C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 335 (2002) 689–692

Analyse harmonique/*Harmonic Analysis*

Sur les « espaces de Sonine » associés par de Branges à la transformation de Fourier

Jean-François Burnol

Université Lille 1, UFR de mathématiques, cité scientifique M2, 59655 Villeneuve d'Ascq cedex, France

Reçu le 2 septembre 2002 ; accepté le 13 septembre 2002

Note présentée par Jean-Pierre Kahane.

Résumé Nous avons obtenu des formules explicites représentant les fonctions $E(z)$ apparaissant dans la théorie des « espaces de Sonine » associés par de Branges à la transformation de Fourier. ***Pour citer cet article : J.-F. Burnol, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 335 (2002) 689–692.***

On the "Sonine spaces" associated by de Branges to the Fourier transform

Abstract We have obtained explicit formulae representing the functions $E(z)$ arising in the theory of the "Sonine spaces" associated by de Branges to the Fourier transform. ***To cite this article: J.-F. Burnol, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 335 (2002) 689–692.***

1. Espaces et fonctions de de Branges

Nous commencerons par rappeler quelques éléments de base de la théorie de de Branges des « espaces de Hilbert de fonctions entières » [2]. Tout ce dont nous aurons besoin est aussi exposé et démontré dans les pages 220 à 228 du livre [7] de Dym et McKean. Soit L une droite dans le plan complexe, bordant un demi-plan ouvert L_+ qui est toujours chez de Branges le demi-plan supérieur et qui sera toujours chez nous le demi-plan $\mathrm{Re}(s) > 1/2$. Soit $w^\#$ le symétrique orthogonal du nombre complexe w par rapport à L, et notons $F^\#(w) = \overline{F(w^\#)}$. Pour tout espace non nul de Hilbert de fonctions entières tel que (a) l'évaluation en chaque w est continue, (b) $F \mapsto F^\#$ est une isométrie (anti-unitaire), et (c) si $F(\gamma) = 0$ alors $G(w) = (w - \gamma^\#)/(w - \gamma)F(w)$ appartient à l'espace et est de même norme que F, il existe par un théorème de de Branges une (non unique) fonction entière $E(w)$ telle que $|E(w)| > |E(w^\#)|$ pour tout $w \in L_+$ et telle que l'espace de fonctions entières considéré coïncide isométriquement avec l'espace $\mathcal{B}(E)$ défini ainsi : F est dans $\mathcal{B}(E)$ si $F(w)/E(w)$ est dans l'espace de Hardy $\mathbb{H}^2(L_+)$ et si $F^\#(w)/E(w)$ l'est aussi. La norme hilbertienne est obtenu par la première inclusion dans $\mathbb{H}^2(L_+)$. Il faut préciser quel multiple de la mesure de Lebesgue est pris sur la droite L : chez de Branges $L = \mathbb{R}$ avec la mesure de Lebesgue, chez nous $L = 1/2 + \mathrm{i}\mathbb{R}$ avec $1/2\pi$ fois la mesure de Lebesgue. Un autre théorème de de Branges nous informe que $\mathcal{B}(E)$ défini ainsi est toujours non nul et est un espace de Hilbert, pour toute fonction entière $E(w)$ satisfaisant à la condition ci-dessus.

De plus on sait calculer exactement en fonction de E les produits scalaires entre évaluateurs. Dorénavant $L_+ = \{\mathrm{Re}(s) > 1/2\}$. Alors $w^\# = 1 - \overline{w}$. On supposera que la « condition de réalité » est satisfaite, c'est-à-dire que pour tout $F(w)$ dans l'espace $\overline{F(\overline{w})}$ est dans l'espace avec la même norme. On peut alors choisir $E(w)$ de sorte que $\overline{E(w)} = E(\overline{w})$. On écrit $E = A - \mathrm{i}B$ avec A « paire » ($A(1 - w) = A(w)$) et B « impaire ». Les fonctions A et B ont tous leurs zéros sur la droite critique. Les autres fonctions E définissant le même espace (avec la même norme) et réelles sur l'axe réel sont connues exactement : il s'agit des fonctions $kA - \mathrm{i}B/k$ pour $k \in \mathbb{R},\ k \neq 0$. La fonction (la condition de réalité est ici supposée vérifiée)

