C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 335 (2002) 1079–1084

Problèmes mathématiques de la mécanique/*Mathematical Problems in Mechanics*

Sur un modèle de Saint-Venant visqueux et sa limite quasi-géostrophique

Didier Bresch [a], Benoît Desjardins [b]

[a] Laboratoire de mathématiques appliquées (UMR 6620), 24, avenue des Landais, 63177 Aubière cedex, France

[b] CEA/DIF, BP 12, 91680 Bruyères le Châtel, France

Reçu le 7 octobre 2002 ; accepté le 25 octobre 2002

Note présentée par Gérard Iooss.

Résumé On considère un modèle de Saint-Venant avec viscosité et terme de friction en dimension deux, pour lequel on obtient un résultat d'existence globale de solutions faibles. On montre également la convergence de ces solutions vers la solution forte globale des équations quasi-géostrophiques visqueuses avec terme de surface libre pour des données bien préparées. ***Pour citer cet article : D. Bresch, B. Desjardins, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 335 (2002) 1079–1084.***

On viscous shallow-water equations (Saint-Venant model) and the quasi-geostrophic limit

Abstract We consider a two dimensional viscous shallow water model with friction term. The existence of global weak solutions is obtained and convergence to the strong solution of the viscous quasi-geostrophic equation with free surface term is proven in the well prepared case. ***To cite this article: D. Bresch, B. Desjardins, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 335 (2002) 1079–1084.***

Abridged English version

This Note concerns the existence of global weak solutions of a viscous shallow water equations in a periodic domain $\Omega = T^2$ and its limit when both the Rossby number Ro and the Froude number tend to 0 with $\mathrm{Fr} = \mathrm{Ro}$. This system is called the Saint-Venant equations by the French community. Such models are used to describe vertically averaged flows in three dimensional shallow domains in terms of the mean velocity field $u = (u_1, u_2)$ and the depth variation h due to the free surface. This is a commonly used two dimensional model in oceanography. A particular model, in the rotating framework, can be expressed as

$$\begin{cases} \partial_t h + \operatorname{div}(hu) = 0, \\ \partial_t(hu) + \operatorname{div}(hu \otimes u) + \dfrac{(hu)^\perp}{\mathrm{Ro}} + r_0 u + r_1 h|u|u - \kappa h \nabla \Delta h + \dfrac{h\nabla h}{\mathrm{Fr}^2} - \nu \operatorname{div}(h \nabla u) = hf, \end{cases} \tag{1}$$

Adresses e-mail : bresch@math.univ-bpclermont.fr (D. Bresch); Benoit.Desjardins@mines.org (B. Desjardins).

where $(hu)^\perp = (-hu_2, hu_1)$, $\mathrm{Fr} > 0$ denotes the Froude number, $\mathrm{Ro} > 0$ the Rossby number, and $\kappa \geqslant 0$ the capillary coefficient. System (1) is supplemented with the initial conditions

$$h|_{t=0} = h_0 \geqslant 0, \qquad (hu)|_{t=0} = m_0. \tag{2}$$

This model is derived from the three-dimensional Navier–Stokes equations with free surface, where the normal stress is determined from the air pressure and capillary effects. The drag terms $r_0 u$ in the laminar case ($r_0 \geqslant 0$), and $r_1 h|u|u$ in the turbulent regime ($r_1 \geqslant 0$) are obtained from the friction condition on the bottom, see [15] and [12]. The Saint-Venant system (1) with a friction term of the form $r_0 u/(1 + (4r_0 h/3\nu))$ is formally derived in the one-dimensional case for laminar flows ($r_1 = 0$) in [9]. This model does not take into account surface tension effects ($\kappa = 0$). It does not contain the term corresponding to the rotation of the earth since it is a one dimensional model. Some numerical simulations are also given. Notice that our analysis may be performed for this model in 1D. The energy inequality associated with System (1) can be written:

$$\begin{aligned}&\int_\Omega \left(\frac{h^2}{2\mathrm{Fr}^2} + h\frac{|u|^2}{2} + \kappa\frac{|\nabla h|^2}{2}\right) + \int_0^t\!\!\int_\Omega \nu h|\nabla u|^2 + \int_\Omega r_0|u|^2 + \int_0^t\!\!\int_\Omega r_1 h|u|^3\\ &\quad\leqslant \int_\Omega \left(\frac{h_0^2}{2\mathrm{Fr}^2} + h_0\frac{|u_0|^2}{2} + \kappa\frac{|\nabla h_0|^2}{2}\right) + \int_0^t\!\!\int_\Omega hf\cdot u.\end{aligned} \tag{3}$$

