C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 335 (2002) 1017–1022

Équations aux derivées partielles/*Partial Differential Equations*

Sur une équation parabolique dans un domaine non cylindrique

Rabah Labbas [a], Ahmed Medeghri [b], Boubaker-Khaled Sadallah [c]

[a] **Laboratoire de mathématiques, Université du Havre, F.S.T., BP 540, 76058 Le Havre, France**

[b] **Université du Havre, I.U.T., BP 4006, 76610 Le Havre, France**

[c] **École normale supérieure, Département de maths, 16050 Kouba, Alger, Algérie**

Reçu le 23 novembre 2001 ; accepté après révision le 16 octobre 2002

Note présentée par Philippe G. Ciarlet.

Résumé On donne des résultats de régularité optimale de la solution d'une équation parabolique posée dans des domaines non rectangulaires de type $U=\bigcup_{t\in]0,1[}\{t\}\times I_t$ avec $I_t=\{x: 0<x<\varphi(t)\}$. Deux modèles sont étudiés. Pour le premier, on considère $\varphi(t)=t^\alpha$ avec $\alpha>1/2$ et la régularité optimale est obtenue pour des seconds membres réguliers, grâce essentiellement à un résultat de Labbas et Terreni [7]. Ce cas se généralise lorsque $\varphi\varphi'$ est höldérienne. Le deuxième modèle correspond au cas limite $\varphi(t)=\sqrt{t}$ et la régularité maximale est obtenue pour des seconds membres uniquement dans $\mathrm{L}^p(U)$, $1<p<\infty$, grâce aux résultats de Dore–Venni [3]. ***Pour citer cet article : R. Labbas et al., C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 335 (2002) 1017–1022.***

On a parabolic equation in a noncylindrical domain

Abstract We give some results about the optimal regularity of a solution to a parabolic equation, set in non cylindrical domains $U=\bigcup_{t\in]0,1[}\{t\}\times I_t$ with $I_t=\{x: 0<x<\varphi(t)\}$. Two models are studied. In the first, the function $\varphi(t)=t^\alpha$ with $\alpha>1/2$ is considered and the optimal regularity is obtained when the second member is regular. We use Labbas and Terreni's results [7]. This study is generalized when $\varphi\varphi'$ is Hölderian. The second model corresponds to the limit case $\varphi(t)=\sqrt{t}$ and the maximal regularity is obtained for second members taken only in $\mathrm{L}^p(U)$, $1<p<\infty$. Here, we use Dore–Venni's results [3]. ***To cite this article: R. Labbas et al., C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 335 (2002) 1017–1022.***

Abridged English version

This Note is devoted to the study of the following autonomous parabolic equation

$$\begin{cases} D_t u(t,x)-D_x^2u(t,x)=f(t,x),\\ u_{|\partial U-\Gamma_0}=0. \end{cases}\tag{1}$$

set in the curvilinear triangle U defined by

$$U=\bigcup_{t\in]0,1[}\{t\}\times I_t,$$

where $I_t=\{x: 0<x<\varphi(t)\}$, $\varphi:[0,1]\to\mathbb{R}$ a continuous function and $\Gamma_0=\{1\}\times]0,1[$. The right-hand term f is taken in $\mathrm{L}^p(U)$. Eq. (1) represents Fick's second law which modelizes, for instance the concentration (of atoms) $u(t,x)$ at time t in a position x (like the carburization of steel) in a homogenous

Adresse e-mail : rabah.labbas@univ-lehavre.fr (R. Labbas).

S1631-073X(02)02592-X/FLA

system (pure metal or any alloy). It is also the modelization of the lateral diffusion of a pollutant in a flow of river with variable width.

We are especially interested in the question: what conditions the function φ must verify in order that problem (1) has a solution with optimal regularity, that is a solution u belonging to the anisotropic Sobolev space

$$\mathrm{H}_p^{1,2}(U)=\left\{u\in \mathrm{L}^p(U): D_t u,\, D_x^j u\in \mathrm{L}^p(U),\ j=1,2\right\}?$$

One positive answer is given in the first case of a regular second member f. That is when the function $t\mapsto \varphi'(t)\varphi(t)$ is Hölderian. So we consider the model case $\varphi(t)=t^\alpha$, with the following hypothesis

$$\begin{cases}\text{(i) } 1/2<\alpha<p-1,\\ \text{(ii) } p>\alpha/(2\alpha-1).\end{cases}\tag{H}$$

