C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 335 (2002) 553–556

**Statistique/*Statistics***
**(Probabilités/*Probability Theory*)**

# Étude asymptotique locale de l'estimateur par ondelettes

**Anne Massiani**

**Université Paris 6, LSTA, boîte 158, 175, rue du Chevaleret, 75013 Paris, France**

**Reçu le 10 mai 2002 ; accepté après révision le 26 juillet 2002**

**Note présentée par Paul Deheuvels.**

**Résumé** Nous énonçons une généralisation du théorème central limite ponctuel de Wu [12] pour l'estimateur linéaire par méthode d'ondelettes. Nous présentons également une loi du logarithme itéré ponctuelle pour ce même estimateur. Pour établir cette loi du logarithme itéré, nous utilisons les résultats de Mason [9] sur le comportement asymptotique du processus empirique de queue. ***Pour citer cet article : A. Massiani, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 335 (2002) 553–556.***


## A law of the iterated logarithm for wavelet density estimator

**Abstract** We state a pointwise central limit theorem for the linear wavelet density estimator in a more general setting than the result of Wu [12]. Furthermore, we also give a pointwise law of the iterated logarithm for this density estimator. Our proof of the law of the iterated logarithm uses the results of Mason [9] on the asymptotic behavior of the tail empirical process. ***To cite this article: A. Massiani, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 335 (2002) 553–556.***


## 1. Introduction

Depuis le début des années 1990, la théorie des ondelettes, développée, entre autres, par Meyer [11], a fourni aux statisticiens de nouveaux outils d'estimation non paramétrique. Ces méthodes, que nous présentons brièvement ci-dessous, sont dans le prolongement des méthodes d'estimation par séries orthogonales.

Soient $X_1, X_2, \ldots$ des variables aléatoires indépendantes et équidistribuées de densité inconnue $f$ appartenant à $L_2(\mathbb{R})$, que l'on cherche à estimer. Soient $\varphi$ une fonction d'échelle et $\Psi$ une ondelette mère, toutes deux à support compact, associées à l'analyse multirésolution $(V_j)_{j\in\mathbb{Z}}$. Notons, pour tous $j$ et $k$ dans $\mathbb{Z}$ :

$$\varphi_{jk} = 2^{j/2}\varphi\big(2^j \cdot -k\big), \qquad \Psi_{jk} = 2^{j/2}\Psi\big(2^j \cdot -k\big),$$
$$\alpha_{jk} = \int_{-\infty}^{\infty} f(u)\varphi_{jk}(u)\,\mathrm{d}u, \qquad \beta_{jk} = \int_{-\infty}^{\infty} f(u)\Psi_{jk}(u)\,\mathrm{d}u.$$

*Adresse e-mail :* amassia@ccr.jussieu.fr (A. Massiani).


S1631-073X(02)02519-0/FLA

On a alors l'égalité dans $L_2$, pour $j_0$ fixé dans $\mathbb{Z}$ : $f = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \alpha_{j_0k}\varphi_{j_0k} + \sum_{j\geqslant j_0}\sum_{k\in\mathbb{Z}} \beta_{jk}\Psi_{jk}$.

Cette décomposition suggère d'approcher $f$ par sa projection $\sum_{k\in\mathbb{Z}} \alpha_{j_0k}\varphi_{j_0k} + \sum_{l=j_0}^{j_n-1}\sum_{k\in\mathbb{Z}} \beta_{lk}\Psi_{lk}$ sur le sous-espace de dimension infinie $V_{j_n}$, où $j_n$ dépend du nombre d'observations $n$. On estime alors les coefficients $\alpha_{j_0k}$ et $\beta_{lk}$ par les quantités $\widehat{\alpha}_{j_0k} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\varphi_{j_0k}(X_i)$ et $\widehat{\beta}_{lk} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\Psi_{lk}(X_i)$, pour $j_0 \leqslant l \leqslant j_n - 1$ et $k \in \mathbb{Z}$. Ceci conduit ainsi à considérer l'estimateur « linéaire » $\hat{f}_{j_n}$ de $f$ défini par :

$$\hat{f}_{j_n}(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \widehat{\alpha}_{j_0}\varphi_{j_0k}(x) + \sum_{l=j_0}^{j_n-1}\sum_{k\in\mathbb{Z}} \widehat{\beta}_{lk}\Psi_{lk}(x), \quad \text{pour } x \in \mathbb{R}. \tag{1.1}$$

Cet estimateur se réécrit sous la forme suivante, proche de celle d'un estimateur à noyau :

$$\hat{f}_{j_n}(x) = \frac{2^{j_n}}{n}\sum_{i=1}^{n} K\left(2^{j_n}x, 2^{j_n}X_i\right), \quad \text{pour } x \in \mathbb{R}, \tag{1.2}$$

où $K(x, y) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \varphi(x-k)\varphi(y-k)$, pour $x, y \in \mathbb{R}$.

