C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 334 (2002) 705–708

Statistique/*Statistics*
(Probabilités/*Probability Theory*)

Sur les oscillations du processus de Poisson composé

Myriam Maumy

LSTA, Université Paris VI, boîte Courrier 158, 8e étage, Plateau A, 175, rue du Chevaleret, 75013 Paris, France

Reçu le 2 janvier 2002 ; accepté le 17 janvier 2002

Note présentée par Paul Deheuvels.

Résumé Dans cette Note, nous établissons des lois limites décrivant le comportement local du processus de Poisson composé construit à partir d'un processus de Poisson et d'une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées. Ces résultats sont motivés par leurs applications naturelles à la théorie des processus empiriques. ***Pour citer cet article : M. Maumy, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 334 (2002) 705–708.*** © 2002 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

On the oscillations of compound empirical processes

Abstract In this paper, we describe the local behaviour of compound Poisson processes based on a Poisson process and a sequence of independent and identically distributed random weights. These results are motived by their natural counterparts in the theory of empirical processes. ***To cite this article: M. Maumy, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 334 (2002) 705–708.*** © 2002 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

1. Introduction

De nombreux problèmes statistiques font intervenir des processus empiriques composés. A titre d'exemple, les diverses formes de bootstrap à poids (Mason et Newton [5]) obéissent à ce modèle, ainsi que certaines formes d'estimation non paramétrique de la régression (Einmahl et Mason [4]). Dans la perspective d'une étude systématique de ce modèle nous présentons ci-dessous les résultats de base permettant d'en décrire les oscillations. Dans cette note, nous étudions les propriétés d'oscillations locales du processus de Poisson composé. Ce dernier est explicitement défini au paragraphe 1.1 ci-dessous. Dans le paragraphe 1.2 nous rappelons des résultats classiques utilisés par la suite. Nos résultats sont regroupés au paragraphe 2 et leurs démonstrations se trouvent dans le paragraphe 3.

1.1. Notations

Soit $\{Y_i : i \geqslant 1\}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi que la variable aléatoire Y_1. Soit $\{N(t) : t \geqslant 0\}$ un processus de Poisson homogène continu à droite de paramètre $\lambda > 0$. Le processus de Poisson $\{N(t) : t \geqslant 0\}$ et la suite de variables aléatoires $\{Y_i : i \geqslant 1\}$ sont supposés indépendants. Pour

Adresse e-mail : maumy@ccr.jussieu.fr (M. Maumy).

S1631-073X(02)02293-8/FLA

tout réel $t \geqslant 0$, on définit le processus de Poisson composé $N_c(t)$ et sa version centrée $N_c'(t)$ par :

$$N_c(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} Y_i \quad \text{et} \quad N_c'(t) = N_c(t) - \mathbb{E}\big[N_c(t)\big], \tag{1.1}$$

ici et par la suite, la lettre « c » est utilisée pour « composé ». On notons également $\Pi(t)$ le processus de Poisson homogène continu à droite de paramètre $\lambda = 1$. Pour tout $n \geqslant 1$ et pour tout réel $t \geqslant 0$, posons

$$\Pi_n(t) = \Pi(nt), \tag{1.2}$$

et pour tout réel $b > 0$ fixé, posons

$$\Pi_{n,c}(b) = \sum_{i=1}^{\Pi_n(b)} Y_i \quad \text{et} \quad \Pi_{n,c}'(b) = \Pi_{n,c}(b) - \mathbb{E}\big[\Pi_{n,c}(b)\big]. \tag{1.3}$$

1.2. Résultats classiques sur le processus de Poisson composé

THÉORÈME 1.1. – *Un processus de Poisson composé $\{N_c(t) : t \geqslant 0\}$ a des accroissements indépendants et stationnaires, et a pour fonction caractéristique, pour tout réel $t \geqslant 0$,*

$$\varphi_{N_c(t)}(u) = \exp\big(-\lambda t\big(1 - \varphi_Y(u)\big)\big), \quad -\infty < u < +\infty, \tag{1.4}$$

où $\varphi_Y(u) = \mathbb{E}[\exp(\mathrm{i}uY)]$ est la fonction caractéristique des variables aléatoires $\{Y_i : i \geqslant 1\}$ indépendantes et identiquement distribuées, et $\lambda > 0$ représente le paramètre du processus de Poisson $\{N(t) : t \geqslant 0\}$. Si $\mathbb{E}[Y^2] < \infty$, alors $N_c(t)$ a des moments d'ordre deux, donnés par

$$\mathbb{E}\big[N_c(t)\big] = \lambda t \mathbb{E}[Y], \quad \mathrm{Var}\big[N_c(t)\big] = \lambda t \mathbb{E}\big[Y^2\big] \text{ pour } t \geqslant 0. \tag{1.5}$$