Let us introduce the following subspace of $\mathrm{L}^p(U)$ (with a slight abuse):

$$\mathrm{L}^p_{\varphi^{2\sigma}}\left(0,1;\mathrm{W}^{2\sigma,p}_\varphi\right)=\left\{f\in \mathrm{L}^p(U): \int_0^1 \varphi(t)^{2\sigma p}\int_0^{\varphi(t)}\int_0^{\varphi(t)}\frac{|f(t,x)-f(t,x')|^p}{|x-x'|^{2\sigma p+1}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}x'\,\mathrm{d}t<\infty\right\}.$$

The second positive answer we give is for a right-hand term taken only in $\mathrm{L}^p(U)$, with $p>3/2$. It is the case of the particular function $\varphi(t)=\sqrt{t}$.

The main results for the first and the second cases are respectively:

THEOREM 1. – *Assume that* (H) *is verified. Given $\sigma\in\,]0,1[$ such that $0<\sigma<1/2p$ and $\sigma\leqslant 2\alpha-1$. Then, for any $f\in \mathrm{L}^p_{\varphi^{2\sigma}}(0,1;\mathrm{W}^{2\sigma,p}_\varphi)$, problem* (1) *has a unique solution $u\in \mathrm{H}_p^{1,2}(U)$ fulfilling the regularity properties*: *$u,\ D_t u,\ D_x u$ and $D_x^2 u$ belong to $\mathrm{L}^p_{\varphi^{2\sigma}}(0,1;\mathrm{W}^{2\sigma,p}_\varphi)$.*

THEOREM 2. – *Let $p>3/2$. Then, for any $f\in \mathrm{L}^p(U)$, problem* (1) *has a unique solution $u\in \mathrm{H}_p^{1,2}(U)$.*

This work is an extension of the Hilbertian case ($p=2$) studied in Sadallah [10]. The change of variables $(t,x)\mapsto(t,y)=(t,x/t^\alpha)$ transforms U into the rectangle $\Omega=\,]0,1[\times]0,1[$. Putting $u(t,x)=v(t,y)$ and $f(t,x)=g(t,y)$, problem (1) is transformed, in Ω, into the degenerated evolution problem

$$\begin{cases}\varphi(t)^2 D_t v-D_y^2 v-\varphi'(t)\varphi(t)yD_y v=\varphi(t)^2 g(t,y),\\ v_{|\partial U-\Gamma_1}=0,\end{cases}\tag{2}$$

with $\Gamma_1=\{1\}\times\,]0,1[$.

It is easy to see that $f\in \mathrm{L}^p(U)$ if and only if $\varphi^{-2+1/p}h\in \mathrm{L}^p(\Omega)$, i.e., iff the function $h=\varphi^2 g$ lies in the closed subspace of $\mathrm{L}^p(\Omega)$ defined by

$$E=\left\{h\in \mathrm{L}^p\left(0,1;\mathrm{L}^p(0,1)\right): \varphi^{-2+1/p}h\in \mathrm{L}^p\left(0,1;\mathrm{L}^p(0,1)\right)\right\}.$$

This space is equipped with the norm $\|h\|_E=\|\varphi^{-2+1/p}h\|_{\mathrm{L}^p(0,1;\mathrm{L}^p(0,1))}$.

We can find in Favini and Yagi [5] a study of some abstract degenerated problems of parabolic type. These authors have particularely used the notion of multivalued linear operators and constructed fundamental solutions when the right-hand side has a Hölder regularity with respect to the time. In Savaré [11], parabolic problems in non cylindrical domains are considered in the hilbertian case. The author obtains some regularity results under assumption on the geometrical behavior of the boundary which cannot include our triangular domain. Hofmann and Lewis [6], have also considered boundary value problems for the heat equation in non cylindrical domains satisfying some conditions of Lipschitz's type. They showed that the optimal L^p regularity holds for $p=2$.

Our approach is different from the previous methods: It is based on the direct use of operators sums in L^p space. This is naturally suggested by Eq. (2). In the first model, we use Labbas and Terreni results [7]. For the second one, we use the remarkable Dore–Venni's theorem given in [3].

Observe that we can extend the present method to higher dimension (in x) as well as for other spaces.