In the sequel, we assume $f = 0$ without loss of generality since all the analysis may be extended assuming f regular enough. The initial data are taken in such way that

$$\begin{aligned}&h_0 \in \mathrm{L}^2(\Omega), \quad \frac{|m_0|^2}{h_0} \in \mathrm{L}^1(\Omega), \quad \sqrt{\kappa}\nabla h_0 \in \left(\mathrm{L}^2(\Omega)\right)^2,\\ &\nabla\sqrt{h_0} \in \left(\mathrm{L}^2(\Omega)\right)^2, \quad -r_0 \log_- h_0 \in \mathrm{L}^1(\Omega),\end{aligned} \tag{4}$$

where $m_0 = 0$ on $h_0^{-1}(\{0\})$ and $\log_- g = \log\min(g, 1)$.

We say that (h, u) is a weak solution on $(0, T)$ of (1) if the following three conditions are fulfilled:

– (2) holds in $\mathcal{D}'(\Omega)$ with $h \geqslant 0$ a.e.;

– (3) is satisfied for a.e. non negative t;

– System (1) holds in $(\mathcal{D}'((0, T) \times \Omega))^3$ and the following regularity properties are satisfied

$$\begin{aligned}&\nabla\sqrt{h} \in \mathrm{L}^\infty\left(0, T; \left(\mathrm{L}^2(\Omega)\right)^2\right), \quad \sqrt{h}u \in \mathrm{L}^\infty\left(0, T; \left(\mathrm{L}^2(\Omega)\right)^2\right),\\ &\sqrt{h}\nabla u \in \mathrm{L}^2\left(0, T; \left(\mathrm{L}^2(\Omega)\right)^4\right), \quad \nabla h \in \mathrm{L}^2\left(0, T; \left(\mathrm{L}^2(\Omega)\right)^2\right),\\ &\sqrt{r_0}u \in \mathrm{L}^2\left(0, T; \left(\mathrm{L}^2(\Omega)\right)^2\right), \quad r_1^{1/3}h^{1/3}u \in \mathrm{L}^3\left(0, T; \left(\mathrm{L}^3(\Omega)\right)^2\right),\\ &\sqrt{\kappa}\nabla^2 h \in \mathrm{L}^2\left(0, T; \left(\mathrm{L}^2(\Omega)\right)^4\right).\end{aligned} \tag{5}$$

The existence result for given physical parameters in two space dimension $d = 2$ can be written

THEOREM 1. – *Let m_0, h_0 satisfy* (4) *and assume that either $\kappa > 0$ or $r_1 > 0$. Then, there exists a global weak solution of* (1).

Let us mention that the existence of smooth solutions for small enough time or data close to equilibrium was proven in [17] with the same viscous term but without a friction term ($r_0 = 0$, $r_1 = 0$) and without surface tension ($\kappa = 0$). The various possible assumptions in Theorem 1 mean that some physical effects are mathematically important: laminar friction allows one to take care of vanishing depth h, whereas either quadratic friction or capillarity seem to be necessary for stability in dimension 2.

Other ways of modelizing viscous effects have been mathematically studied, see [11], p. 251. Only local existence of weak solutions has been obtained, see for instance [14]. The choice of System (1) is motivated by its energetical consistency, which has been stressed from a physical point of view in [8]. Moreover, both the viscous part $-\nu\,\mathrm{div}(h\nabla u)$ and the friction term $r_0 u$ are physically justified since they can be derived from the three dimensional Navier–Stokes equations with free surface and friction condition on the bottom, see [9]. Surprisingly these two terms turn out to be essential from a mathematical point of view not only to ensure the stability of weak solutions but also to derive the quasi-geostrophic equations with free surface term used in oceanography.

