C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 335 (2002) 229–232

Théorie des groupes/*Group Theory*
(Théorie des nombres/*Number Theory*)

Transfert lisse d'intégrales de Kloosterman

Hervé Jacquet

Mathematics Department, Columbia University, MC 4408, New York, NY 10027, USA

Reçu le 23 mai 2002 ; accepté le 3 juin 2002

Note présentée par Hervé Jacquet.

Résumé On prouve l'existence d'un transfert lisse entre les intégrales de Kloosterman absolues et les intégrales de Kloosterman relatives à une extension quadratique. ***Pour citer cet article : H. Jacquet, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 335 (2002) 229–232.*** © 2002 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

Smooth transfer of Kloosterman integrals

Abstract We establish the existence of smooth transfer between absolute Kloosterman integrals and Kloosterman integrals relative to a quadratic extension. ***To cite this article: H. Jacquet, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 335 (2002) 229–232.*** © 2002 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

1. Enoncé du résultat

Soient E/F une extension de corps locaux non-archimédiens et $\eta : F^\times \to \{\pm 1\}$ le caractère quadratique correspondant. On note $x \mapsto \overline{x}$ l'élément non-trivial du groupe de Galois. Soit ψ un caractère additif non trivial de F et $m \geqslant 1$ un entier. Soit N_m le groupe des matrices trigonales strictes dans $\mathrm{GL}(m)$ et $A_m(F)$ l'ensemble des matrices diagonales dans $M(m \times m, F)$. On fait opérer le groupe $N_m(F) \times N_m(F)$ sur $M(m \times m, F)$ par : $g \mapsto {}^t n_1 g n_2$. Si g est une matrice $m \times m$ et i un entier, $1 \leqslant i \leqslant m$, on désigne par $\Delta_i(g)$ le déterminant de la sous-matrice formée des i premières lignes et i premières colonnes de g. Les fonctions Δ_i sont des invariants de l'action. Soit $\theta : N_m(F) \to \mathbb{C}^\times$ le caractère défini par $\theta(n) = \psi(\sum n_{i,i+1})$. Ainsi $(n_1, n_2) \mapsto \theta(n_1 n_2)$ est un caractère du groupe produit $N_m(F) \times N_m(F)$. Si Φ est une fonction lisse à support compact sur $M(m \times m, F)$ et $g \in M(m \times m, F)$ on définit l'intégrale de Kloosterman :

$$\Omega(g, \psi : g) = \int \Phi\bigl({}^t n_1 g n_2\bigr)\theta(n_1 n_2)\,\mathrm{d}n_1\,\mathrm{d}n_2 \ ;$$

l'intégrale est prise sur le quotient du produit $N_m(F) \times N_m(E)$ par le stabilisateur de g dans le produit ; l'élément g est pertinent, c'est-à-dire que $\theta(n_1 n_2)$ est trivial sur le stabilisateur de g. Si g est pertinent et $\Delta_m(g) = 0$ alors $\Delta_{m-1}(g) \neq 0$. En particulier, pour $a \in A_n(F)$, $a = \mathrm{diag}(a_1, a_2, \ldots, a_m)$, a est pertinent lorsque $a_1 a_2 \cdots a_{m-1} \neq 0$; alors on écrit aussi :

$$\Omega(\Phi, \psi : a_1, a_2, \ldots, a_m) = \int_{N_m \times N_m(F)} \Phi\bigl({}^t n_1 a n_2\bigr)\theta(n_1 n_2)\,\mathrm{d}n_1\,\mathrm{d}n_2.$$

Adresse e-mail : hj@math.columbia.edu (H. Jacquet).

S1631-073X(02)02470-6/FLA

On définit $\sigma_m : A_m(F) \to F$ par

$$\sigma_m\big(\mathrm{diag}(a_1, a_2, \ldots, a_m)\big) = a_1(a_1a_2)\cdots(a_1a_2\cdots a_{m-1})$$

et on pose

$$\widetilde{\Omega}(\Phi, \psi : a) = \big|\sigma_m(a)\big|_F \Omega(\Phi, \psi : a).$$

De même, soit $H(m \times m, E/F)$ l'espace des matrices hermitiennes $m \times m$. Le groupe $N_m(E)$ opère sur $H(m \times m, E/F)$ par $g \mapsto {}^t\overline{n}gn$. Les fonctions Δ_i sont encore des invariants de cette action. Soit $n \mapsto \theta(n\overline{n})$ le caractère du groupe $N_m(E)$ défini par $\theta(n\overline{n}) = \psi(\sum n_{i,i+1} + \overline{n}_{i,i+1})$. Soit Ψ une fonction lisse à support compact sur $H(m \times m, E/F)$. On définit les intégrales de Kloosterman relatives $\Omega(\Psi, E/F, \psi : g)$ pour les éléments pertinents g de $H(m \times m, E/F)$. En particulier, pour $a \in A_n(F)$, comme plus haut, a est pertinent si $a_1a_2\cdots a_{m-1} \neq 0$ et

$$\Omega(\Psi, E/F, \psi : a) = \int_{N_m(E)} \Psi\big({}^t\overline{n}an\big)\theta(n\overline{n})\,\mathrm{d}n.$$

On pose aussi

$$\widetilde{\Omega}(\Psi, E/F/\psi : a) = \eta\big(\sigma_m(a)\big)\big|\sigma_m(a)\big|_F \Omega(\Psi, E/F, \psi : a).$$

On écrit $\Phi \overset{\psi}{\leftrightarrow} \Psi$ si $\widetilde{\Omega}(\Phi, \psi : a) = \widetilde{\Omega}(\Psi, E/F, \psi : a)$ pour tout a pertinent dans $A_m(F)$.

