C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 335 (2002) 545–548

Probabilités/*Probability Theory*

# Stabilité des médianes conditionnelles par rapport à des filtrations discrétisées

**Benoît Cadre**

**Université Montpellier II, département de mathématiques, case courrier 051, place E. Bataillon, 34095 Montpellier, France**

**Reçu le 27 mai 2002 ; accepté après révision le 26 juillet 2002**

**Note présentée par Marc Yor.**

**Résumé** Soit $Y=(Y_s)_{s\leqslant 1}$ un processus stochastique et $X$ un vecteur aléatoire. Pour le critére de minimisation $\mathrm{L}_p$, l'ensemble des meilleures approximations de $X$ quand on ne connaît la trajectoire de $Y$ que jusqu'à l'instant $t$ est l'ensemble des $\mathrm{L}_p$-médianes conditionnelles de $X$ sachant $(Y_s)_{s\leqslant t}$. Si la trajectoire de $Y$ n'est observée qu'en un nombre fini d'instants, on montre, dans certains cas, que la multiplication des instants d'observation permet de retrouver asymptotiquement la meilleure approximation possible de $X$. ***Pour citer cet article : B. Cadre, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 335 (2002) 545–548.***


### Stability of conditional median under discretization of filtrations

**Abstract** Let $Y=(Y_s)_{s\leqslant 1}$ be a stochastic process and $X$ be a random vector. For the $\mathrm{L}_p$-minimizing criterion, the set of best approximations of $X$ we can get when the path of $Y$ is known until time $t$ is the set of conditionnal $\mathrm{L}_p$-medians of $X$ given $(Y_s)_{s\leqslant t}$. Assume that the path of $Y$ is only observed in a finite set of times. In some cases, we show that the multiplication of the observation times allow us to rediscover asymptotically the best approximation of $X$ we can get. ***To cite this article: B. Cadre, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 335 (2002) 545–548.***


## 1. Introduction

Sur l'espace probabilisé $(\Omega,\mathcal{A},P)$, on considère la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\leqslant 1}$ engendrée par un processus stochastique $Y=(Y_t)_{t\leqslant 1}$ à valeurs réelles, supposé continu à droite, pourvu de limites à gauche, et on se donne $X\in\mathrm{L}_p$ $(p\geqslant 1)$ un vecteur aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^k$. On s'intéresse ici au problème de la meilleure approximation de $X$ lorsque la trajectoire de $Y$ n'est connue que jusqu'au temps $t\leqslant 1$. Habituellement (et en dimension $k=1$), on considère que $E[X|\mathcal{F}_t]$ répond au problème car elle est solution d'un critère de minimisation quadratique. Cependant, bien d'autres critères de minimisation sont tout aussi naturels. Par exemple, le critère $\mathrm{L}_p$ mène à l'ensemble des $\mathrm{L}_p$-médianes de $X$ sachant $\mathcal{F}_t$ en $\omega\in\Omega$, noté $M_p(X|\mathcal{F}_t)(\omega)$, défini comme étant l'ensemble des points qui minimisent la fonction

$$\alpha\mapsto\varphi(\alpha,t)(\omega)=\int\|x-\alpha\|^p\,P_{X|\mathcal{F}_t}(\mathrm{d}x,\omega),$$

*Adresse e-mail :* cadre@stat.math.univ-montp2.fr (B. Cadre).


S1631-073X(02)02521-9/FLA

où $P_{X|\mathcal{F}_t}$ désigne une distribution conditionnelle de $X$ sachant $\mathcal{F}_t$ telle que, pour simplifier, $P_{X|\mathcal{F}_t}(\cdot,\omega)$ est $p$-intégrable pour tout $\omega\in\Omega$ et $\|.\|$ est une norme fixée sur $\mathbb{R}^k$. On montre facilement que cet ensemble est un compact non vide (voir [4] et [2]). D'autre part, le cas $k=p=1$ correspond à la notion classique de médiane conditionnelle (voir [4]).

