généraliser la théorie des sous-espaces hilbertiens de L. Schwartz au cas non hilbertien. Nous initions ici une nouvelle théorie non plus basée sur une structure hilbertienne, mais sur une certaine dualité. Nous développons ainsi le concept de sous-dualité d'un espace vectoriel localement convexe et de son noyau associé. Nous montrons en particulier qu'à toute sous-dualité peut être associé un unique noyau dont l'image est dense dans la sous-dualité. L'image d'une sous-dualité par une application linéaire faiblement continue est également étudiée, ce qui permet de définir sur l'ensemble des sous-dualités une structure d'espace vectoriel moyennant une relation d'équivalence. Nous exhibons alors un représentant canonique. Enfin, nous étudions le cas particulier des sous-dualités de $\mathbb{K}^{\Omega}$ muni de la topologie produit. ***Pour citer cet article : X. Mary et al., C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 336 (2003).***

Abstract

Subdualities and associated (reproducing) kernels. A way to study non-Gaussian measures is to generalize Schwartz's theory of Hilbertian subspaces to the non-Hilbertian case. We initiate here a new theory based upon a given duality rather than an Hilbertian structure. Hence, we develop the concept of subduality of a locally convex vector space and of its associated kernel. We show in particular that to any subduality is associated a unique kernel whose image is dense in the subduality. The image of a subdality under a weakly continuous linear application is also given, which enables the definition of a vector space structure over the set of subdualities given a equivalence relation. We then exhibit a canonical representative. Finally, we study the particular case of subdualities of $\mathbb{K}^{\Omega}$ endowed with the product topology. ***To cite this article: X. Mary et al., C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 336 (2003).***

Abridged English version

In the 1950s Aronzajn and Bergman, in pionnering papers, introduce the concept of Reproducing Kernel Hilbert Spaces (RKHS) and of their reproducing kernel functions. In the 1960s, Schwartz [4] develops their notion and introduces the concept of Hilbertian subspaces, proving the existence of a bijection between theses spaces and positive-definite kernels. He will later develop the theory of Gaussian measures upon this notion [5]. He moreover

Adresses e-mail : xavier.mary@insa-rouen.fr (X. Mary), denis.debrucq@univ-rouen.fr (D. De Brucq), stephane.canu@insa-rouen.fr (S. Canu).

1631-073X/03/$ – see front matter
doi:10.1016/S1631-073X(03)00230-9

extends this concept to Hermitian kernels while questioning the idea of a generalization. Some results in this direction (concerning pairs of Hilbert spaces) can be found in [1].

The introduction of a dual system of vector spaces verifying certain algebraic inclusions (Definition 1.3), which we call subdualities, is an answer to his question. These spaces verify the main properties of Hilbertian subspaces and the set of subdualities may actually be endowed with a vector space structure (given an equivalence relation) isomorph to the vector space of kernels (Theorem 3.1).

This article is then devoted to the study of these subdualities. A topological definition equivalent to Definition 1.3, is that a duality (E, F) is a subduality of the dual system $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ if and only if both E and F are weakly continuously embedded in $\mathcal{E}$ (Proposition 1.4). It appears that we can associate to any subduality a unique kernel (in the sense of L. Schwarz, Theorem 1.6), which image is dense in the subduality (Theorem 1.9). Fig. 1 illustrates the different inclusions related to a subduality and its kernel.

Then we study the image of a subduality by a weakly continuous linear operator (Theorem 2.2), which enables the definition of a vector space structure over the set of subdualities (Theorem 3.1), but given a certain equivalence relation. A canonical representative entirely defined by the kernel is then given (Theorem 4.3). Finally, we study more precisely the particular case of subdualities of $\mathbb{K}^{\Omega}$ endowed with the product topology.

This theory shades a new light upon the fields of non-Gaussian probabilities, non-Hilbertian approximation or differential equations.