Adresse e-mail : burnol@agat.univ-lille1.fr (J.-F. Burnol).

$$K(z_1,z_2)=\frac{E(z_1)E(z_2)-E(1-z_1)E(1-z_2)}{z_1+z_2-1}, \tag{1}$$
$$K(z_1,z_2)=2\frac{(-\mathrm{i}B(z_1))A(z_2)+A(z_1)(-\mathrm{i}B(z_2))}{z_1+z_2-1} \tag{2}$$

est comme fonction de z_2 égale à l'évaluateur en $\overline{z_1}$ et comme fonction de z_1 égale à l'évaluateur en $\overline{z_2}$.

2. Espaces de Sonine

Soit $\lambda>0$. Soit $\mathcal{F}$ la transformation de Fourier ($\mathcal{F}(\phi)(x)=\int_{\mathbb{R}}\exp(2\pi\mathrm{i}xy)\phi(y)\,\mathrm{d}y$). Il est connu classiquement (voir [6, Section 2.9]) que $\mathrm{L}^2(-\lambda,\lambda)+\mathcal{F}\mathrm{L}^2(-\lambda,\lambda)$ est un sous espace *fermé* de l'espace de Hilbert $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ (cela se déduit aisément en particulier du caractère compact de l'opérateur (à noyau) $F_\lambda=P_\lambda\mathcal{F}P_\lambda$, où P_λ est la projection orthogonale sur $\mathrm{L}^2(-\lambda,\lambda)$). Bien sûr il s'agit d'un sous-espace propre et son complément perpendiculaire est donc non-nul : il s'agit de l'espace de Hilbert des fonctions de carrés intégrables, nulles et de Fourier nulles dans $(-\lambda,\lambda)$. Suivant de Branges [2], nous dirons qu'une fonction est une fonction de Sonine si elle satisfait à cette condition.

L'argument le plus simple pour montrer concrètement l'existence de fonctions de Sonine nous a été communiqué par le Professeur Kahane[1] : en appliquant un polynôme approprié en x et $\mathrm{d}/\mathrm{d}x$ à la distribution de Poisson $\sum_{n\in\mathbb{Z}}\delta(x-n)$, on obtient une distribution tempérée nulle et de Fourier nulle dans $(-A,A)$ avec A arbitraire. Après régularisation par multiplication et convolution additive par des fonctions tests appropriées on obtient une fonction (non-nulle...) dans la classe de Schwartz (donc de carré intégrable) ayant la propriété de Sonine, avec $\lambda>0$ arbitrairement grand.

Dans [5] nous montrons que la *convolution multiplicative* permet d'associer à toute distribution ayant la propriété d'annulation de Sonine une formule de *co-Poisson* portant sur des fonctions de Sonine, et qui généralise les formules de co-Poisson associées dans [4] à la fonction dzêta de Riemann et aux séries L de Hecke–Tate. Il apparaît d'ailleurs fort utile pour l'étude des fonctions de carrés intégrables de de Branges–Sonine de disposer de résultats généraux sur les distributions ayant la même propriété d'annulation (propriété qu'il convient aussi de généraliser, par exemple en remplaçant la condition « nulle dans $(-\lambda,\lambda)$ » par la condition « polynomiale dans $(-\lambda,\lambda)$ de degré $\leqslant M$ »). Dans la suite nous nous restreignons aux fonctions et distributions *paires*[2], pour lesquelles $\mathcal{F}$ devient la transformée en cosinus $\mathcal{F}_+(\phi)(x)=2\int_0^\infty\cos(2\pi xy)\phi(y)\,\mathrm{d}y$. Nous désignons par K_λ l'espace des fonctions de Sonine paires et de carrés intégrables. Nous utiliserons le résultat suivant :