Si l'on ne dispose maintenant que d'une information partielle apportée par l'observation de $Y$ seulement en un nombre fini d'instants, peut-on considérer que la multiplication des instants d'observation permettra de retrouver asymptotiquement la meilleure approximation possible de $X$ pour le critère $\mathrm{L}_p$ ? Précisément, soit une suite de partitions $(\pi_n)_{n\geqslant 1}$ de $[0,1]$ telle que pour tout $n\geqslant 1$ : $\pi_n=\{0=t_0^n<t_1^n<\cdots<t_{k_n}^n=1\}$, $\pi_n\subset\pi_{n+1}$ et $\max_i|t_i^n-t_{i+1}^n|\to 0$. On note $Y^n$ le processus étagé défini par $Y_s^n=Y_{t_i^n}$ si $s\in[t_i^n,t_{i+1}^n[$ et $Y_1^n=Y_{t_{k_n-1}^n}$, et $(\mathcal{F}_t^n)_{t\leqslant 1}$ la filtration engendrée par $Y^n$. Soit aussi $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de vecteurs aléatoires qui converge vers $X$ dans $\mathrm{L}_p$. Pour tout $\omega\in\Omega$, $n\geqslant 1$ et $t\leqslant 1$, on construit $\varphi_n(\cdot,t)(\omega)$ comme $\varphi(\cdot,t)(\omega)$, en remplacant $P_{X|\mathcal{F}_t}$ par $P_{X_n|\mathcal{F}_t^n}$, distribution conditionnelle de $X_n$ sachant $\mathcal{F}_t^n$ vérifiant la condition d'intégrabilité adéquate. L'ensemble des $\mathrm{L}_p$-médianes de $X_n$ sachant $\mathcal{F}_t^n$ en $\omega$, i.e. l'ensemble des points qui minimisent $\varphi_n(\cdot,t)(\omega)$, est alors noté $M_p(X_n|\mathcal{F}_t^n)(\omega)$. L'objet de cette Note est de donner des conditions sous lesquelles $M_p(X_n|\mathcal{F}_t^n)$ converge vers $M_p(X|\mathcal{F}_t)$, en un sens qui sera précisé ultérieurement.

## 2. Le résultat principal

On notera $\xrightarrow{P}$ la convergence en probabilité et $d(A,B)=\sup_{a\in A}\inf_{b\in B}\|a-b\|$ pour $A,B\subset\mathbb{R}^k$.

THÉORÈME 2.1. –
(i) *Pour tout $t\leqslant 1$, on a* :

$$d\big(M_p\big(X_n|\mathcal{F}_t^n\big),M_p(X|\mathcal{F}_t)\big)\xrightarrow{P}0\;;$$

(ii) *Si pour $P$-presque tout $\omega\in\Omega$ et tout $t\leqslant 1$, $M_p(X|\mathcal{F}_t)(\omega)$ ne contient qu'un seul élément et si toutes les $(\mathcal{F}_t)_{t\leqslant 1}$-martingales sont p.s. continues, alors* :

$$\sup_{t\leqslant 1}d\big(M_p\big(X_n|\mathcal{F}_t^n\big),M_p(X|\mathcal{F}_t)\big)\xrightarrow{P}0.$$

*Remarque* 1. – Les résultats ci-dessus ne peuvent être obtenus pour la distance de Hausdorff. En effet, si $Y$ est un mouvement brownien réel standard, $\pi_n=\{k/n,\ k=0,\ldots,n\}$ et $X=Y_{1/2}I_{\{Y_1-Y_{1/2}>0\}}$, on montre facilement que p.s., $M_1(X|\mathcal{F}_{1/2})=[\min(0,Y_{1/2}),\max(0,Y_{1/2})]$ et $M_1(X|\mathcal{F}_{1/2}^n)=\{0\}$ si $n$ est impair.

*Remarque* 2. – La condition d'unicité de (ii) est vraie, par stricte convexité, au moins si $p>1$ (voir [2]). De plus, la condition de continuité de (ii) est vérifiée lorsque $Y$ est un processus de Feller continu.