Démonstration. – Voir par exemple Parzen [6]. □

THÉORÈME 1.2. – *Le processus de Poisson composé $\{N_c'(t) : t \geqslant 0\}$ est une martingale.*

Démonstration. – Introduisons la σ-algèbre $\mathcal{A}_s$ définie par : $\mathcal{A}_s = \sigma\{N_c(u) : u \leqslant s\}$. La démonstration s'appuie sur le fait que $\{N_c'(t) : t \geqslant 0\}$ est centré, ses accroissements sont indépendants et que pour tous réels s et t tels que $0 \leqslant s \leqslant t$ on a : $N_c'(t) = N_c(t) - N_c(s) + N_c(s) - \lambda s \mathbb{E}[Y] + \lambda s \mathbb{E}[Y] - \lambda t \mathbb{E}[Y]$. □

2. Inégalités exponentielles et comportement limite des oscillations du processus de Poisson composé

Nous introduisons la fonction ψ définie sur $[-1, +\infty)$ à valeurs dans $(0, 2]$ telle que

$$\psi(\zeta) = \frac{2}{\zeta^2} \int_0^\zeta \log(1+x)\,\mathrm{d}x = \frac{2[(1+\zeta)\log(1+\zeta) - \zeta]}{\zeta^2} \quad \text{si } \zeta \neq 0,\ \psi(0) = 1 \text{ et } \psi(\zeta) = \infty \text{ pour } \zeta < 0.$$

On note (*voir* [7], p. 441, ou encore la Proposition 1.1, p. 242 dans [2]) que

$$\psi(\zeta) \text{ est décroissante pour } \zeta \geqslant -1, \tag{2.1}$$

$$\psi(\zeta) \sim \frac{2\log\zeta}{\zeta} \quad \text{lorsque } \zeta \to \infty, \tag{2.2}$$

$$\psi(\zeta) \geqslant 1 - \delta \quad \text{si } 0 \leqslant \zeta \leqslant 3\delta \text{ et } 0 \leqslant \delta \leqslant 1. \tag{2.3}$$

Soit l'hypothèse (H) suivante : les variables aléatoires Y_i sont telles que $\mathbb{E}[Y_i] = 1$ et $\mathrm{Var}[Y_i] = \sigma^2$ et verifient $|Y_i - \mathbb{E}[Y_i]| \leqslant B$ pour tout $i = 1, \ldots, n$. Dans un premier temps, nous donnons une inégalité de type Bennett (*voir* [1]).

THÉORÈME 2.1. – *Sous l'hypothèse* (H), *pour tout $n \geqslant 1$, pour tout réel $\lambda > 0$ et pour tout réel $b > 0$, nous avons*

$$\mathbb{P}\big[\pm\big(\Pi_{n,c}(b) - nb\big) \geqslant \lambda\sqrt{\big(\sigma^2+1\big)nb}\big] < \exp\left(-\frac{1}{2}\lambda^2\psi\left(\frac{\pm B\lambda}{\sqrt{(\sigma^2+1)nb}}\right)\right) \tag{2.4}$$

et

$$\mathbb{P}\big[\big|\Pi_{n,c}(b)-nb\big|\geqslant\lambda\sqrt{(\sigma^2+1)nb}\big]\leqslant 2\exp\left(-\frac{1}{2}\lambda^2\psi\left(\frac{B\lambda}{\sqrt{(\sigma^2+1)nb}}\right)\right). \tag{2.5}$$

Le Théorème 2.1 nous permet d'établir l'inégalité exponentielle suivante.