THÉORÈME 1 ([5]). – *Soit D une distribution tempérée paire qui s'annule sur $(-\lambda,\lambda)$. On (rappelle que l'on) peut donner un sens à $\widehat{D}(s)=\int_0^\infty D(t)t^{-s}\,\mathrm{d}t$ comme fonction analytique de s pour $\mathrm{Re}(s)\gg 1$. Si $\mathcal{F}_+(D)$ est à nouveau nulle dans $(-\lambda,\lambda)$ alors $\widehat{D}(s)$ est une fonction entière de s, qui a des zéros triviaux en $-2n$, $n\in\mathbb{N}$. De plus on a l'équation fonctionnelle*

$$\pi^{-s/2}\Gamma(s/2)\widehat{D}(s)=\pi^{-(1-s)/2}\Gamma((1-s)/2)\widehat{\mathcal{F}_+(D)}(1-s).$$

Considérons alors l'espace de Hilbert non-nul $\mathcal{S}_\lambda$ des fonctions entières $F(w)=\pi^{-w/2}\Gamma(w/2)\widehat{f}(w)$, où f parcourt K_λ. Il est aisé de vérifier que $\mathcal{S}_\lambda$ vérifie les axiomes (a), (b), et (c), et est donc un espace de de Branges, par rapport à la droite critique, et qui vérifie la condition de réalité (de Branges [1,2] a associé plus généralement de tels espaces aux transformations de Hankel de paramètre ν, $\nu>-1$). Le problème (qui est équivalent à celui du calcul des produits scalaires entre évaluateurs dans K_λ) était donc posé de déterminer les fonctions entières $\mathcal{A}_\lambda(w)$, $\mathcal{B}_\lambda(w)$ et $\mathcal{E}_\lambda(w)=\mathcal{A}_\lambda(w)-\mathrm{i}\mathcal{B}_\lambda(w)$ qui permettent d'écrire l'identité (y-compris pour la norme) $\mathcal{S}_\lambda=\mathcal{B}(\mathcal{E}_\lambda)$. Nous donnons dans la présente Note une solution explicite à ce problème.

3. Un problème de projection orthogonale

Soit P_λ la projection orthogonale sur $\mathrm{L}^2(-\lambda,\lambda)$ et $\widetilde{P_\lambda}=\mathcal{F}P_\lambda\mathcal{F}^*=\mathcal{F}^*P_\lambda\mathcal{F}$ la projection sur $\mathcal{F}(\mathrm{L}^2(-\lambda,\lambda))$. Soit $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})^{\mathrm{pair}}$ l'espace des fonctions paires avec comme norme $\|f\|^2=\int_0^\infty|f(t)|^2\,\mathrm{d}t$. Sur $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})^{\mathrm{pair}}$ on a $\widetilde{P_\lambda}=\mathcal{F}_+P_\lambda\mathcal{F}_+$. Soit K_λ son sous-espace de Sonine, et $G_\lambda=P_\lambda(\mathrm{L}^2(\mathbb{R})^{\mathrm{pair}})+\widetilde{P_\lambda}(\mathrm{L}^2(\mathbb{R})^{\mathrm{pair}})$.

LEMME 2. – *L'espace de Sonine K_λ est le noyau de l'opérateur $P_\lambda + \widetilde{P_\lambda}$ (sur $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})^{\mathrm{pair}}$). La restriction de cet opérateur à G_λ est auto-adjoint et de Fredholm (i.e. de la forme $1 +$ compact) et est inversible. La projection orthogonale de $f \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R})^{\mathrm{pair}}$ sur G_λ est $(P_\lambda + \widetilde{P_\lambda})^{-1}(P_\lambda(f) + \widetilde{P_\lambda}(f))$.*