More precisely, assuming $\mathrm{Fr} = \mathrm{Ro} = \varepsilon$ and $h^\varepsilon \equiv h = 1 + \varepsilon F \tilde{h}^\varepsilon$, well prepared initial data and letting ε go to 0, we get the quasi-geostrophic equation with the free surface term expressed in terms of the velocity

$$\begin{cases} \partial_t \bar{u} + (\bar{u}\cdot\nabla)\bar{u} - \nu\Delta\bar{u} + r_0\bar{u} + r_1|\bar{u}|\bar{u} + \nabla\bar{p} - \partial_t\,\Delta^{-1}\bar{u} = 0, \\ \mathrm{div}\,\bar{u} = 0, \\ \bar{u}|_{t=0} = \bar{u}_0. \end{cases} \tag{6}$$

Recall that the rigourous derivation of the quasi-geostrophic equations from the three-dimensional Navier–Stokes equations with free surface is still open. Here we obtain the following asymptotic result from the shallow-water equations:

THEOREM 2. – *Let* $(u_0^\varepsilon, h_0^\varepsilon) = \sum_{k\geqslant 0}\varepsilon^k(u_0^k, h_0^k)$ *with* $h_0 \equiv h_0^0 = 1$, $\bar{u}_0 \equiv u_0^0 = \nabla^\perp h_0^1 \equiv \nabla^\perp\overline{\Psi}_0$ *and* (4) *be satisfied uniformly in* ε. *Assuming* $\bar{u}_0 \in (\mathrm{H}^2(\Omega))^2$ *and*

$$\big(u_0^\varepsilon, h_0^\varepsilon\big) \to (\bar{u}_0, 1) \quad \text{in } \big(\mathrm{L}^2(\Omega)\big)^3, \quad \big(h_0^\varepsilon - 1\big)/\varepsilon \to \overline{\Psi}_0 \quad \text{in } \mathrm{L}^2(\Omega), \quad \sqrt{\kappa}\nabla h_0^\varepsilon \to 0 \quad \text{in } \big(\mathrm{L}^2(\Omega)\big)^2,$$

then, denoting by $(u^\varepsilon, h^\varepsilon)$ *a global weak solution of* (1),

$$\begin{aligned} &u^\varepsilon \to \bar{u} \quad \text{in } \mathrm{L}^\infty\big(0,T;\,\big(\mathrm{L}^2(\Omega)\big)^2\big), \\ &\big(h^\varepsilon - 1\big)/\varepsilon \to \overline{\Psi} \quad \text{in } \mathrm{L}^\infty\big(0,T;\mathrm{L}^2(\Omega)\big), \qquad \nabla h^\varepsilon \to 0 \quad \text{in } \mathrm{L}^2\big(0,T;\,\big(\mathrm{L}^2(\Omega)\big)^2\big), \\ &\sqrt{\kappa}\nabla h^\varepsilon \to 0 \quad \text{in } \mathrm{L}^\infty\big(0,T;\,\big(\mathrm{L}^2(\Omega)\big)^2\big) \end{aligned}$$

when $\varepsilon \to 0$, *where* $\bar{u} = \nabla^\perp\overline{\Psi}$ *is the global strong solution of the quasi-geostrophic equation* (6) *with the initial data* $\bar{u}_0$.

---

1. Introduction et résultats

Cette Note concerne l'existence globale de solutions faibles des équations de Saint-Venant dans un domaine périodique $\Omega = T^2$ et leur limite quand le nombre de Rossby Ro et le nombre de Froude tendent vers 0 avec $\mathrm{Fr} = \mathrm{Ro}$. De tels modèles sont utilisés pour décrire l'écoulement moyen vertical en fonction de la vitesse moyenne $u = (u_1, u_2)$ et de la variation de hauteur d'eau h due à la surface libre. Un modèle particulier s'écrit