Les espaces de Hilbert à noyaux reproduisants, introduits par Aronzajn et Bergman dans les années 50 sont désormais des espaces classiques d'analyse fonctionelle. Le développement principal de cette notion date de 1964 quand Schwartz [4] introduit le concept de sous-espace hilbertien, établissant une bijection entre ces espaces et les noyaux positifs. Sa théorie des mesures gaussiennes sera notamment basée sur cette notion [5]. Il développe ensuite le cas des noyaux hermitiens alors qu'il s'interroge sur l'idée d'une généralisation de ce concept. Une réponse dans le cas de paires hilbertiennes à noyau reproduisant est proposée par Alpay [1]. L'introduction d'espaces en dualité vérifiant des conditions d'inclusion algébrique (Définition 1.3) ou topologique (Proposition 1.4), que nous appelons sous-dualités, propose une réponse plus générale à cette question. Ces espaces vérifient en effet la plupart des propriétés des sous-espaces hilbertiens et il possible de munir l'ensemble des sous-dualités d'une structure d'espace vectoriel (moyennant une relation d'équivalence) qui le rend isomorphe algébriquement à l'espace vectoriels des noyaux (Théorème 3.1). Nous exhibons alors un représentant canonique de ces classes d'équivalences (Théorème 4.3).

Les domaines des probabilités non gaussiennes, de l'approximation non hilbertienne ainsi que celui des équations différentielles bénéficient de cette théorie.

1. Définitions et premières propriétés

Définition 1.1 (*espaces vectoriels en dualité*). Soient E, F deux espaces vectoriels, L une forme bilinéaire sur l'espace produit $F \times E$. On dit que la forme bilinéaire L met E et F en dualité, ou que (E, F) est une dualité (relativement à L) si L sépare E et F, i.e. : (1) $\forall x \neq 0 \in E,\ \exists y \in F,\ L(y, x) \neq 0$; (2) $\forall y \neq 0 \in F,\ \exists x \in E,\ L(y, x) \neq 0$.

Les morphismes suivants sont alors bien définis :

$$\begin{aligned} \gamma_{(E,F)} : F &\longrightarrow E^* \text{ dual algébrique de } E, \\ y &\longmapsto L(y, \cdot), \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \theta_{(E,F)} : E' \stackrel{\Delta}{=} \gamma_{(E,F)}(F) &\longrightarrow F, \\ L(y, \cdot) &\longmapsto y. \end{aligned}$$

Exemples. (1) Soit $\mathcal{E}$ un espace vectoriel localement convexe (séparé), $\mathcal{E}'$ son dual topologique. Alors la forme bilinéaire canonique $(y, x) \mapsto y(x)$ sur $\mathcal{E}' \times \mathcal{E}$ met $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}'$ en dualité. $\gamma_{(\mathcal{E},\mathcal{E}')} : \mathcal{E}' \to \mathcal{E}^*$ est alors l'injection canonique du dual topologique dans le dual algébrique. Dans la suite, tout espace vectoriel topologique localement convexe $\mathcal{E}$ sera considéré en dualité avec son dual topologique $\mathcal{E}'$.

(2) Soient $D'_{[0,1]}$ l'espace des distributions sur $[0,1]$, $C^\infty_{[0,1]}$ l'espace des fonctions C^∞ sur $[0,1]$. $D'_{[0,1]}$ et $C^\infty_{[0,1]}$ sont en dualité relativement à $L : C^\infty_{[0,1]} \times D'_{[0,1]} \to \mathbb{R},\ (f,\phi) \mapsto \int_{[0,1]} f(s)\phi(s)\,\mathrm{d}s$.

Définition 1.2 (*topologies compatibles avec la dualité*). On appelle topologie sur E compatible avec la dualité (E,F) toute topologie localement convexe sur E telle que $E' = \gamma_{(E,F)}(F)$.

La topologie faible (resp. de Mackey) sur E est la moins fine (resp. la plus fine) des topologies compatible avec la dualité (E,F) et on la note $\sigma_{(E,F)}$ (resp. $\tau_{(E,F)}$).

La notion de faible (resp. Mackey) continuité est ainsi entièrement definie pour les morphismes de dualités.