Si $P_\lambda(f) + \widetilde{P_\lambda}(f) = 0$ alors $g = P_\lambda(f) = -\widetilde{P_\lambda}(f) = 0$ et f est dans K_λ. Donc si $k \in G_\lambda$ a la même image sous $P_\lambda + \widetilde{P_\lambda}$ que f alors $f - k$ est dans K_λ et k est la projection orthogonale de f sur G_λ. Considérons $\phi : \mathrm{L}^2(-\lambda,\lambda)^{\mathrm{pair}} \oplus \mathrm{L}^2(-\lambda,\lambda)^{\mathrm{pair}} \to G_\lambda$ qui envoie (u, v) sur $u + \mathcal{F}_+(v)$. L'opérateur borné ϕ est injectif et surjectif donc un isomorphisme topologique qui conjugue $P_\lambda + \widetilde{P_\lambda}$ à l'opérateur (lui-aussi auto-adjoint) $(u, v) \mapsto (u + F_\lambda v, F_\lambda u + v)$, avec $F_\lambda = P_\lambda \mathcal{F}_+ P_\lambda$ compact auto-adjoint de norme strictement inférieure à 1. L'inverse de cet opérateur est $(u, v) \mapsto ((1 - D_\lambda)^{-1}(u - F_\lambda v), (1 - D_\lambda)^{-1}(-F_\lambda u + v))$. Dans cette formule $D_\lambda = F_\lambda^2$ peut-être remplacé par le noyau $P_\lambda \mathcal{F}^* P_\lambda \mathcal{F} P_\lambda$ puisqu'il n'agit que sur des fonctions paires. On note que F_λ a les mêmes vecteurs propres que D_λ : ce sont les « fonctions prolates sphéroidales » (paires) e_{2n}, $n \geqslant 0$, [9]. Ainsi :

LEMME 3. – *Les vecteurs propres de l'opérateur (dans G_λ) de Fredholm $P_\lambda + \widetilde{P_\lambda}$ sont les vecteurs $e_{2n} \pm \mathcal{F}_+(e_{2n})$, $n \in \mathbb{N}$. Ils forment une base orthogonale de G_λ puisque l'opérateur est auto-adjoint.*

Il est donc possible d'écrire la projection orthogonale sur l'espace de Sonine en utilisant la base orthogonale de G_λ ci-dessus, mais nous ne ferons pas usage de telles formules.

Remarque 1. – L'auteur doit à M. Balazard et É. Saias (communication privée, décembre 2001) l'observation que les fonctions sphéroidales permettent d'écrire une base orthogonale de G_λ (leur base orthogonale diffère légèrement de celle apparaissant ici).

Si l'on combine les formules précédentes on obtient :

THÉORÈME 4. – *Soit $f(x)$ une fonction paire de carré intégrable. Sa projection orthogonale sur l'espace de Sonine K_λ est donnée par la formule :*

$$\pi_\lambda(f) = f - (1 - D_\lambda)^{-1}\bigl(P_\lambda(f) - F_\lambda \mathcal{F}_+(f)\bigr) - \mathcal{F}_+(1 - D_\lambda)^{-1}\bigl(P_\lambda \mathcal{F}_+(f) - F_\lambda(f)\bigr).$$

On a $F_\lambda = P_\lambda \mathcal{F}_+ P_\lambda$ et $D_\lambda = F_\lambda^2$ agissant sur $\mathrm{L}^2(-\lambda,\lambda)^{\mathrm{pair}}$. On peut remplacer D_λ par le noyau $\sin(2\pi\lambda(x - y))/\pi(x - y)$ restreint à $\mathrm{L}^2(-\lambda,\lambda)^{\mathrm{pair}}$.

COROLLAIRE 5. – *Si $f|_{(-\lambda,\lambda)} = 0$ alors $\pi_\lambda(f) = f|_{|t|>\lambda} - (\mathcal{F}_+(1 - D_\lambda)^{-1} P_\lambda \mathcal{F}_+(f))|_{|t|>\lambda}$.*
Si $f = \mathcal{F}_+(f)$ alors $\pi_\lambda(f) = f - (1 + \mathcal{F}_+)(1 + F_\lambda)^{-1} P_\lambda(f)$.
Si $f = -\mathcal{F}_+(f)$ alors $\pi_\lambda(f) = f - (1 - \mathcal{F}_+)(1 - F_\lambda)^{-1} P_\lambda(f)$.