$$\begin{cases} \partial_t h + \mathrm{div}(hu) = 0, \\ \partial_t(hu) + \mathrm{div}(hu\otimes u) + \dfrac{(hu)^\perp}{\mathrm{Ro}} + r_0 u + r_1 h|u|u - \kappa h\nabla\Delta h + \dfrac{h\nabla h}{\mathrm{Fr}^2} - \nu\,\mathrm{div}(h\nabla u) = hf, \end{cases} \tag{7}$$

où $(hu)^\perp = (-hu_2, hu_1)$ correspond à la force de Coriolis, Fr désigne le nombre de Froude et Ro le nombre de Rossby. Le système (7) est complété des conditions initiales

$$h|_{t=0} = h_0 \geqslant 0, \qquad (hu)|_{t=0} = m_0. \tag{8}$$

Ce système s'obtient à partir des équations de Navier–Stokes dans un domaine tri-dimensionnel avec surface libre et tension de surface, où le terme $r_0 u$, avec r_0 constante strictement positive, est obtenu par la condition de friction au fond, voir [15]. Le terme $\kappa h \nabla \Delta h$ correspond à la tension de surface libre. Le système de Saint-Venant (1) en dimension 1 avec un terme de friction de la forme $r_0 u/(1+(4r_0 h/3\nu))$ est formellement dérivé pour un écoulement laminaire dans [9]. Ce modèle ne prend pas en compte la tension de surface et naturellement ne contient pas de terme de Coriolis car c'est un modèle monodimensionnel. L'existence globale de solutions faibles peut être obtenue pour ce genre d'équation unidimensionnelle.

L'inégalité d'énergie associée au système (7) s'écrit

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega \left(\frac{h^2}{2\mathrm{Fr}^2} + h\frac{|u|^2}{2} + \kappa \frac{|\nabla h|^2}{2} \right) + \int_0^t \int_\Omega \nu h |\nabla u|^2 + \int_\Omega r_0 |u|^2 + \int_0^t \int_\Omega r_1 h |u|^3 \\
&\quad \leqslant \int_\Omega \left(\frac{h_0^2}{2\mathrm{Fr}^2} + h_0 \frac{|u_0|^2}{2} + \kappa \frac{|\nabla h_0|^2}{2} \right) + \int_0^t \int_\Omega h f \cdot u.
\end{aligned} \tag{9}$$

Dans la suite on supposera $f = 0$ sans perte de généralité, car toute l'analyse peut être effectuée pour f suffisamment régulière. Les données initiales sont prises telles que

$$\begin{aligned}
&h_0 \in \mathrm{L}^2(\Omega), \quad \frac{|m_0|^2}{h_0} \in \mathrm{L}^1(\Omega), \quad \sqrt{\kappa}\nabla h_0 \in \left(\mathrm{L}^2(\Omega)\right)^2, \\
&\nabla \sqrt{h_0} \in \left(\mathrm{L}^2(\Omega)\right)^2, \quad -r_0 \log_- h_0 \in \mathrm{L}^1(\Omega),
\end{aligned} \tag{10}$$

où $m_0 = 0$ sur $h_0^{-1}(\{0\})$ et $\log_- g = \log \min(g, 1)$.

On dit que (h, u) est une solution faible sur $(0, T)$ de (7) si les trois conditions suivantes sont satisfaites :

– (8) est satisfaite dans $\mathcal{D}'(\Omega)$ avec $h \geqslant 0$ p.p. ;
– (9) est satisfaite p.p. $t > 0$;
– Le système (7) est vérifié dans $(\mathcal{D}'((0,T) \times \Omega))^3$ et les propriétés de régularité suivantes sont satisfaites