Une question naturelle (et même inévitable !) est d'évaluer les performances globales ou ponctuelles des estimateurs par méthode d'ondelettes. Pour une étude du comportement asymptotique du risque $L_p$ dans les espaces de Sobolev et de Besov, on peut consulter le livre de Härdle et al. [7]. Leur travail concerne les estimateurs linéaires, ainsi que les estimateurs non linéaires, dits « à seuil », que nous n'abordons pas ici. Zhang et Zheng [13] se sont quant à eux intéressés à la normalité asymptotique de l'erreur $L_2$ et utilisent leur résultat pour construire un test d'ajustement de la densité. En ce qui concerne la vitesse de convergence ponctuelle, Wu [12] a obtenu un théorème de normalité aymptotique. Nous reformulons ici de manière plus générale le Théorème 3.16 de Wu [12], et nous énonçons une loi du logarithme itéré, comparable à celle démontrée pour les estimateurs à noyau par Hall [6], puis Deheuvels et Mason [5].

La Section 2 est consacrée à la présentation de nos résultats. La preuve complète de ces résultats figure dans Massiani [10]. Cependant, quelques éléments de preuve de la loi du logarithme itéré pourront être trouvés dans la Section 3.

## 2. Présentation des résultats

Nous supposons désormais que la fonction d'échelle $\varphi$ est continue à gauche, bornée, et à support compact. L'exemple le plus simple d'une telle fonction est la fonction de Haar définie par $\varphi = \mathbb{1}_{]0,1]}$.

Un problème important réside dans le choix correct du « terme de normalisation » intervenant dans les résultats que nous cherchons à établir. Nous précisons pour commencer ce terme de normalisation. Un calcul élémentaire montre que si $f$ est continue en un point $x$ tel que $f(x) > 0$, alors la variance asymptotique de $\hat{f}_{j_n}(x)$ est de l'ordre de $\frac{2^{j_n}}{n} f(x) \int_{-\infty}^{\infty} K^2(2^{j_n}x, u)\,\mathrm{d}u$. Remarquons alors que la suite $\{\int_{-\infty}^{\infty} K^2(2^{j_n}x, u)\,\mathrm{d}u,\ n \geqslant 1\}$ est bornée, comme le montre le Lemme 2.1 suivant (ce lemme est une conséquence directe de l'inégalité de Hölder et du Théorème 4, p. 33, de Meyer [11]).

LEMME 2.1. – *Sous l'hypothèse que $\varphi$ est une fonction continue à gauche, bornée, à support compact, il existe deux constantes $B$ et $C$ strictement positives telles que* :

$$B \leqslant \int_{-\infty}^{\infty} K^2(x, u)\,\mathrm{d}u \leqslant C, \quad \textit{pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

Rappelons aussi que l'égalité $K(u-l, v-l) = K(u, v)$, vraie pour tout entier $l$ et tous réels $u$ et $v$, a pour conséquence que, pour tout point binaire $x = p/2^q$ où $p$ et $q$ sont dans $\mathbb{N}$, la quantité $\int_{-\infty}^{\infty} K^2(2^{j_n}x, u)\,\mathrm{d}u$ est égale à $\int_{-\infty}^{\infty} K^2(0, u)\,\mathrm{d}u$, dès que $n$ est assez grand. Rappellons enfin, comme le font remarquer Antoniadis et al. [1], que, si $x$ n'est pas un point binaire, la suite $\{\int_{-\infty}^{\infty} K^2(2^{j_n}x, u)\,\mathrm{d}u,\ n \geqslant 1\}$ n'est en général pas convergente (sauf, bien sûr, dans le cas de la base de Haar, où $\int_{-\infty}^{\infty} K^2(2^{j_n}x, u)\,\mathrm{d}u = 1$, pour tout $x$ et tout $n$).