1.1. Sous-dualités

Définition 1.3 (*sous-dualité*). Soient (E,F), $(\mathcal{E},\mathcal{F})$ deux dualités. (E,F) est une sous-dualité de $(\mathcal{E},\mathcal{F})$ si (Fig. 1) : (1) $E \subseteq \mathcal{E},\ F \subseteq \mathcal{E}$; (2) $\gamma_{(\mathcal{E},\mathcal{F})}(\mathcal{F}_{|E}) \subseteq \gamma_{(E,F)}(F),\ \gamma_{(\mathcal{E},\mathcal{F})}(\mathcal{F}_{|F}) \subseteq \gamma_{(F,E)}(E)$ où $\mathcal{F}_{|E}$ (resp. $\mathcal{F}_{|F}$) dénote les restrictions des éléments de $\mathcal{F}$ à E (resp. F). On note $\mathcal{SD}(\mathcal{E},\mathcal{F})$ ($\mathcal{SD}(\mathcal{E})$ si $\mathcal{E}$ est topologique) l'ensemble des sous-dualités de $(\mathcal{E},\mathcal{F})$ (resp. de $(\mathcal{E},\mathcal{E}')$).

Ainsi (E,F) est une sous-dualité de $(\mathcal{E},\mathcal{F})$ si E et F sont deux sous-espaces vectoriels de $\mathcal{E}$ et tout élément de $\mathcal{F}$ (i.e. toute forme linéaire faiblement continue sur $\mathcal{E}$) restreinte à E (resp. à F) admet un représentant dans F (resp. E).

Nous déduisons de cette définition une caractérisation topologique des sous-dualités :

Proposition 1.4 (caractérisation topologique). *Les propositions suivantes sont équivalentes* : (1) (E,F) *est une sous-dualité de* $(\mathcal{E},\mathcal{F})$; (2) *Les injections canoniques* $i : E \mapsto \mathcal{E}$ *et* $j : F \mapsto \mathcal{E}$ *sont faiblements continues* ; (3) $i : E \mapsto \mathcal{E}$ *et* $j : F \mapsto \mathcal{E}$ *sont continues si on munit* $E,\ F$ *et* $\mathcal{E}$ *des topologies de Mackey.*

Exemples. (1) Soit $a(\cdot) \in C^\infty_{[0,1]}$ jamais nulle sur $[0,1]$, et soient $E = \{x \in C^0_{[0,1]},\ (\frac{x}{a})' \in L^1,\ x(0)=0\}$ et $F = \{y \in C^0_{[0,1]},\ \frac{y'}{a} \in L^1,\ y(1)=0\}$ mis en dualité par la forme bilinéaire $L : F \times E \to \mathbb{R},\ (y,x) \mapsto \int_{[0,1]} (\frac{x}{a})'(s) y(s)\,\mathrm{d}s = -\int_{[0,1]} x(s) \frac{y'}{a}(s)\,\mathrm{d}s$. Alors (E,F) est une sous-dualité de $(D'_{[0,1]}, C^\infty_{[0,1]})$ car E et F sont deux sous-espaces de distributions et $\forall f \in C^\infty_{[0,1]},\ \exists x \in E,\ \exists y \in F,\ f = (\frac{x}{a})' = \frac{y'}{a}$.

(2) Soit H un sous-espace hilbertien de $\mathcal{E}$, i.e., un espace de Hilbert inclus continuement dans $\mathcal{E}$. Alors H, vu comme deux espaces (H,H) mis en dualité par le produit scalaire est une sous-dualité de $\mathcal{E}$.

1.2. Sous-dualités et noyaux associés

Nous utilisons ici la terminologie de Schwartz [4] :

Définition 1.5 (*noyau*). On appelle noyau associé à un espace vectoriel topologique localement convexe $\mathcal{E}$ (resp. à une dualité $(\mathcal{E},\mathcal{F})$) toute application linéaire faiblement continue du dual topologique $\mathcal{E}'$ (resp. de $\mathcal{F}$) dans $\mathcal{E}$. On note $\mathfrak{L}(\mathcal{E})$ (resp. $\mathfrak{L}(\mathcal{F},\mathcal{E})$) l'ensemble des noyaux de $\mathcal{E}$.