$$\begin{aligned}
&\nabla \sqrt{h} \in \mathrm{L}^\infty\left(0, T; \left(\mathrm{L}^2(\Omega)\right)^2\right), \quad \sqrt{h} u \in \mathrm{L}^\infty\left(0, T; \left(\mathrm{L}^2(\Omega)\right)^2\right), \\
&\sqrt{h} \nabla u \in \mathrm{L}^2\left(0, T; \left(\mathrm{L}^2(\Omega)\right)^4\right), \quad \nabla h \in \mathrm{L}^2\left(0, T; \left(\mathrm{L}^2(\Omega)\right)^2\right), \\
&\sqrt{r_0} u \in \mathrm{L}^2\left(0, T; \left(\mathrm{L}^2(\Omega)\right)^2\right), \quad r_1^{1/3} h^{1/3} u \in \mathrm{L}^3\left(0, T; \left(\mathrm{L}^3(\Omega)\right)^2\right), \\
&\sqrt{\kappa} \nabla^2 h \in \mathrm{L}^2\left(0, T; \left(\mathrm{L}^2(\Omega)\right)^4\right).
\end{aligned} \tag{11}$$

Le résultat d'existence pour des paramètres fixés en dimension 2 s'écrit

THÉORÈME 3. – *Soit m_0, h_0 satisfaisant* (10) *et $\kappa > 0$ ou $r_1 > 0$. Alors il existe une solution faible globale de* (7).

Remarque. – En dimension un, ce résultat d'existence peut être étendu à des conditions moins restrictives sur les coefficients du modèle. Plus précisemment, on peut montrer l'existence globale de solutions faibles en supposant $\kappa \geqslant 0$ et $r_1 \geqslant 0$.

Mentionnons que l'existence locale de solutions régulières ou l'existence pour des données proches de l'équilibre a été prouvée en dimension 2 dans [17] avec le même terme visqueux mais sans termes de friction ($r_0 = 0$, $r_1 = 0$), ni terme de tension de surface ($\kappa = 0$). Les différentes possibilités dans le Théorème 3 montrent que les effets physiques suivants ont de l'importance mathématiquement : la friction laminaire permet de contrôler les endroits où h s'annule, alors que la friction quadratique ou le terme capillaire semblent nécessaires pour la stabilité en dimension 2.

D'autres modélisations d'effets visqueux ont été étudiées d'un point de vue mathématique, voir [11], p. 251. Le choix du système (1) est motivé par sa consistance énergétique, importante du point de vue physique [8]. De plus, le terme visqueux $-\nu\,\mathrm{div}(h\nabla u)$, le terme de friction $r_0 u$ et le terme de tension de surface sont physiquement justifiés car ils proviennent des équations de Navier–Stokes avec surface libre et condition de friction au fond, voir [9] dans le cas 1D sans tension de surface. De manière surprenante, les deux premiers termes sont essentiels d'un point de vue mathématique en dimension 1 et 2 non seulement pour obtenir la stabilité de solutions faibles mais également pour dériver les équations quasi-géostrophiques avec terme de surface libre utilisées en océanographie.

Plus précisement, en supposant $\mathrm{Fr} = \mathrm{Ro} = \varepsilon$ et $h^\varepsilon \equiv h = 1 + \varepsilon F\tilde{h}^\varepsilon$, des données initiales bien préparées, on obtient lorsque ε tends vers 0 les équations quasi-géostrophiques avec terme de surface libre

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\bar{\xi} - F\overline{\Psi}) - \nu\Delta\bar{\xi} + r_0\bar{\xi} + r_1\nabla^\perp\cdot\big(|\nabla\overline{\Psi}|\nabla^\perp\overline{\Psi}\big) = 0, \tag{12}$$
$$\text{avec } \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} = \partial_t + \bar{u}\cdot\nabla,\ \bar{u} = \nabla^\perp\overline{\Psi},\ \text{et } \Delta\overline{\Psi} = \bar{\xi},$$

où $\nabla^\perp = (-\partial_y, \partial_x)$. Cette équation peut être écrite en fonction de lavitesse

$$\begin{cases} \partial_t\,\bar{u} + \bar{u}\cdot\nabla\bar{u} - \nu\Delta\bar{u} + r_0\bar{u} + r_1|\bar{u}|\bar{u} + \nabla\bar{p} - \partial_t\,\Delta^{-1}\bar{u} = 0, \\ \mathrm{div}\,\bar{u} = 0, \\ \bar{u}|_{t=0} = \bar{u}_0. \end{cases} \tag{13}$$