Pour citer cet article : R. Labbas et al., C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 335 (2002) 1017–1022

1. Introduction

On étudie le problème parabolique (1) posé dans l'ouvert triangulaire U lorsque f est dans $\mathrm{L}^p(U)$. L'équation (1) représente la deuxième loi dite de Fick modélisant, par exemple la concentration (en atomes) $u(t,x)$ à l'instant t et au point x (comme la carburation d'un acier) dans un système homogène plan triangulaire (métal pur ou alliage quelconque). Elle modélise aussi la diffusion latérale d'un polluant dans une rivière à largeur variable.

Une étude de problèmes abstraits dégénérés de type parabolique est faite dans Favini et Yagi [5]. Ces auteurs utilisent principalement la notion d'opérateurs linéaires multivoques et construisent des solutions fondamentales lorsque le second membre possède une régularité höldérienne par rapport à t. Des problèmes paraboliques dans un domaine non cylindrique (cas hilbertien) sont considérés dans Savaré [11]. L'auteur obtient des résultats de régularité grâce à des hypothèses sur le comportement géométrique du domaine qui excluent notre domaine triangulaire. Hofmann et Lewis [6] ont considéré un problème de Neumann pour l'équation de la chaleur dans un domaine non cylindrique dont le bord vérifie une condition de Lipschitz. Ils montrent que le résultat optimal est obtenu pour $p=2$. Notre approche est différente pour le problème particulier qu'on étudie. Elle est basée sur une utilisation directe des sommes d'opérateurs et leurs perturbations dans l'espace L^p à poids. Cette méthode s'étend au cas de dimension (en x) d'ordre supérieur, ainsi qu'à d'autres espaces.

On s'est particulièrement intéressé à la question : quelles sont les conditions sur φ qui assurent une régularité optimale pour la solution u du problème (1) à savoir u dans l'espace de Sobolev anisotrope $\mathrm{H}_p^{1,2}(U)$?

Une première réponse positive est donnée pour un second membre f régulier. C'est le cas où la fonction $t \mapsto \varphi'(t)\varphi(t)$ est höldérienne. Comme modèle, on prendra $\varphi(t)=t^\alpha$ avec l'hypothèse (H).

Une deuxième réponse positive est donnée pour un second membre f quelconque dans $\mathrm{L}^p(U)$ avec $p>3/2$ dans le cas limite $\varphi(t)=\sqrt{t}$. Le résultat essentiel de ce travail est donné par

THÉORÈME 1. – *Supposons que* (H) *soit vérifiée. Soit* $\sigma \in]0,1[$ *tel que* $0<\sigma<1/2p$ *et* $\sigma \leqslant 2\alpha-1$. *Alors* $\forall f \in \mathrm{L}^p_{\varphi^{2\sigma}}(0,1;\mathrm{W}_\varphi^{2\sigma,p})$, *le problème* (1) *admet une unique solution* $u \in \mathrm{H}_p^{1,2}(U)$ *vérifiant les propriétés de régularité* : u, $D_t u$, $D_x u$ *et* $D_x^2 u$ *appartiennent à* $\mathrm{L}^p_{\varphi^{2\sigma}}(0,1;\mathrm{W}_\varphi^{2\sigma,p})$.

THÉORÈME 2. – *Soit* $p>3/2$ *alors pour tout* $f \in \mathrm{L}^p(U)$, *le problème* (1) *admet une unique solution* $u \in \mathrm{H}_p^{1,2}(U)$.

Dans le premier cas on utilise le résultat de Labbas et Terreni [7]. Pour le second, on utilise le théorème de Dore et Venni [3]. Rappelons brièvement l'essentiel de ces deux approches.

2. Sur les sommes d'operateurs

2.1. Première approche

Un opérateur Λ linéaire fermé injectif dans un espace de Banach E est dit sectoriel si $D(\Lambda)$ et $\mathrm{Im}(\Lambda)$ sont denses dans E, $]-\infty,0[\subset \rho(\Lambda)$, ($\rho(\Lambda)$ est l'ensemble résolvant de Λ) et $\exists M \geqslant 1$ telle que $\|t(\Lambda+tI)^{-1}\| \leqslant M$ pour tout $t>0$.