4. Deux remarquables distributions ayant la propriété de Sonine

Nous appliquons formellement la projection orthogonale aux distributions paires invariante et anti-invariante sous Fourier : $\delta_{-\lambda}(t) + \delta_\lambda(t) + 2\cos(2\pi\lambda t)$ et $\delta_{-\lambda}(t) + \delta_\lambda(t) - 2\cos(2\pi\lambda t)$ et cela nous mène à

DÉFINITION 1. – On pose

$$A_\lambda(t) = \delta_{-\lambda}(t) + \delta_\lambda(t) + 2\cos(2\pi\lambda t) - \bigl((1 + \mathcal{F}_+)(1 + F_\lambda)^{-1}\bigl(2\cos(2\pi\lambda y)\bigr)\bigr)(t),$$
$$-\mathrm{i}B_\lambda(t) = \delta_{-\lambda}(t) + \delta_\lambda(t) - 2\cos(2\pi\lambda t) + \bigl((1 - \mathcal{F}_+)(1 - F_\lambda)^{-1}\bigl(2\cos(2\pi\lambda y)\bigr)\bigr)(t).$$

THÉORÈME 6. – *Les distributions paires tempérées $A_\lambda(t)$ et $-\mathrm{i}B_\lambda(t)$ ont la propriété de Sonine : elles sont nulles et de Fourier nulles dans l'intervalle $(-\lambda, \lambda)$. Elles sont respectivement invariante et anti-invariante sous Fourier.*

DÉFINITION 2. – On pose $\psi_+^\lambda(t) = 2\cos(2\pi\lambda t) - \mathcal{F}_+((1 + F_\lambda)^{-1} P_\lambda(2\cos(2\pi\lambda y)))(t)$, $\psi_-^\lambda(t) = 2\cos(2\pi\lambda t) + \mathcal{F}_+((1 - F_\lambda)^{-1} P_\lambda(2\cos(2\pi\lambda y)))(t)$.

THÉORÈME 7. – *La fonction entière paire* $\psi_\pm^\lambda$ *est* (*l'unique*) *fonction entière dont la restriction à* $(-\lambda,\lambda)$ *est* $(1\pm F_\lambda)^{-1}(2\cos(2\pi\lambda y))$. *Elle est aussi l'unique fonction solution de l'équation* $\phi(x)\pm\mathcal{F}(\phi|_{(-\lambda,\lambda)})(x)=2\cos(2\pi\lambda x)$. *On a* $A_\lambda=\psi_+^\lambda+\mathcal{F}(\psi_+^\lambda)$ *et* $-\mathrm{i}B_\lambda=-\psi_-^\lambda+\mathcal{F}(\psi_-^\lambda)$.

5. Les fonctions $\mathcal{E}(w)$, $\mathcal{A}(w)$, $\mathcal{B}(w)$ pour les espaces de Sonine

Nous avons démontré le résultat suivant :

THÉORÈME 8. – *Soit*

$$\mathcal{E}_\lambda(w)=\pi^{-w/2}\Gamma\left(\frac{w}{2}\right)\left(\lambda^{1/2-w}+\frac{\sqrt{\lambda}}{2}\int_\lambda^\infty\left(\psi_+^\lambda(t)-\psi_-^\lambda(t)\right)t^{-w}\,\mathrm{d}t\right).$$

L'intégrale est absolument convergente pour $\mathrm{Re}(w)>0$. *La fonction* $\mathcal{E}_\lambda(w)$ *est une fonction entière satisfaisant la condition de de Branges pour le demi-plan* $\mathrm{Re}(w)>1/2$ *et l'espace* $\mathcal{B}(\mathcal{E}_\lambda)$ *coïncide (isométriquement) avec l'espace* $\mathcal{S}_\lambda$ *des transformées de Mellin complétées des fonctions de* K_λ.