THÉORÈME 1.1. – *Pour chaque fonction Φ il existe une fonction Ψ telle que $\Phi \overset{\psi}{\leftrightarrow} \Psi$ et réciproquement.*

Pour r entier, on désigne par w_r la matrice de permutation $r \times r$ dont les éléments anti-diagonaux sont 1. Les éléments de la forme

$$g = \begin{pmatrix} w_{m_1}a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & w_{m_2}a_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & & & \\ 0 & 0 & \cdots & w_{m_r}a_r \end{pmatrix},$$

avec $m_1 + m_2 + \cdots + m_r = m$, $a_1, a_2, \ldots, a_r \in F$, $\Delta_m(g) \neq 0$ ou $\Delta_{m-1}(g) \neq 0$ forment un sytème commun de représentants pour les deux ensembles d'orbites pertinentes. Si $\Phi \overset{\psi}{\leftrightarrow} \Psi$ on a

$$\Omega(\Phi, \psi : g) = \gamma(g, \psi)\Omega(\psi, E/F : g)$$

avec des facteurs de transfert $\gamma(g, \psi)$ [2]. Lorsque F est un corps de fonctions, le résultat précédent et le lemme fondamental de Ngo [6,7] prouvé en caractéristique positive impliquent l'existence d'identités globales de la forme

$$\int_{N_m(F)\times N_m(F)\backslash N_m(F_{\mathbb{A}})\times N_m(F_{\mathbb{A}})} \Bigg(\sum_{\xi \in \mathrm{GL}(m,F)} \Phi\big({}^t n_1\xi n_2\big)\Bigg)\theta(n_1n_2)\,\mathrm{d}n_1\,\mathrm{d}n_2$$
$$= \int_{N_m(E)\backslash N_m(E_{\mathbb{A}})} \Bigg(\sum_{\xi \in H(m\times m, E/F)\cap \mathrm{GL}(m,E)} \Psi\big({}^t\overline{n}\xi n\big)\Bigg)\theta(n\overline{n})\theta(n\overline{n})\,\mathrm{d}n.$$

C'est une étape essentielle dans l'extension à $\mathrm{GL}(m)$ des résultats de [4] (cf. [1,3,5,8,9]).

2. Transformées de Fourier et intégrales

On définit des transformées de Fourier :

$$\check{\Phi}(x)=\int_{M(m\times m,F)}\Phi(y)\psi\big(-\mathrm{Tr}(yw_mxw_m)\big)\mathrm{d}y,\quad \check{\Psi}(x)=\int_{H(m\times m,E/F)}\Psi(y)\psi\big(-\mathrm{Tr}(yw_mxw_m)\big)\,\mathrm{d}y.$$

On a alors :

$$\begin{aligned}&\widetilde{\Omega}(\check{\Phi},\overline{\psi}:a_1,a_2,\dots,a_m)\\&\quad=\int\widetilde{\Omega}(\Phi,\psi:p_1,p_2,\dots,p_m)\psi\left(-\sum_{i=1}^{i=m}p_ia_{m+1-i}+\sum_{i=1}^{i=m-1}\frac{1}{p_ia_{m-i}}\right)\mathrm{d}p_m\,\mathrm{d}p_{m-1}\cdots\mathrm{d}p_1,\end{aligned}\tag{1}$$

$$\begin{aligned}&c(E/F,\psi)^{m(m-1)/2}\widetilde{\Omega}(\check{\Psi},E/F,\overline{\psi}:a_1,a_2,\dots,a_m)\\&\quad=\int\widetilde{\Omega}(\Phi,\psi:p_1,p_2,\dots,p_m)\psi\left(-\sum_{i=1}^{i=m}p_ia_{m+1-i}+\sum_{i=1}^{i=m-1}\frac{1}{p_ia_{m-i}}\right)\mathrm{d}p_m\,\mathrm{d}p_{m-1}\cdots\,\mathrm{d}p_1.\end{aligned}\tag{2}$$

Les intégrales ne convergent pas absolument. Dans la deuxième formule, la constante $c(E/F,\psi)$ est définie par la formule de Weil :

$$\int_E\phi(z)\psi(az\overline{z})\,\mathrm{d}z=\eta(a)c(E/F,\psi)|a|_F^{-1}\int_E\hat{\phi}(z)\psi\big(-a^{-1}z\overline{z}\big)\,\mathrm{d}z.$$

On déduit aussitôt de ces formules le résultat suivant :

PROPOSITION 2.1. – *Si* $\Phi\overset{\psi}{\leftrightarrow}\Psi$ *alors* $\check{\Phi}\overset{\overline{\psi}}{\leftrightarrow}c(E/F,\psi)^{m(m-1)/2}\check{\Psi}$ *et réciproquement.*

On aussi une formule élémentaire : pour $a\in F^\times$,

$$|a|^{m^2-1}\Omega(\Phi,\psi:w_ma)=\int\Omega\left[\check{\Phi},\overline{\psi}:\begin{pmatrix}-w_{m-1}a^{-1}&0\\0&b\end{pmatrix}\right]\mathrm{d}b.\tag{3}$$

Il y a une formule analogue pour Ψ.