Rappelons que la dérivation des équations quasi-géostrophiques à partir des équations de Navier–Stokes avec surface libre est encore ouverte. Des résultats sont connus avec hypothèse de toit rigide, voir par exemple [5,10,13,4]. Dans la présente Note, on obtient les équations quasi-géostrophiques avec tension de surface $-F\overline{\Psi}$ à partir de solutions faibles globales des équations de Saint-Venant avec tension de surface ou terme de friction quadratique. Une telle asymptotique a été effectuée dans le cas non visqueux par [16,6,7] et [1]. Dans cette dernière étude, l'équation de conservation de la quantité de mouvement est divisée par h. Ici, on montre un résultat dans le cas visqueux avec données bien préparées, où l'équation de la quantité de mouvement ne peut pas être divisée par h, à cause de la diffusion choisie sous la forme $-\,\mathrm{div}(h\nabla u)$. Le cas mal préparé sera discuté dans [2].

On montre alors le résultat d'asymptotique suivant

THÉORÈME 4. – *Soit* $(u_0^\varepsilon, h_0^\varepsilon) = \sum_{k\geqslant 0}\varepsilon^k(u_0^k, h_0^k)$ *avec* $h_0 \equiv h_0^0 = 1$, $\bar{u}_0 \equiv u_0^0 = \nabla^\perp h_0^1 \equiv \nabla^\perp\overline{\Psi}_0$ *et* (10) *satisfait uniformément en* ε. *Supposons* $\bar{u}_0 \in (\mathrm{H}^2(\Omega))^2$ *et*

$$\big(u_0^\varepsilon, h_0^\varepsilon\big) \to (\bar{u}_0, 1) \quad \textit{dans } \big(\mathrm{L}^2(\Omega)\big)^3, \qquad \big(h_0^\varepsilon - 1\big)/\varepsilon \to \overline{\Psi}_0 \quad \textit{dans } \mathrm{L}^2(\Omega),$$
$$\sqrt{\kappa}\nabla h_0^\varepsilon \to 0 \quad \textit{dans } \mathrm{L}^2(\Omega),$$

alors, soit $(u^\varepsilon, h^\varepsilon)$ *une solution faible globale de* (7),

$$u^\varepsilon \to \bar{u} \quad \textit{dans } \mathrm{L}^\infty\big(0, T; \big(\mathrm{L}^2(\Omega)\big)^2\big),$$
$$\big(h^\varepsilon - 1\big)/\varepsilon \to \overline{\Psi} \quad \textit{dans } \mathrm{L}^\infty\big(0, T; \mathrm{L}^2(\Omega)\big), \qquad \nabla h^\varepsilon \to 0 \quad \textit{dans } \mathrm{L}^2\big(0, T; \big(\mathrm{L}^2(\Omega)\big)^2\big),$$
$$\sqrt{\kappa}\nabla h^\varepsilon \to 0 \quad \textit{dans } \mathrm{L}^\infty\big(0, T; \big(\mathrm{L}^2(\Omega)\big)^2\big)$$

quand $\varepsilon \to 0$, *où* $\bar{u} = \nabla^\perp\overline{\Psi}$ *est la solution forte globale des équations quasi-géostrophiques* (13) *avec la donnée initiale* $\bar{u}_0$.

2. Quelques éléments de preuves

L'existence globale de solutions faibles nécessite de reprendre les estimations établies récemment dans [3] pour le modèle de Korteweg en prenant garde aux nouveaux termes que sont les forces de friction

$r_0 u$, $r_1 h|u|u$ et la force de Coriolis $(hu)^{\perp}/\mathrm{Ro}$. Dans [3], le théorème d'existence globale de solutions faibles ($r_0 = 0$, $r_1 = 0$) nécessite la multiplication de l'équation de quantité de mouvement par h et utilise fortement la régularité induite par le terme de capillarité ($\kappa \neq 0$). Un résultat de compacité sur $h_n u_n$ est alors établi. Avec le terme de friction laminaire supplémentaire ($r_0 \neq 0$), on peut résoudre l'équation au sens des distributions, en utilisant soit le terme de friction turbulent $r_1 \neq 0$, soit le terme de capillarité $\kappa \neq 0$. On montre alors un résultat de compacité sur $\sqrt{h_n} u_n$ où (h_n, u_n) est une suite solutions approchées. Pour cela on montre que l'on peut négliger les hautes fréquences uniformément en n. Dans le cas unidimensionnel, on peut considérer $r_1 = \kappa = 0$.