Soint A et B deux opérateurs linéaires définis dans E à domaines $D(A)$ et $D(B)$ denses. Leur somme est définie par $Sv = Av + Bv$, où $v \in D(S) = D(A) \cap D(B)$. On suppose que

- (DG1) : il existe $r>0$, ϵ_A, ϵ_B tels que $\epsilon_A + \epsilon_B > \pi$, $\rho(-A)$ et $\rho(-B)$ contiennent respectivement les secteurs $\Sigma_{\epsilon_A} = \{z : |z| \geqslant r, |\operatorname{Arg}(z)| < \epsilon_A\}$, $\Sigma_{\epsilon_B} = \{z : |z| \geqslant r, |\operatorname{Arg}(z)| < \epsilon_B\}$ et $\|(A+zI)^{-1}\|_{\mathrm{L}(E)} = \mathrm{O}(1/|z|)$, pour $z \in \sum_{\epsilon_A}$, $\|(B+zI)^{-1}\|_{\mathrm{L}(E)} = \mathrm{O}(1/|z|)$, pour $z \in \sum_{\epsilon_B}$,
- (LT) : il existe $C>0$, $\lambda_0>0$, τ, ρ tels que $0 \leqslant \tau < \rho \leqslant 1$ et
$$\left\|(A+\lambda_0)(A+\lambda I)^{-1}\left[(A+\lambda_0)^{-1};(B+\mu I)^{-1}\right]\right\|_{\mathrm{L}(E)} \leqslant \frac{C}{|\lambda|^{1-\tau}|\mu|^{1+\rho}} \quad \forall \lambda \in \rho(-A),\ \forall \mu \in \rho(-B),$$
où le crochet $[\cdot\,;\cdot]$ désigne le commutateur des deux résolvantes.

On rappelle que pour $\sigma \in]0,1[$ et $1 \leqslant p \leqslant \infty$, l'espace d'interpolation $D_A(\sigma,p)$ entre $D(A)$ et E est caractérisé par (voir [2])

$$D_A(\sigma,p) = \left\{\xi \in E : t \mapsto \left\|t^{\sigma} A(A+tI)^{-1}\xi\right\|_E \in \mathrm{L}^p_*\right\},$$

où L^p_* est l'espace des fonctions boréliennes de puissance p intégrables pour la mesure $\mathrm{d}t/t$ (avec la modification usuelle pour $p=+\infty$). On utilisera le résultat suivant (démontré dans [11]) : sous les hypothèses (DG1) et (LT) il existe $\lambda^*>0$ tel que pour tout $\lambda \geqslant \lambda^*$ et pour tout $h \in D_A(\sigma,p)$, l'équation $Aw+Bw+\lambda w=h$ admet une unique solution $w \in D(A)\cap D(B)$ satifaisant à : $(A+\lambda I)w \in D_A(\theta,p)$, $Bw \in D_A(\theta,p)$ et $(A+\lambda I)w \in D_B(\theta,p)$ pour tout $\theta \leqslant \mathrm{Min}(\sigma,(\rho-\tau))$.

2.2. Seconde approche

On suppose que E a la propriété U.M.D. Cela signifie que pour un $p \in]1,\infty[$ (donc pour tout p), la transformée de Hilbert est continue de $\mathrm{L}^p(\mathbb{R},E)$ dans lui-même, voir Burckholder [1]. En pratique, tous les espaces construits sur L^p sont U.M.D., si p est dans l'intervalle ouvert $(1,\infty)$. On suppose :

- (DV1) : $\rho(-A)$ et $\rho(-B)$ contiennent $]-\infty,0]$ et pour tout $\lambda \geqslant 0$ on a
$$\left\|(A+\lambda I)^{-1} = \right\|_{\mathrm{L}(E)} = \mathrm{O}\left(\frac{1}{1+\lambda}\right) \qquad \left\|(B+\lambda I)^{-1}\right\|_{\mathrm{L}(E)} = \mathrm{O}\left(\frac{1}{1+\lambda}\right);$$
- (DV2) : pour tout $s \in \mathbb{R}$ les opérateurs A^{is} et B^{is} appartiennent à $\mathrm{L}(E)$ et il existe des constantes positives K, θ_A et θ_B telles que $\theta_A+\theta_B<\pi$ et $\|A^{is}\| \leqslant K\,\mathrm{e}^{|s|\theta_A}$ et $\|B^{is}\| \leqslant K\,\mathrm{e}^{|s|\theta_B}$;
- (DV3) : les résolvantes de $-A$ et $-B$ commutent.