Théorème 1.6 (noyau d'une sous-dualité). *A toute sous-dualité* (E,F) *de* $(\mathcal{E},\mathcal{F})$ *est associé un unique noyau* $\varkappa$ *de* $(\mathcal{E},\mathcal{F})$ *vérifiant* $\forall y \in F,\ \forall f \in \mathcal{F},\ (f, j(y))_{\mathcal{F},\mathcal{E}} = L(y, i^{-1}\varkappa(f))$ *appelé noyau de la sous-dualité* (E,F) *de* $(\mathcal{E},\mathcal{F})$. *C'est l'application linéaire* $\varkappa : \mathcal{F} \to \mathcal{E},\ f \mapsto i \circ \theta_{(F,E)} \circ j^* \circ \gamma_{(\mathcal{E},\mathcal{F})}(f)$.

Example. Soit (E,F) la sous-dualité de $(D'_{[0,1]}, C^\infty_{[0,1]})$ définie dans l'exemple précédent. Son noyau est $\varkappa : C^\infty_{[0,1]} \to D'_{[0,1]},\ f \mapsto a(\cdot)\int_0^\cdot f(s)\,\mathrm{d}s$.

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{F} \arrow[r, "\gamma_{(\mathcal{E},\mathcal{F})}"] & \mathcal{E}' \arrow[r, "j^*"] \arrow[d, "i^*"'] \arrow[ddrr, dotted, "\varkappa"] & F' \arrow[dr, "\theta_{(F,E)}"] & \\
& E' \arrow[dr, "\theta_{(E,F)}"'] & & E \arrow[d, "i"] \\
& & F \arrow[r, "j"'] & \mathcal{E}
\end{tikzcd}$$

Fig. 1. Illustration d'une sous-dualité, des différentes inclusions relatives et de son noyau.

Fig. 1. The different inclusions related to a subduality, and its kernel.

Remarquons que le noyau de (F, E) est l'adjoint de $\varkappa$, $\varkappa^* : g \mapsto \int_{\cdot}^{1} a(s)g(s)\,\mathrm{d}s$. La Fig. 1 illustre cette définition.

On déduit de la Proposition 1.4 le lemme suivant :

Lemme 1.7. $\varkappa : \mathcal{F} \to E$ *est continue si on munit* E *et* $\mathcal{F}$: (1) *des topologies faibles,* (2) *des topologies de Mackey.*

Définition 1.8 (*sous-dualité primaire*). On appelle sous-dualité primaire associée à un noyau $\varkappa$ les sous-espaces de $\mathcal{E}$ $E_0 = \varkappa(\mathcal{F})$ et $F_0 = \varkappa^*(\mathcal{F})$ mis en dualité par la forme bilinéaire L_0 suivante : $L_0 : F_0 \times E_0 \to \mathbb{K}$, $(y = \varkappa^*(f), x = \varkappa(g)) \mapsto \langle f, \varkappa(g)\rangle_{(\mathcal{F},\mathcal{E})} = \langle \varkappa^*(f), g\rangle_{(\mathcal{E},\mathcal{F})}$.

Théorème 1.9. *Soit* (E, F) *une sous-dualité de noyau* $\varkappa$*. Alors la dualité primaire* (E_0, F_0) *associée à* $\varkappa$ *est dense dans* (E, F) *pour toutes les topologies compatibles avec la dualité.*

Example. Pour le noyau précédent, la dualité primaire est (E_0, F_0) où $E_0 = \{x \in C^{\infty}_{[0,1]},\ x(0) = 0\}$ et $F_0 = \{y \in C^{\infty}_{[0,1]},\ y(1) = 0\}$ avec toujours $L(y, x) = \int_{[0,1]} (\frac{x}{a})'(s) y(s)\,\mathrm{d}s$.

2. Effet d'une application lineaire faiblement continue

Soit $(\mathfrak{E}, \mathfrak{F})$ une seconde dualité ($\mathfrak{E}$ un second espace localement convexe). Il est possible de définir la sous-dualité image par $u : \mathcal{E} \to \mathfrak{E}$, application linéaire faiblement continue, d'une sous-dualité (E, F) de $\mathcal{E}$, à l'aide des relations d'orthogonalité dans la dualité (E, F).

$\forall A \subset \mathcal{E}$, $u_{|A}$ dénote l'application u restreinte à A. Définissons les espaces quotients suivants : $\mathcal{M} = (\ker(u_{|F})^{\perp}/\ker(u_{|E}))$ et $\mathcal{N} = (\ker(u_{|E})^{\perp}/\ker(u_{|F}))$.

