C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 334 (2002) 787–792

Probabilités/*Probability Theory*

Mesure unitarisante : algèbre de Heisenberg, algèbre de Virasoro

Hélène Airault [a,b]

[a] INSSET, Université de Picardie Jules Verne, 48, rue Raspail, 02100 Saint-Quentin (Aisne), France

[b] Laboratoire CNRS UMR 6140, LAMFA 33, rue Saint-Leu, 80039 Amiens, France

Reçu le 11 février 2002 ; accepté le 19 février 2002

Note présentée par Paul Malliavin.

Résumé On désigne par $\mathbf{R}^{2\infty}$ le produit d'une infinité dénombrable de copies de l'espace $\mathbf{R}^2$. Une mesure borélienne de masse finie sur l'espace topologique de dimension infinie $\mathbf{R}^{2\infty}$ et *unitarisante* pour la représentation canonique de l'algèbre de Heisenberg de dimension infinie est une mesure gaussienne sur $\mathbf{R}^{2\infty}$. ***Pour citer cet article : H. Airault, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 334 (2002) 787–792.*** © 2002 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

Unitarizing measure: the Heisenberg algebra, the Virasoro algebra

Abstract Let $\mathbf{R}^{2\infty}$ be the infinite product of countably many copies of $\mathbf{R}^2$. A Borelian probability measure on the infinite dimensional topological space $\mathbf{R}^{2\infty}$ which is *unitarizing* for the canonical representation of the infinite dimensional Heisenberg algebra is a Gaussian measure on $\mathbf{R}^{2\infty}$. ***To cite this article: H. Airault, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 334 (2002) 787–792.*** © 2002 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

Abridged English version

The problem of unitarizing measures for representations of the Virasoro algebra was first considered in [1]. This Note contains a complete study of the classical case of the Heisenberg algebra as well as the integration of one of the unitarizing condition for the Virasoro algebra.

In the case of the finite dimensional Heisenberg algebra, by the Stone–von Neumann theorem [8], there is unicity of the representation up to an isomorphism. The unicity theorem for the representation does not extend in a simple manner to the case of the infinite dimensional Heisenberg algebra, see [5, p. 177] et [6, pp. 166, 393]. In [1], the unitarizing measures for a representation of the Virasoro algebra have been characterized with the divergences of the Kirillov vector fields. In this Note, we consider mainly the Heisenberg algebra. We prove that a real finite measure μ on $\mathbf{R}^2$ and *unitarizing* for the canonical representation of the 3-dimensional Heisenberg algebra is uniquely determined, it is absolutely continuous with repect to the 2-dimensional Lebesgue measure on $\mathbf{R}^2$ and the density is a Gaussian. In fact, in this case, the knowledge of the divergence with respect to μ of the vector field $\partial/\partial z$ completely determines the unitarizing measure μ. The result extends to the infinite dimensional Heisenberg algebra, and in that case, we obtain a gaussian measure on the infinite dimensional space $\mathbf{R}^{2\infty}$, product of an infinite countable number of copies of $\mathbf{R}^2$.

Adresse e-mail : helene.airault@insset.u-picardie.fr (H. Airault).

S1631-073X(02)02331-2/FLA

1. L'algèbre de Heisenberg de dimension 3

L'algèbre $\mathcal{S}_3 = \mathbf{R} \oplus \mathbf{R}^2$ est identifiée à l'ensemble des matrices triangulaires supérieures d'ordre 3 avec zéro sur la diagonale principale (*voir* par exemple [3, p. 125]). Le crochet de Lie est donné par la multiplication des matrices $[A_1, A_2] = A_1A_2 - A_2A_1$.

On pose

$$\kappa = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad e = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad f = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On identifie $\mathbf{R}^2$ et le sous-espace engendré par e et f. Si $h_1 = a_1e + b_1f$ et $h_2 = a_2e + b_2f$, on a $[c_1\kappa + h_1, c_2\kappa + h_2] = \omega(h_1, h_2)\kappa$ avec $\omega(h_1, h_2) = \det(h_1, h_2) = a_1b_2 - a_2b_1$. *L'opérateur J de structure complexe* est défini dans la base (e, f) par $Je = f$ et $Jf = -e$. *Le produit scalaire* est relié à la structure symplectique ω par $\|h\|^2 = \omega(h, Jh)$. Si $h = ae + bf$, on a $\|h\|^2 = \det(h, Jh) = \det\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = a^2 + b^2$. Soit $\mathrm{d}z = \mathrm{d}x + \mathrm{i}\,\mathrm{d}y$ et $\mathrm{d}\overline{z} = \mathrm{d}x - \mathrm{i}\,\mathrm{d}y$, on a $\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}\overline{z} = -2\mathrm{i}\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$, puis $\omega = \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y = \frac{\mathrm{i}}{2}\,\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}\overline{z}$ avec $\langle \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y, h_1 \wedge h_2\rangle = \det\begin{pmatrix} \mathrm{d}x(h_1) & \mathrm{d}x(h_2) \\ \mathrm{d}y(h_1) & \mathrm{d}y(h_2) \end{pmatrix}$. On note