L'argument de convergence pour $\varepsilon \to 0$ repose sur un argument d'unicité fort-faible en utilisant la régularité de la solution du système limite. Après avoir bien choisi l'énergie destinée à mesurer la distance entre les deux solutions, il faut analyser la dépendance des estimations obtenues par rapport aux paramètres. Les estimations importantes à obtenir sont la borne uniforme dans $\mathrm{L}^2(0, T; (\mathrm{L}^2(\Omega)^2))$ de $\nabla h^{\varepsilon}/\varepsilon$ et la borne uniforme dans $\mathrm{L}^2(0, T; \mathrm{L}^2(\Omega))$ de $\sqrt{\kappa}\Delta h^{\varepsilon}$. Le détail des démonstrations est donné dans [2]. On discute également du cas mal préparé.

Références bibliographiques

[1] A. Babin, A. Mahalov, B. Nicolaenko, Global splitting in rotating shallow-water equations, European J. Mech. B Fluids 16 (1997) 725–754.

[2] D. Bresch, B. Desjardins, Existence of global weak solutions for a 2D viscous shallow water equations and convergence to the quasi-geostrophic model, Comm. Math. Phys. (2002), soumis.

[3] D. Bresch, B. Desjardins, C.K. Lin, On some compressible fluid models: Korteweg, lubrication and shallow water systems, Comm. Partial Differential Equations (2002), à paraître.

[4] T. Colin, P. Fabrie, Rotating fluid at high Rossby number driven by a surface stress: existence and convergence, Adv. Differential Equations 2 (5) (1997) 715–751.

[5] B. Desjardins, J.-Y. Chemin, I. Gallagher, E. Grenier (2001), livre en préparation.

[6] P.F. Embid, A. Majda, Low Froude number limiting dynamics for stably stratified flow with small or finite Rossby numbers, Geosphys. Astrophys. Fluid Dynamics 87 (1998) 1–50.

[7] P.F. Embid, A. Majda, Averaging over fast gravity waves for geophysical flows with arbitrary potential vorticity, Comm. Partial Differential Equations 21 (1996) 619–658.

[8] P. Gent, The energetically consistent shallow water equations, J. Atmos. Sci. 50 (1993) 1323–1325.

[9] F. Gerbeau, B. Perthame, Derivation of viscous Saint-Venant system for laminar shallow water; Numerical results, Discrete Continuous Dynamical Systems Series B 1 (1) (2001) 89–102.

[10] E. Grenier, N. Masmoudi, Ekman layers of rotating fluids, the case of well prepared initial data, Comm. Partial Differential Equations 22 (5–6) (1997) 953–975.

[11] P.-L. Lions, Mathematical Topics in Fluid Dynamics, Vol. 2. Compressible Models, Oxford University Press, 1998.

[12] J.-L. Lions, R. Temam, S. Wang, On the equations of the large scale Ocean, Nonlinearity 5 (1992) 1007–1053.

[13] N. Masmoudi, Ekman layers of rotating fluids: the case of general initial data, Comm. Pure Appl. Math. 53 (4) (2000) 432–483.

[14] P. Orenga, Un théorème d'existence de solutions d'un problème de shallow water, Arch. Rational Mech. Anal. 130 (2) (1995) 183–204.

[15] J. Pedlosky, Geophysical Fluid Dynamics, Springer-Verlag, 1987.

[16] S. Schochet, Singular limits in bounded domains for quasilinear symmetric hyperbolic systems having a vorticity equation, J. Differential Equations 68 (3) (1987) 400–428.

[17] L. Sundbye, Global existence for the Dirichlet problem for the viscous shallow water equations, J. Math. Anal. Appl. 202 (1) (1996) 236–258.