Sous ces trois hypothèses Dore et Venni [3] montrent que $(A+B)$ est fermé inversible et $(A+B)^{-1} \in \mathrm{L}(E)$.

3. Preuve des Théorèmes 1 et 2

Étude du cas $\varphi(t)=t^{\alpha}$. – Soit $\lambda>0$ donné. En posant $w(t)=\mathrm{e}^{-\lambda t^{1-2\alpha}/(1-2\alpha)}v(t)$, il suffit de résoudre le problème de Cauchy posé dans $X=\mathrm{L}^p(0,1)$:

$$\begin{cases}\varphi(t)^2 w'(t)+L(t)w(t)+\lambda w(t)=h(t), & t\in(0,1),\\ w(0)=0,\end{cases} \tag{3}$$

où $h(t)=\mathrm{e}^{-\lambda t^{1-2\alpha}/(1-2\alpha)}(\varphi(t))^2 g(t,\cdot)$. La famille $(L(t))_{t\in[0,1]}$ est définie par

$$\begin{cases}D(L(t))=\{\psi \in \mathrm{W}^{2,p}(0,1) : \psi(0)=\psi(1)=0\},\\ ([L(t)]\psi)(y)=-\psi''(y)-\varphi'(t)\varphi(t)y\psi'(y).\end{cases}$$

Alors on a $Bw+Aw+\lambda w=h$, où

$$\begin{cases}D(A)=\{w\in E : \varphi(t)^{-2+1/p}w \in \mathrm{L}^p(0,1;\mathrm{W}^{2,p}(0,1))\cap \mathrm{W}^{1,p}_0(0,1)\},\\ (Aw)(t)=L(t)w(t), \quad t\in[0,1],\end{cases}$$

$$\begin{cases}D(B)=\{w\in E : \varphi^{1/p}w' \in \mathrm{L}^p(0,1;X) \text{ et } w(0)=0\},\\ (Bw)(t)=\varphi(t)^2 w'(t), \quad t\in[0,1].\end{cases}$$

La trace $w(0)$ dans $D(B)$ est bien définie. En effet

$$\begin{cases}\varphi(t)^{1/p}w=t^{\alpha/p}w \in \mathrm{L}^p(0,1;X),\\ \varphi(t)^{\alpha/p}w'=t^{\alpha/p}w' \in \mathrm{L}^p(0,1;X),\end{cases}$$

et grâce au point (i) de (H), on a $\alpha/p+1/p<1$, d'où la continuité de w sur $[0,1]$ (voir [12], p. 42, lemma). Pour vérifier les hypothèses (DG1) et (LT) on montre les deux propositions suivantes :

PROPOSITION 3. – *A et B sont linéaires fermés de domaines denses dans E et vérifient l'hypothèse* (DG1).

Pour l'opérateur B, grâce à l'hypothèse (H) et au lemme classique d'interpolation de Schur, on montre que $\epsilon_B = \pi/2 - \epsilon_0$ (pour tout $\epsilon_0 \in]0, \pi/2[$). Pour A, on écrit que $L(t) = L_0 + P(t)$ où

$$\begin{cases} D(L_0) = \{\psi \in \mathrm{W}^{2,p}(0,1) : \psi(0) = \psi(1) = 0\}, \\ L_0\psi = -\psi'', \end{cases}$$

$$\begin{cases} D(P(t)) = \mathrm{W}^{1,p}(0,1), \\ P(t)\psi = -\alpha t^{2\alpha-1} y\psi' = -b(t)\, y\psi', \end{cases}$$

L_0 est sectoriel, $P(t)$ est linéaire compact sur $D(L_0)$. On en déduit que A est sectoriel et donc vérifie la condition (DG1).

PROPOSITION 4. – *A et B vérifient l'hypothèse* (LT).

Dans notre cas ($D(L(t))$ étant constants), (LT) est vraie dès qu'il existe $\rho \in]0,1]$, $M_1 > 0$ tels que

$$\left\| \left[\left(L(t) - L(s)\right) L(s)^{-1} \right] \right\|_{\mathrm{L}(X)} \leqslant M_1 |t-s|^\rho, \quad \forall t, s \in [0,1]$$

(voir [7]). Cette dernière est réalisée avec $\rho = 2\alpha - 1$, grâce au fait que la fonction $t \mapsto \varphi'(t)\varphi(t) = t^{2\alpha-1}$ est $(2\alpha-1)$-höldérienne.