3. Démonstration du théorème

Montrons par exemple que pour tout Φ il existe Ψ avec $\Phi\overset{\psi}{\leftrightarrow}\Psi$. On raisonne par récurrence sur m, le cas $m=1$ étant trivial. On suppose l'assertion établie pour $m'<m$. Pour $1\leqslant i\leqslant m-1$, soit O_i l'ouvert de $M(m\times m,F)$ défini par $\Delta_i\neq0$. Si le support de Φ est contenu dans O_i les intégrales orbitales de Φ se ramènent aux intégrales orbitales d'une fonction Φ' sur le produit $\mathrm{GL}(i,F)\times H(m-i\times m-i,F)$ (avec action du groupe $N_i\times N_i\times N_{m-i}\times N_{m-i}$). L'hypothèse de récurrence implique l'existence de Ψ (avec support dans le sous-ensemble O_i' de $H(m\times m,E/F)$ défini par $\Delta_i\neq0$), telle que $\Phi\overset{\psi}{\leftrightarrow}\Psi$. Considérons maintenant la fonction

$$\phi(a)=\Omega(\Phi,\psi:w_ma).$$

C'est une fonction lisse à support compact sur $F^\times$. Supposons qu'elle soit nulle. Alors les intégrales orbitales de Φ sur les orbites pertinentes contenues dans l'ensemble Q défini par

$$\Delta_1=\Delta_2=\cdots=\Delta_{m-1}=0$$

sont nulles. La fonction Φ a donc les mêmes intégrales orbitales qu'une fonction avec support contenu dans le complément de Q. On peut donc supposer qu'en fait tel est le cas. Alors on peut écrire $\Phi=\sum_{i=1}^{i=m-1}\Phi_i$, où le support de Φ_i est contenu dans O_i. On a donc $\Phi_i\overset{\psi}{\leftrightarrow}\Psi_i$ pour Ψ_i convenable et $\Phi\overset{\psi}{\leftrightarrow}\sum_i\Psi_i$. En général, il existe Φ_1 avec support dans O_{m-1} telle que

$$\phi(a) = \int \Omega\left[\Phi_1, \overline{\psi} : \begin{pmatrix} -w_{m-1}a^{-1} & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}\right] \mathrm{d}b.$$

Il existe Ψ_1 telle que $\Phi_1 \overset{\overline{\psi}}{\leftrightarrow} \Psi_1$. Soit Φ_2 telle que $\check{\Phi}_2 = \Phi_1$. Alors, d'après la proposition, il existe Ψ_2 telle que $\Phi_2 \overset{\psi}{\leftrightarrow} \Psi_2$. D'après la relation (3) on a, pour tout $a \in F^\times$,

$$\Omega(\Phi - \Phi_2; w_m a) = 0.$$

D'après le cas précédent, il existe Ψ_3 telle que $\Phi - \Phi_2 \overset{\psi}{\leftrightarrow} \Psi_3$. D'où $\Phi \overset{\psi}{\leftrightarrow} \Psi_2 + \Psi_3$, ce qui termine la démonstration.

Remerciements. Recherche financée en partie par la NSF (DMS 9619766).

Références bibliographiques

[1] H. Jacquet, The continuous spectrum of the relative trace formula for GL(3) over a quadratic extension, Israel J. Math. 89 (1995) 1–59.
[2] H. Jacquet, A theorem of density for Kloosterman integrals, Asian J. Math. 2 (1998) 759–778.
[3] H. Jacquet, Y. Ye, Relative Kloosterman integrals for GL(3), Bull. Soc. Math. France 120 (1992) 449–558.
[4] H. Jacquet, Y. Ye, Distinguished representations and quadratic base change for GL(3), Trans. Amer. Math. Soc. 351 (1996) 913–939.
[5] E. Lapid, J. Rogawski, Periods of Eisenstein series: the Galois case, Preprint.
[6] B.C. Ngo, Le lemme fondamental de Jacquet et Ye en caractéristique positive, Duke Math. J. 96 (1999) 473–520.
[7] B.C. Ngo, Faisceaux pervers, homomorphisme de changement de base et lemme fondamental de Jacquet et Ye, Ann. Sci. École Norm. Sup. 32 (1999) 619–679.
[8] Y. Ye, The fundamental lemma of a relative trace formula for GL(3), Compositio Math. 89 (1993) 121–162.
[9] Y. Ye, An integral transform and its applications, Math. Ann. 30 (1994) 405–417.