## 3. Les preuves

On ne montre que (ii), la preuve de (i) s'en inspirant. Dorénavant, on suppose que les hypothèses du Théorème 2.1(ii) sont satisfaites. Or, pour toute suite de variables aléatoires réelles $(U_n)_{n\geqslant 1}$ qui converge dans $\mathrm{L}_1$ vers une variable aléatoire intégrable $U$, $E[U_n|\mathcal{F}_t^n]\xrightarrow{P}E[U|\mathcal{F}_t]$ pour tout $t\leqslant 1$. Comme le processus $(E[U|\mathcal{F}_t])_{t\leqslant 1}$ est une martingale continue, on déduit de [1] que

$$\sup_{t\leqslant 1}\big|E\big[U_n|\mathcal{F}_t^n\big]-E\big[U|\mathcal{F}_t\big]\big|\xrightarrow{P}0. \tag{1}$$

D'autre part, l'inégalité suivante, valable pour tout $\omega\in\Omega$, $n\geqslant 1$ et $t\leqslant 1$, se déduit facilement de la définition d'une $\mathrm{L}_p$-médiane :

$$\sup\left(\|\alpha\|,\ \alpha \in M_p\left(X_n|\mathcal{F}_t^n\right)(\omega)\right) \leqslant 2\varphi_n(0,t)^{1/p}(\omega), \tag{2}$$

et on a la même inégalité en supprimant les indices et exposants $n$ ci-dessus. Sans perte de généralité, on pourra supposer dorénavant que pour tout $\omega \in \Omega$, $\varphi(\cdot,\cdot)(\omega)$ est continue et que pour tout $t \leqslant 1$, $M_p(X|\mathcal{F}_t)(\omega)$ ne contient qu'un seul élément.

LEMME 3.1. – *Pour tout $n \geqslant 1$, $\sup_{t\leqslant 1} d(M_p(X_n|\mathcal{F}_t^n), M_p(X|\mathcal{F}_t))$ est une variable aléatoire.*

*Démonstration.* – Soit tout d'abord $t \leqslant 1$. D'après [4] pour le cas $p = 1$ et une adaptation facile pour le cas général, la multi-application $\omega \mapsto M_p(X_n|\mathcal{F}_t^n)(\omega)$ est mesurable (on adopte ici la définition de mesurabilité donnée par [3]) et donc, d'après le Théorème III.7 de [3], on peut trouver une famille de sélections mesurables $(\gamma_i)_i$ telle que pour tout $\omega \in \Omega$, $(\gamma_i(\omega))_i$ est un sous-ensemble dense de $M_p(X_n|\mathcal{F}_t^n)(\omega)$. De même, si pour tout $\omega \in \Omega$, $m_t(\omega)$ désigne l'unique élément de $M_p(X|\mathcal{F}_t)(\omega)$, $m_t$ est une variable aléatoire. Alors, pour tout $a \geqslant 0$ :

$$\left[d\left(M_p\left(X_n|\mathcal{F}_t^n\right), M_p(X|\mathcal{F}_t)\right) \leqslant a\right] = \bigcap_i \left[\|\gamma_i - m_t\| \leqslant a\right],$$

et le dernier ensemble est dans $\mathcal{A}$. Ainsi, $d(M_p(X_n|\mathcal{F}_t^n), M_p(X|\mathcal{F}_t))$ est une variable aléatoire. Pour finir, il suffit de montrer que l'application $t \mapsto d(M_p(X_n|\mathcal{F}_t^n)(\omega), M_p(X|\mathcal{F}_t)(\omega))$ est continue à droite sur $[0,1[$, pour tout $\omega \in \Omega$. Soit $(t_k)_k$ une suite de $[0,1]$ qui décroît vers $t \in [0,1[$. Pour tout $k$ assez grand, on a $\mathcal{F}_{t_k}^n = \mathcal{F}_t^n$ et donc

$$\left|d\left(M_p\left(X_n|\mathcal{F}_{t_k}^n\right)(\omega), M_p\left(X|\mathcal{F}_{t_k}\right)(\omega)\right) - d\left(M_p\left(X_n|\mathcal{F}_t^n\right)(\omega), M_p(X|\mathcal{F}_t)(\omega)\right)\right| \leqslant \left\|m_{t_k}(\omega) - m_t(\omega)\right\|.$$