On montre aussi que $D_A(\sigma, p) = \{w \in E : \varphi(t)^{-2+1/p} w \in \mathrm{L}^p(0,1; \mathrm{W}^{2\sigma,p}(0,1))t\}$. Les résultats de [7] rappelés au paragraphe 2 s'appliquent et donnent

PROPOSITION 5. – *Soit* $\sigma > 0$ *assez petit et* h *telle que* $\varphi^{-2+1/p} h$ *soit dans* $\mathrm{L}^p(0,1; \mathrm{W}^{2\sigma,p}(0,1))$. *Alors il existe* λ^* *positif tel que pour tout* $\lambda \geqslant \lambda^*$ *il existe une unique solution* w *du problème* (3) *ayant les régularités* :

(i) $w \in \mathrm{L}^p(\Omega)$, $\varphi^{-2+1/p} w \in \mathrm{L}^p(\Omega)$,
(ii) $\varphi^{-2+1/p} D_x^2 w \in \mathrm{L}^p(0,1; \mathrm{W}^{2\sigma,p}(0,1))$,
(iii) $\varphi(t)^{1/p} D_t w \in \mathrm{L}^p(0,1; \mathrm{W}^{2\sigma,p}(0,1))$.

On a un résultat similaire lorsque $h \in D_B(\sigma, p)$. Le retour au triangle utilise les équivalences

$$\varphi^{-2+1/p} h \in \mathrm{L}^p\left(0,1; \mathrm{W}^{2\sigma,p}(0,1)\right) \iff f \in \mathrm{L}^p_{\varphi^{2\sigma}}\left(0,1; \mathrm{W}^{2\sigma,p}\right),$$
$$\varphi^{1/p} D_t v \in \mathrm{L}^p\left(0,1; \mathrm{W}^{2\sigma,p}(0,1)\right) \iff D_t u \in \mathrm{L}^p_{\varphi^{2\sigma}}\left(0,1; \mathrm{W}^{2\sigma,p}\right).$$

Le Théorème 1 s'en déduit.

Etude du cas $\varphi(t) = \sqrt{t}$ *et* $p > 3/2$. – Le problème (2) est équivalent à

$$\begin{cases} tv'(t) + Lv(t) = h(t), \quad t \in (0,1), \\ v(0) = 0, \end{cases} \tag{4}$$

avec

$$\begin{cases} D(L) = D(L_0) = \{\psi \in \mathrm{W}^{2,p}(0,1) : \psi(0) = \psi(1) = 0\}, \\ (L\psi)(y) = (L_0\psi)(y) - \frac{1}{2} y\psi'(y) = -\psi''(y) - \frac{1}{2} y\psi'(y). \end{cases}$$

En posant $w(t) = t^{-1/2p} v(t)$, il suffit de résoudre le problème

$$\begin{cases} tw'(t) + Lw(t) + \frac{1}{2p} w(t) = h_1(t), \quad t \in (0,1), \\ w(0) = 0, \end{cases} \tag{5}$$

où $h_1(t) = t^{-1/2p} h(t)$. On l'écrit sous la forme $Bw + Aw = h_1$, avec

$$\begin{cases} D(A) = \{w \in E : t^{-1+1/(2p)} w \in \mathrm{L}^p(0,1; \mathrm{W}^{2,p}(0,1) \cap W_0^{1,p}(0,1))\}, \\ (Aw)(t) = Lw(t), \quad t \in (0,1), \end{cases}$$

$$\begin{cases} D(B) = D(B_0) = \{w \in E : t^{1/(2p)} w' \in \mathrm{L}^p(0,1;X),\ w(0) = 0\}, \\ (Bw)(t) = t\,w'(t) + \frac{1}{2p} w(t) = (B_0 w)(t) + \frac{1}{2p} w(t), \quad t \in (0,1). \end{cases} \tag{6}$$

Noter que la condition qui permet de donner un sens à $w(0)$ est vérifiée puisque

$$1/2p + 1/p < 1.$$

PROPOSITION 6. – *A et B sont linéaires fermés de domaines denses dans E et vérifient l'hypothèse* (DV1), (DV2) *et* (DV3).