Lemme 2.1. *Les applications linéaires* $u_{|\mathcal{M}}$ *et* $u_{|\mathcal{N}}$ *sont bien définies et injectives, et* $\forall (\dot{m}, \dot{n}) \in \mathcal{M} \times \mathcal{N}$, $B(u_{|\mathcal{N}}(\dot{n}), u_{|\mathcal{M}}(\dot{m})) = (n, m)_{(F,E)}$ *définit une dualité séparée* $(u_{|\mathcal{M}}(\mathcal{M}), u_{|\mathcal{N}}(\mathcal{N}))$.

La définition de la sous-dualité image de (E, F) par u est alors contenue dans le théorème suivant :

Théorème 2.2 (sous-dualité image). *La dualité* $(u_{|\mathcal{M}}(\mathcal{M}), u_{|\mathcal{N}}(\mathcal{N}))$ *est une sous-dualité de* $\mathfrak{E}$ *appelée sous-dualité image de* (E, F) *par* u *et notée* $u((E, F))$*. Son noyau est* $u \circ \varkappa \circ u^*$.

Remarquons que la sous-dualité image $u\,((E, F))$ est incluse dans l'image ensembliste $(u(E), u(F))$ mais plus petite en général.

3. Structure algébrique de l'ensemble des sous-dualités

Le Théorème 2.2 nous permet de définir les opérations d'addition et de multiplication externe sur $\mathcal{SD}(\mathcal{E})$, en considérant les applications linéaires faiblement continues $+:\mathcal{E}\times\mathcal{E}\to\mathcal{E}$ et $*:\mathbb{K}\times\mathcal{E}\to\mathcal{E}$. Les opérations associées pour les noyaux sont alors l'addition et la multiplication externe sur $\mathfrak{L}(\mathcal{E})$.
On remarque que l'addition n'est pas injective, ni associative. Soit la relation d'équivalence suivante :

$$(E_1,F_1)\mathcal{R}(E_2,F_2)\quad\Longleftrightarrow\quad(E_1,F_1)-(E_2,F_2)=0\quad\Longleftrightarrow\quad\varkappa_1=\varkappa_2.$$

Théorème 3.1 (structure algébrique). *L'espace* $(\mathcal{SD}(\mathcal{E})/\mathcal{R},+,*)$ *est un espace vectoriel sur* $\mathbb{K}$ *isomorphe algébriquement à l'espace des noyaux* $\mathcal{L}(\mathcal{E})$.

4. Représentant canonique associé à un noyau

L'espace $(\mathcal{SD}(\mathcal{E})/\mathcal{R},+,*)$ étant isomorphe algébriquement à l'espace des noyaux $\mathcal{L}(\mathcal{E})$, il est naturel de tenter d'associer à un noyau un représentant canonique ayant des propriétés plus fortes que la dualité primaire. Nous allons voir qu'un tel représentant existe si le noyau vérifie certaines propriétés. Il est intéressant de mettre en relation cette partie avec les travaux de Aronszajn [2], qui s'est intéressé aux complétions banachiques d'espaces en dualité.[1]

Soit $\varkappa\in\mathcal{L}(\mathcal{E})$ un noyau de $\mathcal{E}$, (E_0,F_0) la dualité primaire associée. On définit les ensembles suivants : (1) $\mathcal{T}_{E_0}=\{\sigma$ tonneaux de E_0, $\exists(\lambda,\gamma)\in\mathbb{R}_+^2,\ |\langle\varkappa^{-1}(\sigma),\sigma\rangle_{(\mathcal{E}',\mathcal{E})}|\leqslant\lambda$ et $|\langle\varkappa^{*-1}(\sigma^\circ),\sigma^\circ\rangle_{(\mathcal{E}',\mathcal{E})}|\leqslant\gamma\}$, où σ° représente le polaire absolu de σ pour la dualité (E_0,F_0) ; (2) $\mathcal{T}_{F_0}=\{\sigma^\circ,\ \sigma\in\mathcal{T}_{E_0}\}$; $\mathcal{T}_{E_0}$ (resp. $\mathcal{T}_{F_0}$) est un ensemble de parties faiblement bornées pour la dualité (E_0,F_0), on peut donc définir sur F_0 (resp. E_0) la topologie de $\mathcal{T}_{E_0}$-convergence, cette topologie étant localement convexe et compatible avec la structure d'espace vectoriel (Proposition 16, p. 86 [3]).