Il reste à montrer que $m_{t_k}(\omega) \to m_t(\omega)$. Par continuité, $r = 2\sup_{t\leqslant 1}\varphi(0,t)^{1/p}(\omega) < \infty$ d'où, d'après (2), on peut extraire de toute suite une sous-suite $(k_l)_l$ telle que $(m_{t_{k_l}}(\omega))_l$ converge vers $x$. Ainsi,

$$\varphi(x,t)(\omega) = \lim_l \varphi\left(m_{t_{k_l}}(\omega), t_{k_l}\right)(\omega) = \lim_l \inf_{\|\alpha\|\leqslant r} \varphi(\alpha, t_{k_l})(\omega) = \inf_{\|\alpha\|\leqslant r} \varphi(\alpha,t)(\omega),$$

la dernière égalité provenant du théorème d'Ascoli. Comme $m_t(\omega)$ est l'unique élément de $M_p(X|\mathcal{F}_t)(\omega)$, on en déduit que $x = m_t(\omega)$, et donc que $m_{t_k}(\omega) \to m_t(\omega)$. □

LEMME 3.2. – *Pour tout $r > 0$, on a* :

$$\sup_{t\leqslant 1}\sup_{\|\alpha\|\leqslant r}\left|\varphi_n(\alpha,t) - \varphi(\alpha,t)\right| \xrightarrow{P} 0.$$

*Démonstration.* – On note $\mathrm{L}_r = \{f_\alpha,\ \|\alpha\| \leqslant r\}$ si pour tout $\alpha \in \mathbb{R}^k$ : $f_\alpha(x) = \|x-\alpha\|^p$, $x \in \mathbb{R}^k$. Fixons $\varepsilon > 0$. Par intégrabilité uniforme, on peut trouver $K > 0$ tel que $P(\|X_n\| \geqslant K) \leqslant \varepsilon$, $E[\|X_n\|^p I_{\{\|X_n\|\geqslant K\}}] \leqslant \varepsilon$ pour tout $n \geqslant 1$, et de même en remplacant $X_n$ par $X$. Notons $\mathrm{L}_r^K$ la restriction des fonctions de $\mathrm{L}_r$ à la boule fermée de $\mathbb{R}^k$, centrée et de rayon $K$. D'après le théorème d'Ascoli, il existe un $\varepsilon$-réseau $R(\varepsilon)$ de $\mathrm{L}_r^K$ contenu dans $\mathrm{L}_r^K$. Avec un calcul facile et l'inégalité de Doob, on en déduit que pour un certain $c > 0$, on a pour tout $n \geqslant 1$ et $\beta > 6\varepsilon$ :

$$P\left(\sup_{t\leqslant 1}\sup_{\|\alpha\|\leqslant r}\left|\varphi_n(\alpha,t) - \varphi(\alpha,t)\right| \geqslant \beta\right) \leqslant \frac{c\varepsilon}{\beta} + \sum_{g\in R(\varepsilon)} P\left(\sup_{t\leqslant 1}\left|E\left[g(X_n)|\mathcal{F}_t^n\right] - E\left[g(X)|\mathcal{F}_t\right]\right| \geqslant \frac{\beta}{2}\right).$$

Le lemme est maintenant une conséquence directe de (1). □

*Preuve du Théorème* 2.1. – Soit $r > 0$ suffisamment grand et $P_r$ la probabilité définie pour tout $\mathcal{E} \in \mathcal{A}$ par $P_r(\mathcal{E}) = P(\mathcal{E} | \sup_{t \leqslant 1} \varphi(0,t)^{1/p} \leqslant r/3)$. D'après le Lemme 3.2, on peut extraire de toute suite une sous-suite $(n_k)_k$ pour laquelle la convergence du Lemme 3.2 à lieu $P_r$-p.s. Notons $A(r)$ l'évènement de $P_r$-mesure 1 :

$$A(r) = \left[\sup_{t \leqslant 1} \varphi(0,t)^{1/p} \leqslant \frac{r}{3},\ \sup_{t \leqslant 1} \sup_{\|\alpha\| \leqslant r} \left|\varphi_{n_k}(\alpha,t) - \varphi(\alpha,t)\right| \to 0\right].$$