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - \mathrm{i}\frac{\partial}{\partial y}\right) \quad \text{et} \quad \frac{\partial}{\partial \overline{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + \mathrm{i}\frac{\partial}{\partial y}\right).$$

Une 1-forme θ est de type $(1, 0)$ si $\theta = \alpha\,\mathrm{d}z$, elle est de type $(0, 1)$ si $\theta = \alpha\,\overline{\mathrm{d}z}$. *Soit ω une 2-forme de type* (1,1). *On dit que θ est une primitive antiholomorphe de ω si θ est une* 1*-forme de type* $(0, 1)$, $\theta = a\,\mathrm{d}\overline{z}$ *telle que* $\overline{\partial}\theta = 0$ *et* $\partial\theta = constante \times \omega$. Par exemple, si $\theta = z\,\mathrm{d}\overline{z}$, alors $\overline{\partial}\theta = 0$, et $\partial\theta = \mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}\overline{z} = -2\mathrm{i}\omega$.

1.1. Représentation de l'algèbre de Heisenberg sur un espace de fonctions holomorphes

Soit $c \in \mathbf{R}$ et $v \in \mathcal{S}_3$, on définit l'application $\mathbf{R}$-linéaire $v \to \rho(v)$ telle que $\rho(v)$ opère sur les fonctions holomorphes en posant

$$\rho(e) = \frac{\partial}{\partial z} + cz, \quad \rho(f) = \mathrm{i}\left(\frac{\partial}{\partial z} - cz\right), \quad \rho(\kappa) = \mathrm{i}. \tag{1.1}$$

On a $[\rho(e), \rho(f)] = -2c\rho(\kappa)$, puis $[\rho(e), \rho(\kappa)] = 0$ et $[\rho(f), \rho(\kappa)] = 0$.

DÉFINITION. – Soit μ une mesure réelle sur $\mathbf{R}^2$, on dit que μ est unitarisante pour ρ si pour toutes fonctions ϕ, ψ holomorphes, on a

$$\int \big[\rho(v)\phi\big]\overline{\psi}\,\mathrm{d}\mu = -\int \phi\big[\overline{\rho(\overline{v})\psi}\big]\,\mathrm{d}\mu. \tag{1.2}$$

On ne suppose pas que μ est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbf{R}^2$. Voir [2, p. 188]. Soit μ une mesure réelle de masse finie sur $\mathbf{R}^2$, on dit que la fonction $\mathrm{div}_\mu Z$ est la divergence du champ de vecteurs Z sur $\mathbf{R}^2$ si pour toute fonction g de classe C^1, on a

$$\int (Zg)\,\mathrm{d}\mu = \int g\,\mathrm{div}_\mu Z\,\mathrm{d}\mu. \tag{1.3}$$

Pour un champ de vecteurs complexes, $\mathrm{div}_\mu(A + \mathrm{i}B) = \mathrm{div}_\mu A + \mathrm{i}\,\mathrm{div}_\mu B$.

Si (1.3) est vérifiée pour toute fonction $g = \phi\overline{\psi}$ où ϕ et ψ sont holomorphes, alors par le théorème de densité de Weierstrass, elle est vérifiée pour toute fonction g de classe C^1 sur $\mathbf{R}^2$. Cette remarque permet de démontrer :

THÉORÈME. – *Soit ρ l'application définie par* (1.1), *alors μ est unitarisante pour ρ si et seulement si*

$$\mathrm{div}_\mu\left(\frac{\partial}{\partial z}\right) = -c\overline{z}. \tag{1.4}$$

Démonstration. – On utilise $\frac{\partial}{\partial \overline{z}}\phi = 0$ et $\frac{\partial}{\partial \overline{z}}\psi = 0$ (ϕ et ψ holomorphes). On écrit la formule (1.2) avec $v = e$,

$$I=\int\big[\rho(e)\phi\big]\overline{\psi}\,\mathrm{d}\mu=\int\left[\left(\frac{\partial}{\partial z}+cz\right)\phi\right]\overline{\psi}\,\mathrm{d}\mu=\int\frac{\partial}{\partial z}(\phi\overline{\psi})\,\mathrm{d}\mu+\int cz\phi\overline{\psi}\,\mathrm{d}\mu,$$
$$J=\int\phi\big[\overline{\rho(e)\psi}\,\big]\,\mathrm{d}\mu=\int\phi\left(\frac{\partial}{\partial\overline{z}}+c\overline{z}\right)\overline{\psi}\,\mathrm{d}\mu=\int\frac{\partial}{\partial\overline{z}}(\phi\overline{\psi})\,\mathrm{d}\mu+\int c\overline{z}\phi\overline{\psi}\,\mathrm{d}\mu.$$