Définition 4.1 (*noyau stable*). Soit $\varkappa\in\mathcal{L}(\mathcal{E})$ un noyau de $\mathcal{E}$. Nous dirons qu'il est stable si (1) les ensembles $\mathcal{T}_{E_0}$ et $\mathcal{T}_{F_0}$ sont non vides ; (2) $\varkappa:\mathcal{E}'\to E_0$ (resp. $\varkappa:\mathcal{E}'\to F_0$) est continu si $\mathcal{E}'$ est muni de la topologie de Mackey et E_0 de la $\mathcal{T}_{F_0}$-convergence (resp. F_0 de la $\mathcal{T}_{E_0}$-convergence).

Lemme 4.2. *Soit* $\varkappa\in\mathcal{L}(\mathcal{E})$ *un noyau stable,* (E_0,F_0) *la dualité primaire associée. Soit* $\widehat{E_0}$ (*resp.* $\widehat{F_0}$) *le complêté de* E_0 *muni de la topologie de la* $\mathcal{T}_{F_0}$*-convergence* (*resp. le complêté de* F_0 *muni de la* $\mathcal{T}_{E_0}$*-convergence*)*. Soit* E (*resp.* F) *l'espace vectoriel engendré par les adhérences* (*dans* $\widehat{E_0}$) *des enveloppes convexes des éléments de* $\mathcal{T}_{E_0}$*. Alors* $E\subset\mathcal{E}$, $F\subset\mathcal{E}$.

Théorème 4.3. *Soit* $\varkappa\in\mathcal{L}(\mathcal{E})$ *un noyau stable,* (E_0,F_0) *la dualité primaire associée.* E *et* F *définis comme précedemment. Alors la forme bilinéaire* L_0 *définie sur la dualité primaire se prolonge en une unique forme bilinéaire* L *sur* $F\times E$ *séparée. Elle définit une dualité* (E,F) *appelée sous-dualité canonique associée au noyau* $\varkappa$.

Exemples. (1) Considérons le noyau précédent (avec pour simplifier $a(\cdot)=1$) : $\varkappa:C^\infty_{[0,1]}\to D'_{[0,1]}$, $f\mapsto\int_0^\cdot f(s)\,\mathrm{d}s$. Alors nous conjecturons (mais c'est un problème ouvert) que le noyau est stable et que la sous-dualité associée est l'espace de Sobolev–Slobodeckij[2] (ou Besov ou Sobolev fractionnaire) $W_2^{1/2}$ en dualité avec lui-même par la forme bilinéaire $L:W_2^{1/2}\times W_2^{1/2}\to\mathbb{R}$, $(y,x)\mapsto\int_{[0,1]}x'(s)y(s)\,\mathrm{d}s$.

[1] Les résultats de cet article sont également très utiles si l'on s'intéresse aux classes d'équivalences d'un certain noyau.
[2] Voir par exemple [6].

(2) Soit H un sous espace hilbertien de $\mathcal{E}$ de noyau $\varkappa$ positif. Alors les éléments de $\mathcal{T}_{H_0}$ sont les tonneaux bornés de polaires absolus bornés pour la norme hilbertienne, et la sous-dualité canonique associée est le couple (H, H) muni de son produit scalaire, i.e. l'espace hilbertien H.

5. Sous-dualités d'évaluation

Définition 5.1 (*sous-dualités d'évaluation*). Soit Ω un ensemble quelconque. Les sous-dualités d'évaluation sur Ω sont les sous-dualités de $\mathbb{K}^{\Omega}$ muni de la topologie produit (ou topologie de la convergence simple).