En conséquence, nous réécrivons le Théorème 3.16 de Wu [12] sous la forme plus générale énoncée dans le Théorème 2.2 ci-dessous. Nous supposons en outre que $f$ est une fonction continue en un point, et non sur tout un intervalle, et nous considérons une suite $\{j_n,\ n \geqslant 1\}$ vérifiant les hypothèses générales suivantes :

$$j_n \uparrow \infty, \quad \text{et} \quad \frac{n}{2^{j_n}} \to \infty, \quad \text{quand } n \to \infty. \tag{2.1}$$

THÉORÈME 2.2. – *Soit $\varphi$ une fonction continue à gauche, bornée, à support compact. Supposons que $f$ est continue en un point $x$ tel que la quantité $f(x)$ soit strictement positive. Si la suite $\{j_n,\ n \geqslant 1\}$ vérifie la condition* (2.1)*, alors l'estimateur $\hat{f}_{j_n}$ défini par* (1.2) *vérifie* :

$$\left(\frac{n}{2^{j_n}}\right)^{1/2} \frac{\hat{f}_{j_n}(x) - E\hat{f}_{j_n}(x)}{(f(x)\int_{-\infty}^{\infty} K^2(2^{j_n}x, u)\,\mathrm{d}u)^{1/2}} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1), \tag{2.2}$$

*où $\mathcal{N}(0,1)$ désigne la loi normale centrée réduite.*

Précisons que ce résultat s'obtient en suivant la démarche générale de Wu [12]. On cherche un équivalent asymptotique de la variance, et on remplace le Lemme 2.8 de Wu [12] par le Théorème 27.2 de Billingsley [2], en s'assurant que la condition de Lindeberg est bien vérifiée.

*Remarque* 2.1. – Le résultat précédent reste vrai si l'on suppose que $\varphi$ est une fonction de l'espace de Schwarz d'ordre $r$ envisagé par Wu [12].

Nous énonçons maintenant une loi du logarithme itéré. Cette loi du logarithme itéré est valable si l'on suppose qu'en plus des conditions précédentes, la fonction $\varphi$ est à variations bornées. La fonction de Haar vérifie bien sûr cette nouvelle condition. D'autres exemples de telles fonctions peuvent être fournis par la construction de Daubechies (cf. Daubechies [3], ou Härdle et al. [7], Chapitre 7). Nous utilisons dans notre théorème la notation $\log_2 n = \log\log(\max(n, 3))$, et nous considérons une suite $\{j_n = [d_n],\ n \geqslant 1\}$, où $\{d_n,\ n \geqslant 1\}$ vérifie les conditions suivantes : [1]

$$d_n \uparrow \infty, \quad \frac{n}{2^{d_n}} \uparrow \infty, \quad \text{et} \quad \frac{n}{2^{d_n}\log_2 n} \to \infty, \quad \text{quand } n \to \infty. \tag{2.3}$$

THÉORÈME 2.3. – *Soit $\varphi$ une fonction continue à gauche, à support compact et à variations bornées. Supposons que $f$ est continue en un point $x$ tel que la quantité $f(x)$ soit strictement positive. Si la suite $\{j_n,\ n \geqslant 1\}$ vérifie la condition* (2.3)*, alors l'estimateur $\hat{f}_{j_n}$ défini par* (1.2) *vérifie* :

$$\limsup_{n\to\infty} \pm \left(\frac{n}{2 \times 2^{j_n}\log_2 n}\right)^{1/2} \frac{(\hat{f}_{j_n}(x) - E\hat{f}_{j_n}(x))}{(f(x)\int_{-\infty}^{\infty} K^2(2^{j_n}x, u)\,\mathrm{d}u)^{1/2}} = 1 \quad p.s. \tag{2.4}$$

*Remarque* 2.2. – Si la fonction $\varphi$ n'est pas supposée continue à gauche, le Lemme 2.1 et les deux théorèmes précédents restent valables pour presque tout $x$ de $\mathbb{R}$.