La relation $I=-J$ s'écrit $\int\big(\frac{\partial}{\partial z}+\frac{\partial}{\partial\overline{z}}\big)\phi\overline{\psi}\,\mathrm{d}\mu=-c\int(z+\overline{z})\phi\overline{\psi}\,\mathrm{d}\mu$, donc

$$\mathrm{div}_\mu\left(\frac{\partial}{\partial z}+\frac{\partial}{\partial\overline{z}}\right)=-c(z+\overline{z}).\tag{1.5}$$

On fait le même calcul pour $v=f$.

$$I=\int\big[\rho(f)\phi\big]\overline{\psi}\,\mathrm{d}\mu=\int\left[\mathrm{i}\left(\frac{\partial}{\partial z}-cz\right)\phi\right]\overline{\psi}\,\mathrm{d}\mu=\int\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial z}(\phi\overline{\psi})\,\mathrm{d}\mu-\mathrm{i}\int cz\phi\overline{\psi}\,\mathrm{d}\mu,$$
$$J=\int\phi\big[\overline{\rho(f)\psi}\,\big]\,\mathrm{d}\mu=\int\phi(-\mathrm{i})\left(\frac{\partial}{\partial\overline{z}}-c\overline{z}\right)\overline{\psi}\,\mathrm{d}\mu.$$

Si $I=-J$ alors $\int\big(\frac{\partial}{\partial z}-\frac{\partial}{\partial\overline{z}}\big)\phi\overline{\psi}\,\mathrm{d}\mu=c\int(z-\overline{z})\phi\overline{\psi}\,\mathrm{d}\mu$, d'où

$$\mathrm{div}_\mu\left(\frac{\partial}{\partial z}-\frac{\partial}{\partial\overline{z}}\right)=c(z-\overline{z}).\tag{1.6}$$

Pour $\rho(\kappa)=\mathrm{i}$, $\int\mathrm{i}\phi\overline{\psi}\,\mathrm{d}\mu+\int\phi(-\mathrm{i})\overline{\psi}\,\mathrm{d}\mu=0$ est toujours vérifié. Les relations (1.5) et (1.6) impliquent (1.4). Pour la réciproque, $\mathrm{div}_\mu(\frac{\partial}{\partial z})=-c\overline{z}\Rightarrow\mathrm{div}_\mu(\frac{\partial}{\partial\overline{z}})=-cz$.

COROLLAIRE. – *Soit μ une mesure réelle de masse finie sur $\mathbf{R}^2$. Soit $c=-\frac{1}{2t}$ où $t>0$. La mesure μ est unitarisante pour ρ définie par* (1.1) *si et seulement si* $\mu=\frac{1}{2\pi t}\exp\big(-\frac{x^2+y^2}{2t}\big)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.

Démonstration. – De $\mathrm{div}_\mu(\frac{\partial}{\partial z})=-c\overline{z}$, on déduit $\mathrm{div}_\mu(\frac{\partial}{\partial x})=-2cx$ et $\mathrm{div}_\mu(\frac{\partial}{\partial y})=-2cy$. Montrons que μ est absolument continue à la mesure de Lebesgue $\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ sur $\mathbf{R}^2$: soit $\lambda=\pi_1*\mathrm{d}x$ la projection de μ sur la première coordonnée, alors pour toute fonction ϕ bornée de classe C^1 définie sur $\mathbf{R}$, $\int\phi'(x)\,\mathrm{d}\lambda(x)=-2c\int\phi(x)x\,\mathrm{d}\lambda(x)$ et ceci implique que la mesure λ est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbf{R}$. On projette de même sur la deuxième coordonnée. On déduit $\mu=k(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ et la densité k vérifie $\frac{\partial}{\partial x}k=2cxk$ et $\frac{\partial}{\partial y}k=2cyk$. Si $c=-\frac{1}{2t}$, on obtient $k(x,y)=\frac{1}{2\pi t}\exp\big(-\frac{x^2+y^2}{t}\big)$. La connaissance de la divergence du champ de vecteurs $\frac{\partial}{\partial z}$ détermine la mesure unitarisante μ sur $\mathbf{R}^2$. La réciproque est immédiate.