INÉGALITÉ 2.1. – *Sous l'hypothèse* (H), *pour tout* $n\geqslant 1$, *pour tout réel* $\lambda>0$, *nous avons*

$$\mathbb{P}\Big(\sup_{0\leqslant t\leqslant b}\pm\big(\Pi_{n,c}(t)-nt\big)\geqslant\lambda\sqrt{(\sigma^2+1)nb}\Big)\leqslant\exp\left(-\frac{1}{2}\lambda^2\psi\left(\frac{\pm B\lambda}{\sqrt{(\sigma^2+1)nb}}\right)\right). \tag{2.6}$$

Notons que le membre de droite de (2.6) est nul dans le cas négatif lorsque $\lambda\geqslant\sqrt{nb}$.

Introduisons maintenant le module d'oscillations du processus de Poisson composé centré $\Pi'_{n,c}$ défini, pour tout $n\geqslant 1$, et tout $0<a<1$, par

$$w_{n,c}(a)=\sup_{0\leqslant t-u\leqslant a}\big|\Pi'_{n,c}(t)-\Pi'_{n,c}(u)\big|.$$

Dans le résultat qui suit, nous établissons une inégalité exponentielle pour $w_{n,c}$.

INÉGALITÉ 2.2. – *Soient* a,δ *des réels tels que* $0<a\leqslant\delta\leqslant\frac{1}{2}$. *Alors pour tout entier* $n\geqslant 1$ *et pour tout réel* $\lambda>0$, *on a*

$$\mathbb{P}\big(w_{n,c}(a)\geqslant\lambda\sqrt{na}\big)\leqslant\frac{20}{a\delta^3}\exp\left(-\frac{1}{2}\lambda^2\frac{(1-\delta)^3}{(\sigma^2+1)}\psi\left(\frac{B\lambda}{(\sigma^2+1)\sqrt{na}}\right)\right). \tag{2.7}$$

Remarque. – Mason, Shorack, Wellner ont montré une version de cette inégalité dans le cas du processus empirique uniforme (*voir* [7], p. 545).

L'inégalité qui va suivre est une application directe de la borne exponentielle ci-dessus.

INÉGALITÉ 2.3. – *Soit* $r>0$. *Soient deux suites réelles* $(a_n)_{n\geqslant 1}$ *et* $(\lambda_n)_{n\geqslant 1}$ *telles que* $0<a_n<1$ *et* $\lambda_n>0$ *vérifiant les conditions suivantes*

$$\begin{aligned}&\text{(i) } a_n\downarrow 0 \quad \textit{et} \quad \lambda_n\uparrow, &&\text{(ii) } na_n\uparrow,\\ &\text{(iii) } \lambda_n/(\sigma^2+1)\sqrt{na_n}\leqslant d, &&\text{(iv) } \lambda_n\geqslant\sqrt{2(\sigma^2+1)\log(1/a_n)},\end{aligned} \tag{2.8}$$

avec $0<d<\infty$. *Pour* $\theta>0$, *considérons la suite* $n_k=\lfloor(1+\theta)^k\rfloor$. *Alors, pour tout* $\varepsilon>0$ *et* $\theta>0$ *suffisamment petit, nous avons à partir d'un certain rang* $k\geqslant k_0$

$$\mathbb{P}\left(\sup_{n_{k-1}\leqslant m\leqslant n_k}\frac{w_{m,c}(a_m)}{\lambda_m\sqrt{m\,a_m}}>r+2\varepsilon\right)\leqslant 2\mathbb{P}\left(\frac{w_{n_{k+1},c}((1+\theta)a_{n_k})}{\sqrt{n_{k+1}a_{n_k}(1+\theta)}}\geqslant\frac{r+\varepsilon}{\sqrt{(1+\theta)}}\lambda_{n_{k-1}}\right). \tag{2.9}$$

Remarque. – Une version de cette inégalité a déjà été démontrée pour un processus de Poisson centré (*voir* [7], p. 572).

Afin d'énoncer le résultat principal de cette note, nous introduisons une suite $(a_n)_{n\geqslant 1}$ vérifiant les conditions de croissance et de régularité suivantes

(A) (i) $a_n\downarrow 0$ et (ii) $na_n\uparrow$, (iii) $\log(1/a_n)/\log_2 n\to\infty$, (iv) $\log(1/a_n)/na_n\to 0$.