Fixons $\omega \in A(r)$ et $\varepsilon > 0$. Pour tout $k$, il existe $u_{n_k} \in [0,1]$ et $m_{n_k} \in M_p(X_{n_k} | \mathcal{F}^{n_k}_{u_{n_k}})(\omega)$ tels que

$$\sup_{t \leqslant 1} d\left(M_p\left(X_{n_k} | \mathcal{F}^{n_k}_t\right)(\omega), M_p(X | \mathcal{F}_t)(\omega)\right) \leqslant \varepsilon + \|m_{n_k} - x_{n_k}\|, \tag{3}$$

si $x_{n_k}$ désigne l'unique élément de $M_p(X | \mathcal{F}_{u_{n_k}})(\omega)$. D'après (2) et comme $\omega \in A(r)$, on a pour tout $k$ assez grand :

$$\sup\left(\|\alpha\| : \alpha \in M_p\left(X_{n_k} | \mathcal{F}^{n_k}_{u_{n_k}}\right)(\omega)\right) \leqslant 2 \sup_{t \leqslant 1} \varphi_{n_k}(0,t)^{1/p}(\omega) \leqslant 3 \sup_{t \leqslant 1} \varphi(0,t)^{1/p}(\omega) \leqslant r.$$

De toute sous-suite de $(n_k)_k$, on peut alors extraire une sous-suite $(n^1_k)_k$ telle que $u_{n^1_k} \to u$, $x_{n^1_k} \to \chi_1$ et $m_{n^1_k} \to \chi_2$. Par continuité et par définition de $A(r)$, on en déduit que

$$\varphi(\chi_2, u)(\omega) = \lim_k \varphi_{n^1_k}(m_{n^1_k}, u_{n^1_k})(\omega) = \lim_k \inf_{\|\alpha\| \leqslant r} \varphi_{n^1_k}(\alpha, u_{n^1_k})(\omega) = \lim_k \inf_{\|\alpha\| \leqslant r} \varphi(\alpha, u_{n^1_k})(\omega).$$

Ainsi, en utilisant le théorème d'Ascoli, $\varphi(\chi_2, u)(\omega) = \inf \varphi(\cdot, u)(\omega)$, l'inf étant pris sur la boule fermée de $\mathbb{R}^k$, centrée et de rayon $r$. Comme $M_p(X | \mathcal{F}_u)(\omega)$ est contenu dans cette boule d'après (2), $\chi_2$ est l'unique élément de $M_p(X | \mathcal{F}_u)(\omega)$. En reprenant des arguments similaires, on montre de même que $\chi_1 = \chi_2$, et donc que $\|m_{n^1_k} - x_{n^1_k}\| \to 0$. Comme $(n^1_k)_k$ a été extraite de n'importe quelle sous-suite de $(n_k)_k$, on a $\|m_{n_k} - x_{n_k}\| \to 0$ ce qui entraîne avec (3) que $P_r$-p.s. :

$$\sup_{t \leqslant 1} d\left(M_p\left(X_{n_k} | \mathcal{F}^{n_k}_t\right), M_p(X | \mathcal{F}_t)\right) \to 0.$$

La suite $(n_k)_k$ étant extraite d'une suite quelconque, on a donc grâce au Lemme 3.1 :

$$\sup_{t \leqslant 1} d\left(M_p\left(X_n | \mathcal{F}^n_t\right), M_p(X | \mathcal{F}_t)\right) \to 0,$$

en $P_r$-probabilité. En faisant croître $r$ vers l'infini, on en déduit le théorème à partir de l'inégalité de Doob et du Lemme 3.1. □

## Références bibliographiques


[1] D. Aldous, Stopping times and tightness II, Ann. Probab. 17 (1989) 586–595.

[2] B. Bru, H. Heinich, Meilleures approximations et médianes conditionnelles, Ann. Inst. H. Poincaré 21 (1985) 197–224.

[3] C. Castaing, M. Valadier, Convex Analysis and Measurable Multi-Functions, in: Lectures Notes in Math., Vol. 580, Springer, Berlin, 1977.

[4] M. Valadier, La multi-application médianes conditionnelles, Z. Wahrscheinlichkeitstheorie Verw. Gebiete 67 (1984) 279–282.