Définition 5.2 (*noyau reproduisant*). Soit (E, F) une sous-dualité d'évaluation sur Ω de noyau $\varkappa$. On appelle (fonction) noyau reproduisant de (E, F) la fonction de deux variables : $K : \Omega \times \Omega \to \mathbb{K},\ t, s \mapsto K(t, s) = (\varkappa^*(\delta_s), \varkappa(\delta_t))_{(F,E)}$.

Lemme 5.3. *Le noyau $\varkappa$ s'exprime simplement en fonction du noyau reproduisant K par la relation $\varkappa(\delta_t) = K(t, \cdot)$ et on a $E_0 = \mathrm{Vec}\{K(t, \cdot),\ t \in \Omega\}$ (resp. $F_0 = \mathrm{Vec}\{K(\cdot, s),\ s \in \Omega\}$).*

Corollaire 5.4 (évaluation, reproduction). (1) $\forall s \in \Omega,\ \forall x \in E,\ x(s) = (K(\cdot, s), x)_{(F,E)}$ (*resp.* $y(t) = (y, K(t, \cdot))_{(F,E)}$). (2) $K(t, s) = (K(\cdot, s), K(t, \cdot))_{(F,E)}$.

Revenons à l'image d'une sous-dualité par une application linéaire faiblement continue (ici $\mathfrak{E} = \mathbb{K}^{\Omega}$) :

Lemme 5.5. *Soit $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ une dualité, et soit $u : \mathcal{E} \to \mathbb{K}^{\Omega}$ un opérateur linéaire. Alors u est faiblement continu si et seulement s'il existe une famille $\{\Upsilon_t \in \mathcal{F},\ t \in \Omega\}$ telle que : $\forall t \in \Omega,\ \forall e \in \mathcal{E},\ u(e)(t) = (\Upsilon_t, e)_{(\mathcal{F},\mathcal{E})}$. Elle est définie par $\forall t \in \Omega,\ \Upsilon_t = \theta_{(\mathcal{E},\mathcal{F})} \circ u^*(\delta_t)$.*

Proposition 5.6. *Soit (E, F) une sous-dualité de $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ de noyau $\varkappa$, $\{\Upsilon_t \in \mathcal{F},\ t \in \Omega\}$ une famille de $\mathcal{F}$, u l'opérateur associé. Alors $u((E, F))$ est une sous-dualité d'évaluation de noyau reproduisant $K(t, s) = (\Upsilon_s, \varkappa(\Upsilon_t))_{(\mathcal{F},\mathcal{E})}$.*

6. Conclusion

Le concept de sous-dualité permet de généraliser des résultats jusqu'alors propres aux sous-espaces hilbertiens, tels que la correspondance entre sous-dualité et noyau (Théorème 1.6), la densité de la sous-dualité primaire (Théorème 1.9) ou les propriétés d'évaluation pour les sous-dualités de $\mathbb{K}^{\Omega}$. L'ensemble des sous-dualités peut également, moyennant une relation d'équivalence, être muni d'une structure d'espace vectoriel en bijection avec l'ensemble des noyaux (Théorème 3.1). Un représentant canonique de ces classes d'équivalence (Théorème 4.3) est alors exhibé.

En termes d'applications, ce concept fournit un cadre fonctionnel propice à l'étude des mesures non gaussiennes ou des processus en dualité et à l'utilisation des noyaux non symétriques pour l'approximation.

Références

[1] D. Alpay, On linear combinations of positive functions, associated reproducing kernel spaces and a non-Hermitian Schur algorithm, Arch. Math. 58 (1982) 174–182.
[2] N. Aronszajn, Quadratic forms on vector spaces, in: Proc. Internat. Sympos. Linear Spaces, Jerusalem, 1960, pp. 29–87.
[3] A. Grothendieck, Espaces Vectoriels Topologiques, Publicaçao da Sociedade de Matematica de Sao Paulo, 1964.
[4] L. Schwartz, Sous espaces hilbertiens d'espaces vectoriels topologiques et noyaux associés, J. Anal. Math. 13 (1964) 115–256.
[5] L. Schwartz, Radon Measures on Arbitrary Topological Spaces and Cylindrical Measures, Oxford University Press, 1973.
[6] H. Triebel, Theory of Function Spaces, in: Monographs Math., Vol. 78, Birkhäuser, Boston, 1983.