THÉORÈME 2.2. – *Sous les hypothèses* (H) *et* (A), *nous avons*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{w_{n,c}(a_n)}{\sqrt{2n\,a_n(\sigma^2+1)\log(1/a_n)}}=1 \quad \textit{p.s.} \tag{2.10}$$

3. Démonstrations des résultats

Démonstration du Théorème 2.1. – La démonstration s'obtient en utilisant des arguments analogues à ceux de Einmahl et Ruymgaart dans [3], p. 396. Pour la seconde inégalité, on distingue deux cas : le cas positif et le cas négatif et on applique le Théorème 2.1 dans les deux cas. On peut également consulter [3]. □

Démonstration de l'inégalité (2.6). – Comme $\{\Pi_{n,c}(t) - nt : t \geqslant 0\}$ est une martingale, il ressort de la Proposition 1 de Shorack et Wellner ([7], p. 869) que $\{\exp(\pm r(\Pi_{n,c}(t) - nt)) : t \geqslant 0\}$, où r est un nombre réel, sont deux sous-martingales relativement à la σ-algèbre $\mathcal{A}_s$. Par conséquent, pour tout réel $b \geqslant 0$, et tout réel $r > 0$ on a

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\Big(\sup_{0\leqslant t\leqslant b} \pm\big(\Pi_{n,c}(t) - nt\big) \geqslant \lambda\sqrt{\big(\sigma^2+1\big)nb}\Big) \\ = \mathbb{P}\Big(\sup_{0\leqslant t\leqslant b} \exp\big(\pm r\big(\Pi_{n,c}(t) - nt\big)\big) \geqslant \exp\big(r\lambda\sqrt{\big(\sigma^2+1\big)nb}\big)\Big).\end{aligned}$$

D'après l'inégalité de Doob (*voir* l'inégalité 1, p. 870 dans [7]), on obtient

$$\mathbb{P}\Big(\sup_{0\leqslant t\leqslant b} \pm\big(\Pi_{n,c}(t) - nt\big) \geqslant \lambda\sqrt{\big(\sigma^2+1\big)nb}\Big) \leqslant \inf_{r>0} \exp\big(-r\lambda\sqrt{\big(\sigma^2+1\big)nb}\big)\mathbb{E}\big[\exp\big(\pm r\big(\Pi_{n,c}(b) - nb\big)\big)\big].$$

En procédant comme dans [7], p. 445, on obtient le résultat demandé. □

Démonstration de l'inégalité (2.7). – Nous suivons les arguments de [7], p. 545, en adaptant la démonstration au processus de Poisson composé. Nous utilisons en particulier l'inégalité (2.6), le fait que ψ est décroissante et que les accroissement du processus de Poisson composé sont indépendants et stationnaires. □

Démonstration de l'inégalité (2.9). – Nous montrons cette inégalité de la même manière que dans [7], p. 572, en adaptant la démonstration au processus de Poisson composé. Nous utilisons en particulier l'inégalité (2.7), le fait que ψ est décroissante et les conditions de régularité de la suite $(a_n)_{n\geqslant 1}$. □

Démonstration de Théorème 2.2. – Pour obtenir la borne inférieure, nous procédons comme dans [7], pp. 557–558, c'est-à-dire que nous utilisons la stationnarité et l'indépendance des accroissements du processus de Poisson composé, les conditions de régularité de $(a_n)_{n\geqslant 1}$ et l'équivalent (2.3) de la fonction ψ au voisinage de 0. Pour démontrer la borne supérieure, nous nous servons de l'inégalité (2.7) et des conditions imposées à $(a_n)_{n\geqslant 1}$, voir également [7], pp. 552–553. □

Références bibliographiques

[1] G. Bennett, Probability inequalities for the sum of independent random variables, J. Amer. Statist. Assoc. 57 (1962) 33–45.
[2] P. Deheuvels, Nonstandard strong laws for local quantile processes, J. Statist. Planning Inference 91 (2000) 239–266.
[3] J.H.J. Einmahl, F.H. Ruymgaart, Some properties of weighted compound multivariate empirical processes, Indian J. Statist. 48 (1986) 393–403.
[4] U. Einmahl, D.M. Mason, An empirical process approach to the uniform consistency of kernel-type function estimators, J. Theoret. Probab. 13 (2000) 1–37.
[5] D.M. Mason, M.A. Newton, A rank statistics approach to the consistency of a general bootstrap, Ann. Statist. 20 (1992) 1611–1624.
[6] E. Parzen, Stochastic Processes, Holden-Day, 1962.
[7] G.R. Shorack, J.A. Wellner, Empirical Processes with Applications to Statistics, Wiley, 1986.