2. L'algèbre de Heisenberg de dimension infinie

Les résultats précédents s'étendent à l'algèbre de Heisenberg de dimension infinie $H=\mathbf{R}\bigoplus l^2$ où l^2 est l'espace des suites réelles $h=(h_n)_{n\geqslant 1}$ telles que $\sum_{n\geqslant 1}h_n^2<+\infty$. Sur l^2, on définit $\omega=\sum_{k\geqslant 1}\mathrm{d}h_{2k-1}\wedge\mathrm{d}h_{2k}$, i.e., $\omega(h,\widetilde{h})=\sum_{k=1}^{+\infty}(h_{2k-1}\widetilde{h}_{2k}-h_{2k}\widetilde{h}_{2k-1})$. Soit $\kappa=(1,0)\in\mathbf{R}\bigoplus l^2$, pour $h,\widetilde{h}\in l^2$ et $c,\widetilde{c}\in\mathbf{R}$, on pose

$$\big[c\kappa+(0,h),\widetilde{c}\kappa+\big(0,\widetilde{h}\big)\big]=\omega\big(h,\widetilde{h}\big)\kappa.$$

On a $[[H,H],H]=0$ et l'identité de Jacobi est satisfaite. Soit e_k, la suite de l^2 dont tous les termes sont nuls sauf le $k^{\text{ième}}$ qui est égal à 1. On définit l'opérateur linéaire $J:l^2\to l^2$ par $Je_{2k-1}=e_{2k}$ et $Je_{2k}=-e_{2k-1}$ pour $k\geqslant 1$ de sorte que pour $h=(h_j)_{j\geqslant 1}\in l^2$, on a $Jh=(h_2,-h_1,h_4,-h_3,\dots,h_{2k},h_{2k-1},\dots)$ et $\|h\|^2=\sum_{k\geqslant 1}(h_{2k-1}^2+h_{2k}^2)=-\omega(h,Jh)$. Si on pose $z_k=h_{2k-1}+\mathrm{i}h_{2k}$, on a $\mathrm{d}z_k=\mathrm{d}h_{2k-1}+\mathrm{i}\,\mathrm{d}h_{2k}$ et $\mathrm{d}\overline{z}_k=\mathrm{d}h_{2k-1}-\mathrm{i}\,\mathrm{d}h_{2k}$. D'où $\mathrm{d}z_k\wedge\mathrm{d}\overline{z}_k=-2\,\mathrm{i}\,\mathrm{d}h_{2k-1}\wedge\mathrm{d}h_{2k}$ et $\omega=\frac{\mathrm{i}}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\mathrm{d}z_k\wedge\mathrm{d}\overline{z}_k$. On note $\mathrm{d}f=\partial f+\overline{\partial}f$ avec $\partial f=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\partial}{\partial z_k}f\,\mathrm{d}z_k$ et $\overline{\partial}f=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\partial}{\partial\overline{z}_k}f\,\mathrm{d}\overline{z}_k$ où $\partial_k=\frac{\partial}{\partial z_k}=\frac{1}{2}\big(\frac{\partial}{\partial h_{2k-1}}-\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial h_{2k}}\big)$ et

$\overline{\partial}_k = \frac{\partial}{\partial \overline{z}_k} = \frac{1}{2}\big(\frac{\partial}{\partial h_{2k-1}} + \mathrm{i}\frac{\partial}{\partial h_{2k}}\big)$. Soit $\theta = \sum_{k\geqslant 1} a_k\,\mathrm{d}\overline{z}_k$ de type $(0,1)$, $\partial\theta = \sum_{k\geqslant 1, j\geqslant 1}(\partial_j a_k)\,\mathrm{d}z_j \wedge \mathrm{d}\overline{z}_k$ est de type (1,1) et $\overline{\partial}\theta = \sum_{k\geqslant 1, j\geqslant 1}(\overline{\partial}_j a_k)\,\mathrm{d}\overline{z}_j \wedge \mathrm{d}\overline{z}_k$ de type (0,2).

Soit ω une 2-forme de type $(1,1)$, une primitive antiholomorphe de ω est une forme θ de type $(0,1)$, c'est à dire telle que $\theta = \sum_{k\geqslant 1} a_k\,\mathrm{d}\overline{z}_k$ et qui satisfait les conditions $\overline{\partial}a_k = 0$ (donc $\overline{\partial}\theta = 0$) et $\partial\theta =$ constante $\times\ \omega$. Par exemple, la $(0,1)$-forme $\theta = \frac{\mathrm{i}}{2}\sum_{j\geqslant 1}^{+\infty} z_j\,\mathrm{d}\overline{z}_j$ satisfait $\overline{\partial}\theta = 0$ et $\partial\theta = \omega$ avec $\omega = \frac{\mathrm{i}}{2}\sum_{k\geqslant 1}\mathrm{d}z_k \wedge \mathrm{d}\overline{z}_k$, et θ est une primitive antiholomorphe de ω. On a $\mathrm{d}\overline{z}_k(e_{2k-1}) = 1$ et $\mathrm{d}\overline{z}_k(e_{2k}) = -\mathrm{i}$. Soit $h = (h_k)_{k\geqslant 1} \in l^2$, et soit $z_k = h_{2k-1} + \mathrm{i}h_{2k}$, la forme $\theta(h) = \frac{\mathrm{i}}{2}\sum_{k\geqslant 1} z_k\,\mathrm{d}\overline{z}_k$ vérifie $\theta(h)[e_{2k-1}] = \frac{\mathrm{i}}{2}z_k$ et $\theta(h)[e_{2k}] = \frac{1}{2}z_k$.