## 3. Quelques éléments de preuve du Théorème 2.3

L'idée directrice de cette preuve s'inspire des articles de Deheuvels et Mason [4,5]. Notons $\alpha_n$ le processus empirique uniforme basé sur des variables aléatoires $U_1, U_2, \ldots$ indépendantes et uniformément distribuées sur $[0,1]$, qui est défini pour $n \geqslant 1$ et $0 \leqslant s \leqslant 1$ par : $\alpha_n(s) = \sqrt{n}\big(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{\{U_i \leqslant s\}} - s\big)$. Le point de départ de notre démonstration est alors d'exprimer, grâce à un changement de variable et à une intégration par parties, la quantité $\hat{f}_{j_n}(x) - E\hat{f}_{j_n}(x)$ en fonction des accroissements du processus empirique uniforme. Plus précisément, on obtient :

$$\hat{f}_{j_n}(x) - E\hat{f}_{j_n}(x) = \frac{2^{j_n}}{\sqrt{n}} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\alpha_n\left(F\left(x + \frac{s}{2^{j(n)}}\right)\right) - \alpha_n(F(x))\right] \mathrm{d}K_n(s),$$

où $F$ désigne la fonction de répartition de $X_1, \ldots, X_n$ et $K_n$ la fonction $-K(2^{j_n}x, 2^{j_n}x + \cdot)$.

On peut alors utiliser le Théorème 1 et le Corollaire 2 de Mason [9]. Le premier résultat est une approximation du processus empirique de queue par une suite de processus gaussiens, dans le prolongement des résultats de Komlos et al. [8]. Le second, conséquence du premier, est une loi du logarithme itéré fonctionnelle pour le processus empirique de queue. Cette loi du logarithme itéré fonctionnelle permet d'obtenir une majoration de la limite supérieure intervenant dans (2.4). Le Théorème 1 de Mason [9] permet ensuite de ramener une partie de la preuve de la minoration de la limite supérieure intervenant dans (2.4) à l'étude du tableau triangulaire constitué des variables gaussiennes $Z_1^n, Z_2^n, \ldots, Z_n^n$ définies par :

$$Z_m^n = a_n^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} W_m(a_n s)\, \mathrm{d}K_n(s), \quad \text{pour } m \leqslant n,$$

où $W_1, W_2, \ldots$ est une suite de processus de Wiener bilatéraux indépendants et $\{a_n,\ n \geqslant 1\}$ est une suite décroissant vers 0. On utilise alors pour compléter la démonstration du Théorème 2.3 des arguments présents dans Hall [6], où est établie une loi du logarithme itéré pour des tableaux triangulaires.

**Remerciements.** Je remercie sincèrement M. Pierre-Loti-Viaud pour les très précieux conseils qu'il a su me donner.

---

[1] On désigne par $[d_n]$ la partie entière de $d_n$.

## Références bibliographiques

[1] A. Antoniadis, G. Gregoire, I.W. Mckeague, Wavelet methods for curve estimation, J. Amer. Statist. Assoc. 89 (1994) 1340–1353.
[2] P. Billingsley, Probability and Measure, Wiley, 1979.
[3] I. Daubechies, Ten Lectures on Wavelets, SIAM, Philadelphia, 1992.
[4] P. Deheuvels, D.M. Mason, Functional laws of the iterated logarithm for the increments of empirical and quantile processes, Ann. Probab. 20 (1992) 1248–1287.
[5] P. Deheuvels, D.M. Mason, Fonctional laws of the iterated logarithm for local empirical processes indexed by sets, Ann. Probab. 22 (1994) 1619–1661.
[6] P. Hall, Laws of the iterated logarithm for nonparametric density estimator, Z. Wahrscheinlichkeitstheorie Verw. Gebiete 56 (1981) 47–61.
[7] W. Härdle, G. Kerkyacharian, D. Picard, A. Tsybakov, Wavelets, Approximation, and Statistical Applications, Springer-Verlag, New York, 1998.
[8] J. Komlös, P. Major, G. Tusnady, An approximation of partial sums of independent rv's and the sample df., Z. Wahrscheinlichkeitstheorie Verw. Gebiete 32 (1975) 111–131.
[9] D.M. Mason, A strong invariance theorem for the tail empirical process, Ann. Inst. H. Poincaré 24 (1988) 491–506.
[10] A. Massiani, Pointwise asymptotic behavior of linear wavelet density estimator, Prépublication LSTA, 2002.
[11] Y. Meyer, Ondelettes : Ondelettes et Opérateurs I, Hermann, Paris, 1990.
[12] D.W. Wu, Asymptotic normality of the multiscale wavelet density estimator, Comm. Statist. Theory Methods 25 (1996) 1957–1970.
[13] S. Zhang, Z. Zheng, On the asymptotic normality for $L_2$-error of wavelet density estimator with application, Comm. Statist. Theory Methods 28 (1999) 1093–1104.