L'essentiel est la vérification de (DV2) pour B en particulier. Sachant qu'il n'y a pas de résultat analogue au théorème de Mikhlin pour les espaces à poids et à valeurs UMD de type $\mathrm{L}^p_\mu(0,1;X)$, on se ramène à un espace sans poids et ensuite, utilisant la représentation de Triebel [12] pour les puissances imaginaires pures et des techniques similaires à celles de Dore–Venni [4], on montre, que pour l'opérateur B_0 défini en (6), on a $\|B_0^{ir}\|_{\mathrm{L}(E)} = \mathrm{O}((1+r^2)\,\mathrm{e}^{\pi/2|r|})$. D'où $\theta_{B_0} = \pi/2 + \varepsilon$ pour tout $\varepsilon > 0$. On en déduit que B vérifie (DV2) grâce à [9], avec $\theta_B = \pi/2 + \varepsilon$. Pour l'opérateur A, il suffit d'étudier sa réalisation L qui est une perturbation de L_0. On sait qu'il existe $\epsilon_1 > 0$ tel que

$$\begin{cases} \rho(-L) \supset \Sigma_{\pi-\epsilon_1} = \{\lambda : |\arg\lambda| < \pi - \epsilon_1\} \quad \text{et} \\ \forall\lambda \in \Sigma_{\pi-\epsilon_1}, \quad \|(L+\lambda I)^{-1}\|_{\mathrm{L}(E)} \leqslant M/(1+|\lambda|), \end{cases}$$

d'autre part $(L_0)^{is}$ forme un groupe fortement continu (voir Labbas et Moussaoui [8]) tel que pour tout $\gamma_1 > 0$, il existe $M_0 > 0$:

$$\left\|(L_0)^{is}\right\| \leqslant M_0\,\mathrm{e}^{\gamma_1|s|} \quad \forall s \in \mathbb{R},$$

on en déduit que pour tout $\varepsilon > 0$ on a

$$\left\|(L)^{is}\right\| = \mathrm{O}\big(\mathrm{e}^{(\varepsilon+\gamma_1)|s|}\big) \quad \forall s \in \mathbb{R}.$$

De même pour A. D'où $\theta_A = \theta_L = \varepsilon + \gamma_1 \in\,]0, \pi/2[$. La condition $\theta_A + \theta_B < \pi$ est vérifiée et le Théorème 2 s'en déduit.

Remerciements. Nous tenons à remercier le referee pour toutes ses remarques et suggestions concernant ce travail.

Références bibliographiques

[1] D.L. Burkholder, A geometrical characterisation of Banach spaces in which martingale difference sequences are unconditional, Ann. Probab. 9 (1981) 997–1011.

[2] G. Da Prato, P. Grisvard, Sommes d'opérateurs linéaires et equations différentielles opérationnelles, J. Math. Pures Appl. (9) 54 (1975) 305–387.

[3] G. Dore, A. Venni, On the closedness of the sum of two closed operators, Math. Z. 196 (1987) 270–286.

[4] G. Dore, A. Venni, An operational method to solve a Dirichlet problem for the Laplace operator in a plane sector, Differential Integral Equations 3 (1990) 323–334.

[5] A. Favini, A. Yagi, Multivalued linear operators and degenerate evolution equations, Ann. Mat. Pura Appl. (IV)163 (1993) 353–384.

[6] S. Hofmann, J.L. Lewis, The L^p Neumann and regularity problems for the heat equation in noncylindrical domains, in: Journées Equations aux Dérivées Partielles, Saint-Jean-de-Monts, 2–5 Juin 1998, GDR 1151 (CNRS).

[7] R. Labbas, B. Terreni, Sommes d'opérateurs linéaires de type parabolique, 1ère partie, Boll. Un. Mat. Ital. B (7) 1 (1987) 545–569.

[8] R. Labbas, M. Moussaoui, On the resolution of the heat equation with dicontinuous coefficients, Semigroup Forum 60 (2000) 187–201.

[9] J. Prüss, H. Sohr, On operators with bounded imaginary powers in banach spaces, Math. Z. 203 (1990) 429–452.

[10] B.-K. Sadallah, Relationship between two boundary problems, the first concerns a smooth domain and the second concerns a domain with corners, Arab Gulf J. Scient. Res. 11 (1) (1993) 125–141.

[11] G. Savaré, Parabolic problems with mixed variable lateral conditions: an abstract approach, J. Math. Pures Appl. 76 (1997) 321–351.

[12] H. Triebel, Interpolation Theory, Functions Spaces, Differential Operators, North-Holland, Amsterdam, 1978.