On note $\langle v, \theta\rangle(h) = \theta(h)[v]$.

2.1. Représentation de l'algèbre de Heisenberg de dimension infinie sur un espace de fonctions holomorphes

Soit $\mathbf{R}^{2\infty}$ l'ensemble des suites réelles $h = (h_j)_{j\geqslant 1}$. On pose $z_k = h_{2k-1} + \mathrm{i}h_{2k}$ et on identifie $\mathbf{R}^{2\infty}$ avec l'ensemble $\mathbf{C}^\infty$ des suites complexes $(z_k)_{k\geqslant 1}$. Soit $v \in l^2$, on pose pour une fonction $f : \mathbf{R}^{2\infty} \to \mathbf{C}$,

$$(D_v f)(h) = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{f(h+\varepsilon v) - f(h)}{\varepsilon}.$$

On définit l'application ρ de l'algèbre H dans l'espace des fonctions f holomorphes sur $\mathbf{R}^{2\infty} = \mathbf{C}^\infty$ et à valeurs dans $\mathbf{C}$, de la manière suivante : pour $(0, v) \in H$,

$$\rho\big((0,v)\big)f = \frac{1}{2}(D_v f - \mathrm{i}D_{J(v)} f) - 2\,\mathrm{i}c\langle v, \theta\rangle f \quad \text{et} \quad \rho(\kappa) = \mathrm{i}, \tag{2.1}$$

où c est une constante. Pour $k \geqslant 1$, on vérifie que $\rho((0, e_{2k-1})) = \frac{\partial}{\partial z_k} + cz_k$ et $\rho((0, e_{2k})) = \mathrm{i}\big(\frac{\partial}{\partial z_k} - cz_k\big)$. De plus, $[\rho((0, e_{2k-1})), \rho((0, e_{2k}))] = -2c\rho(\kappa)$, tous les autres crochets sont nuls. Voir (1.1).

Soit $\pi_n : \mathbf{R}^{2\infty} \to \mathbf{R}^{2n}$ la projection sur les $2n$ premières coordonnées et $\mathcal{F}_n$ la tribu des ensembles boréliens de $\mathbf{R}^{2n}$. On note $\mathcal{B}_n = \pi_n^{-1}(\mathcal{F}_n)$ la tribu sur $\mathbf{R}^{2\infty}$, image réciproque de $\mathcal{F}_n$, voir [4, p. 6]. La suite des tribus $(\mathcal{B}_n)_{n\geqslant 1}$ est croissante et $\mathcal{B} = \lim_{n\to+\infty}\mathcal{B}_n$ est la tribu borélienne sur $\mathbf{R}^{2\infty}$, voir [4, p. 207].

DÉFINITION. – On dit qu'une mesure μ borélienne réelle sur $\mathbf{R}^{2\infty}$ est unitarisante pour l'application ρ définie par (2.1) si $\int[\rho(v)\phi]\overline{\psi}\,\mathrm{d}\mu = -\int\phi[\overline{\rho(\overline{v})\psi}]\,\mathrm{d}\mu$ pour toutes fonctions ϕ, ψ holomorphes sur $\mathbf{R}^{2\infty} = \mathbf{C}^\infty$.

La divergence d'un champ de vecteurs sur $\mathbf{R}^{2\infty}$ est définie comme au § 1. En procédant comme pour (1.3), on obtient

THÉORÈME. – *Soit μ une mesure borélienne réelle de masse finie sur $\mathbf{R}^{2\infty}$, et soit ρ la représentation définie par* (2.1)*. Alors μ est unitarisante pour ρ si et seulement si*

$$\forall k \geqslant 1, \quad \operatorname{div}_\mu\left(\frac{\partial}{\partial z_k}\right) = -c\overline{z}_k. \tag{2.2}$$

Démonstration. – On désigne par $\mu_n = \pi_n * \mu$ la mesure sur $\mathbf{R}^{2n}$ image de μ par l'application π_n. La propriété (2.2) résulte de (1.4) avec μ_n.

Le corollaire suivant relie à la représentation de Fock (*voir* [2], [6, p. 163]), la propriété de la mesure μ d'être unitarisante pour ρ. On obtient une mesure gaussienne sur $\mathbf{R}^{2\infty}$, voir [4, p. 235] et [7, p. 144].