Nous esquissons la démonstration. On notera $X_w^\lambda(t)$ l'unique élément de K_λ tel que $\forall f\in K_\lambda$ $\int_0^\infty f(t)t^{-w}\,\mathrm{d}t=\int_0^\infty f(t)X_w^\lambda(t)\,\mathrm{d}t$ (pour $\mathrm{Re}(w)\leqslant 1/2$ la première intégrale est un prolongement analytique). Pour $\mathrm{Re}(w)>1/2$ la formule pour la projection orthogonale permet d'écrire « explicitement » $X_w^\lambda(t)$, et on voit en particulier que $X_w^\lambda(t)-t^{-w}$ est la restriction à $t>\lambda$ d'une fonction entière. L'idée est de calculer la distribution $(t\,\mathrm{d}/\mathrm{d}t+w)X_w^\lambda(t)$: en effet on peut montrer en partant de la formule (2) que (la transformée de Mellin complétée de) la partie invariante sous Fourier de cette distribution sera un multiple (réel positif lorsque $w\in(1/2,+\infty)$) d'une fonction $\mathcal{A}_\lambda(z)$ possible, et que (la transformée de Mellin complétée de) la partie anti-invariante sous Fourier sera un multiple d'une fonction $-\mathrm{i}\mathcal{B}_\lambda(z)$. Or le calcul montre que la partie invariante de $(t\,\mathrm{d}/\mathrm{d}t+w)X_w^\lambda(t)$ est multiple de la distribution remarquable $A_\lambda(t)$ définie précédemment et que la partie anti-invariante est multiple de $-\mathrm{i}B_\lambda(t)$. Une étude plus poussée permet d'affirmer que la combinaison $\sqrt{\lambda}/2(A_\lambda-\mathrm{i}B_\lambda)(t)$ a comme transformée de Mellin (complétée par le facteur Gamma) une fonction $\mathcal{E}_\lambda(w)$ possible pour l'espace de Hilbert de de Branges Sonine $\mathcal{S}_\lambda$. La démonstration donne aussi :

THÉORÈME 9. – *Il y a coïncidence entre* $\mathcal{E}_\lambda(w)$ *et* $\sqrt{\lambda}$ *fois la valeur du « saut » de l'évaluateur* (*« euclidien »*) $Z_w^\lambda(t)=\pi^{-w/2}\Gamma(w/2)X_w^\lambda(t)$ *en* $t=\lambda$.

Il est intéressant que certaines quantités apparaissant dans cette étude et liées au noyau de Dirichlet jouent un rôle dans l'étude de son déterminant de Fredholm sur un intervalle fini, déterminant dont on connaît l'importance dans la théorie des matrices aléatoires [8].

---

[1] Lettre adressée à l'auteur, mars 2002.

[2] Quelques ajustements simples partout dans ce qui suit comme remplacer les cosinus par des sinus donnent la théorie pour le cas impair.

Références bibliographiques

[1] L. de Branges, Self-reciprocal functions, J. Math. Anal. Appl. 9 (1964) 433–457.
[2] L. de Branges, Espaces de Hilbert de Fonctions Entières, Masson, Paris, 1972.
[3] J.-F. Burnol, Sur certains espaces de Hilbert de fonctions entières, liés à la transformation de Fourier et aux fonctions L de Dirichlet et de Riemann, C. R. Acad. Sci. Paris, Série I 333 (2001) 201–206.
[4] J.-F. Burnol, On Fourier and Zeta(s), Habilitationsschrift, math/0112254. Article soumis.
[5] J.-F. Burnol, Co-Poisson intertwining: distribution and function theoretic aspects, en préparation.
[6] H. Dym, H.P. McKean, Fourier Series and Integrals, Academic Press, 1972.
[7] H. Dym, H.P. McKean, Gaussian Processes, Function Theory, and the Inverse Spectral Problem, Academic Press, New York, 1976.
[8] M.L. Mehta, Random Matrices, 2nd ed., Academic Press, San Diego, 1991.
[9] D. Slepian, Some comments on Fourier analysis, uncertainty and modeling, SIAM Rev. 25 (3) (1983) 379–393.