COROLLAIRE. – *Soit μ une mesure de probabilité sur $\mathbf{R}^{2\infty}$, et soit l'application ρ définie par* (2.1) *avec $c = -\frac{1}{2t}$ et $t > 0$. La mesure μ est unitarisante pour ρ si et seulement si pour tout $n \geqslant 1$,*

$$\pi_n * \mu = \frac{1}{(2\pi t)^n}\prod_{k=1}^n \exp\left(-\frac{h_{2k-1}^2 + h_{2k}^2}{2t}\right)\mathrm{d}h_{2k-1}\,\mathrm{d}h_{2k}. \tag{2.3}$$

La condition (2.3) détermine μ de manière unique et pour toute fonction ϕ borélienne bornée sur $\mathbf{R}^{2\infty}$, on a $\int \phi \mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \int \phi\, \mathrm{d}(\pi_n * \mu)$.

On étudie comme précédemment les représentations de $H_\alpha = \mathbf{R} \bigoplus l_\alpha^2$ où l'espace l_α^2 est constitué des suites $\xi = (\xi_k)_{k\geqslant 1}$ telles que $\sum_{k\geqslant 1} \alpha_k^2(\xi_{2k-1}^2 + \xi_{2k}^2) < +\infty$ et $\alpha = (\alpha_k)_{k\geqslant 1}$ est une suite de nombres réels.

3. Une mesure de probabilité sur $\mathbf{R}^{2\infty}$ relative à l'algèbre de Virasoro

Soit $\mathcal{C} \subset \mathbf{C}^\infty$ contenant la sous-variété des $(c_1, c_2, \ldots, c_n, \ldots)$ tels que la fonction $f(z) = z + \sum_{n\geqslant 1} c_n z^{n+1}$ soit univalente dans le disque unité $|z| \leqslant 1$. Sur $\mathcal{C}$, on considère les champs de vecteurs

$$
\begin{aligned}
L_1 &= \frac{\partial}{\partial c_1} + 2c_1 \frac{\partial}{\partial c_2} + 3c_2 \frac{\partial}{\partial c_3} + \cdots + (n+1)c_n \frac{\partial}{\partial c_{n+1}} + \cdots, \\
L_{-1} &= \left(3c_2 - 2c_1^2\right) \frac{\partial}{\partial c_1} + (4c_3 - 2c_1c_2) \frac{\partial}{\partial c_2} + \cdots + \left((n+2)c_{n+1} - 2c_1c_n\right) \frac{\partial}{\partial c_n} + \cdots.
\end{aligned}
$$

On a $z^2 f'(z) = L_1[f(z)]$ et $f'(z) - 1 - 2c_1 f(z) = L_{-1}[f(z)]$. On se propose de construire une mesure borélienne μ réelle de masse totale finie sur $\mathbf{C}^\infty$ et telle que (*voir* [1])

$$\operatorname{div}_\mu (L_1 - \overline{L_{-1}}) = 0, \tag{3.1}$$

i.e., pour toute fonction différentiable g des variables $(c_1, \overline{c}_1, c_2, \overline{c}_2, \ldots, c_n, \overline{c_n}, \ldots)$,

$$\int (L_1 - \overline{L_{-1}}) g\, \mathrm{d}\mu = 0. \tag{3.2}$$

La connaissance d'une mesure satifaisant (3.1) permet d'en obtenir une infinité d'autres avec la même propriété (3.1). Par exemple, soit $\widetilde{\mu} = h(c_1, c_2, \ldots, c_n, \ldots)\mu$ une mesure sur $\mathbf{C}^\infty$ et absolument continue par rapport à μ et supposons que

$$(L_1 - \overline{L}_{-1})h = 0 \tag{3.3}$$

alors $\widetilde{\mu}$ satisfait (3.1). Soit les polynômes de Neretin $(\mathcal{P}_n)_{n\geqslant 0}$, avec $\mathcal{P}_0 = \mathcal{P}_1 = 0$. Ils satisfont $L_1[\mathcal{P}_n] = (n+1)\mathcal{P}_{n-1}$ et $L_{-1}[\mathcal{P}_n] = (n-1)\mathcal{P}_{n+1}$ (*voir* [1]), et on vérifie que la fonction $h(c_1, c_2, \ldots, c_n, \ldots) = \sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{n^3 - n} \mathcal{P}_n \overline{\mathcal{P}_n}$ est une solution de (3.3).

On définit $L_1^p = \frac{\partial}{\partial c_1} + 2c_1 \frac{\partial}{\partial c_2} + 3c_2 \frac{\partial}{\partial c_3} + \cdots + pc_{p-1} \frac{\partial}{\partial c_p}$ et

$$L_{-1}^p = \left(3c_2 - 2c_1^2\right) \frac{\partial}{\partial c_1} + (4c_3 - 2c_1c_2) \frac{\partial}{\partial c_2} + \left((p+1)c_p - 2c_1c_{p-1}\right) \frac{\partial}{\partial c_{p-1}} - 2c_1c_p \frac{\partial}{\partial c_p}.$$

Si g dépend seulement des p premières variables $c_1, c_2, \ldots, c_p$ et de leurs conjuguées, alors $L_{-1}(g)$ *dépend aussi de* c_{p+1}. On a $L_{-1}(g) = L_{-1}^{p+1}(g)$.

LEMME 1. – *Soit μ une mesure borélienne finie sur $\mathbf{C}^\infty$ et π_p la projection de $\mathbf{C}^\infty$ sur l'ensemble des p premières coordonnées $(c_1, \overline{c}_1, c_2, \overline{c}_2, \ldots, c_p, \overline{c}_p)$. Soit $\mu_p = (\pi_p) * \mu$, image de μ par π_p. On suppose que $\operatorname{div}_{\mu_p}(L_1^p - \overline{L_{-1}^p}) = 0$ pour tout $p \geqslant 1$, i.e., pour toute fonction borélienne g qui dépend des p variables $c_1, c_2, \ldots, c_p$ et de leurs conjuguées, on a*

$$\int \left(L_1^p - \overline{L_{-1}^p}\right) g\, \mathrm{d}\mu_p = 0 \tag{3.4}$$

alors la condition (3.1) *est satisfaite pour la mesure μ.*

Démonstration. – On vérifie (3.1) pour les fonctions g qui dépendent d'un nombre fini de variables. Si g dépend seulement des p variables $c_1, c_2, \ldots, c_p$ et de leurs conjuguées, alors $\int (L_1 - \overline{L_{-1}}) g\, \mathrm{d}\mu = \int (L_1^{p+1} - \overline{L_{-1}^{p+1}}) g\, \mathrm{d}\mu_{p+1} = 0$.

LEMME 2. – *On suppose que la mesure μ_p est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbf{R}^{2p}$ et que la densité $k_p(c_1, \overline{c}_1, c_2, \overline{c}_2, \ldots, c_p, \overline{c}_p)$ est une fonction à valeurs réelles. La condition* (3.4) *sur μ_p implique que la densité k_p est solution de l'équation aux dérivées partielles*

$$\left(L_1^p - \overline{L_{-1}^p}\right)k_p = -2(p+1)\overline{c_1}k_p. \tag{3.5}$$

On définit la fonction u_p par

$$u_p(c_1, \overline{c_1}, c_2, \overline{c_2}, \ldots, c_p, \overline{c_p}) = \frac{\pi^p}{(p+1)!p!}\left(1 + 2c_1\overline{c_1} + 3c_2\overline{c_2} + \cdots + (p+1)c_p\overline{c_p}\right)^{p+1} \tag{3.6}$$

alors $k_p = 1/u_p$ est une solution de (3.5) *et $\nu_p = \frac{1}{u_p}\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}y_1\,\mathrm{d}x_2\,\mathrm{d}y_2\cdots\mathrm{d}x_p\,\mathrm{d}y_p$ est une mesure de probabilité sur $\mathbf{R}^{2p}$.*

Démonstration. – On intègre par parties $\int[(L_1^p - \overline{L_{-1}^p})\phi]k_p\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}y_1\,\mathrm{d}x_2\,\mathrm{d}y_2\cdots\mathrm{d}x_p\,\mathrm{d}y_p$, d'où (3.5). Pour $p = 1$, on pose $c_1 = z = x + \mathrm{i}y$. De (3.5), on déduit que la fonction à valeurs réelles $k(z, \overline{z})$ est solution de

$$\left(\frac{\partial}{\partial z} + 2\overline{z}^2\frac{\partial}{\partial\overline{z}}\right)\left[k(z, \overline{z})\right] = -4\,\overline{z}\,k(z, \overline{z}). \tag{3.7}$$

La fonction $k(z, \overline{z}) = \frac{2}{\pi}\,\frac{1}{(1+2z\overline{z})^2}$ est solution de (3.7) et $k(z, \overline{z})\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ est une mesure de probabilité sur $\mathbf{R}^2$. Dans le cas $p = 2$, la relation (3.5) s'écrit

$$\left[\frac{\partial}{\partial c_1} - \left(3\overline{c_2} - 2\overline{c_1}^2\right)\frac{\partial}{\partial\overline{c_1}}\right]k + \left[2c_1\frac{\partial}{\partial c_2} + 2\overline{c_1}\,\overline{c_2}\frac{\partial}{\partial\overline{c_2}}\right]k = -6\,\overline{c_1}\,k. \tag{3.8}$$

Une solution de (3.8) est $k = \frac{12}{\pi^2}\cdot\frac{1}{(1+2c_1\overline{c_1}+3c_2\overline{c_2})^3}$. Soit $c_1 = x_1 + \mathrm{i}y_1$ et $c_2 = x_2 + \mathrm{i}y_2$, alors

$$\frac{6}{\pi}\int_{\mathbf{R}^2}\frac{1}{(1 + 2c_1\overline{c_1} + 3c_2\overline{c_2})^3}\,\mathrm{d}x_2\,\mathrm{d}y_2 = \frac{1}{(1 + 2c_1\overline{c_1})^2} \tag{3.9}$$

et $\frac{2}{\pi}\cdot\frac{6}{\pi}\frac{1}{(1+2c_1\overline{c_1}+3c_2\overline{c_2})^3}\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}y_1\,\mathrm{d}x_2\,\mathrm{d}y_2$ est une mesure de probabilité sur $\mathbf{R}^4$. Dans le cas général, on pose $t = 1 + 2c_1\overline{c_1} + 3c_2\overline{c_2} + \cdots + (p+1)c_p\overline{c_p}$ et on cherche une solution de (3.5) sous la forme $v(t)$ où $v(t)$ est une fonction de la variable t. On voit que $v(t)$ satisfait $\frac{v'(t)}{v(t)} = -\frac{p+1}{t}$. Cela donne la solution (3.6).

THÉORÈME. – *Pour tout $p \geqslant 1$, soit ν_p la mesure sur $\mathbf{R}^{2p}$ définie par* (3.6). *Alors il existe une mesure de probabilité ν sur $\mathbf{R}^{2\infty}$ telle que $\pi_p * \nu = \nu_p$. La mesure ν vérifie* (3.1).

Démonstration. – Sur $\mathbf{R}^{2\infty} = \mathbf{C}^\infty$, comme au § 2, soit $\mathcal{B}_p = \pi_p^{-1}(\mathcal{F}_p)$, la sous-tribu borélienne engendrée par les p premières coordonnées $(c_1, \overline{c_1}, \ldots, c_p, \overline{c_p})$ et soient les mesures $(\nu_p)_{p\geqslant 1}$ définies par (3.6). Pour $s \geqslant p$, on a $(\pi_p) * \nu_s = \nu_p$. En effet comme avec (3.9), on obtient $\int k_p\phi\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}y_1\cdots\mathrm{d}x_p\,\mathrm{d}y_p = \int k_s\phi\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}y_1\cdots\mathrm{d}x_s\,\mathrm{d}y_s$ pour toute fonction borélienne ϕ des p variables $(c_1, c_2, \ldots, c_p)$ et de leurs conjuguées. On en déduit (*voir* [7, Chap. V]), l'existence d'une mesure de probabilité unique ν sur $\mathbf{R}^{2\infty}$ vérifiant $(\pi_n) * \nu = \nu_n$ et pour toute fonction ϕ borélienne bornée sur $\mathbf{R}^{2\infty}$, $\int\phi\,\mathrm{d}\nu = \lim_{n\to\infty}\int\phi\,\mathrm{d}\nu_n$. La mesure ν satisfait (3.1) par le Lemme 1.

Références bibliographiques

[1] H. Airault, P. Malliavin, Unitarizing probability measures for representations of Virasoro algebra, J. Math. Pures Appl. 80 (6) (2001) 627–667.

[2] V. Bargmann, On a Hilbert space of analytic functions and an associated integral transform, Comm. Pure Appl. Math. XIV (1961) 187–214.

[3] A.A. Kirillov, Introduction to the Theory of Representations and Noncommutative Harmonic Analysis, in: A.A. Kirillov (Ed.), Representation Theory and Noncommutative Harmonic Analysis I, Encyclopedia of Mathematics, Springer-Verlag, p. 125.

[4] P. Malliavin, H. Airault, L. Kay, G. Letac, Integration and probability, in: Gaussian Sobolev Spaces and Stochastic Calculus of Variations, Graduate Texts in Math., Vol. 157, Springer-Verlag, Chapitre V, pp. 235–237.

[5] Yu.A. Neretin, II. Representations of Virasoro and Affine Lie Algebras, in: A.A. Kirillov (Ed.), Representation Theory and Noncommutative Harmonic Analysis I, Encyclopedia of Mathematics, Springer-Verlag, p. 177.

[6] Yu.A. Neretin, Categories of Symmetries and Infinite-Dimensional Groups, London Math. Soc. Monographs (NS), Vol. 16, Clarendon Press, Oxford, 1996.

[7] K.R. Parthasarathy, Probability Measures on Metric Spaces, Academic Press, New York, 1967.

[8] J. Von Neumann, Die Eindeutigkeit der Schrodingerschen Operatoren, Math. Ann. 104 (1931) 570–578.