C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 334 (2002) 405–409

Probabilités/*Probability Theory*
(Statistique/*Statistics*)

Une caractérisation des familles exponentielles naturelles quadratiques simples par une propriété de martingale inverse

David Gutierrez-Rubio [a], Fernando López-Blázquez [b], Denys Pommeret [b]

[a] Facultad de Matemáticas, Dpto. Estadística e I.O., Universidad de Sevilla, Tarfia, 41012 Sevilla, Espagne
[b] CREST (LSM), ENSAI, rue Blaise Pascal, campus de Ker Lann, 35170 Bruz, France

Reçu le 3 septembre 2001 ; accepté après révision le 14 décembre 2001

Note présentée par Paul Malliavin.

Résumé Dans cette Note, nous étendons un résultat de López-Blázquez et Salamanca-Miño [7] en obtenant une caractérisation des familles exponentielles naturelles quadratiques simples sur $\mathbb{R}^d$. Cette caractérisation repose sur une propriété de martingale inverse vérifiée par des familles de polynômes multivariés. ***Pour citer cet article : D. Gutierrez-Rubio et al., C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 334 (2002) 405–409.*** © 2002 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

A characterization of simple quadratic natural exponential families with a reverse martingale property

Abstract López-Blázquez and Salamanca-Miño [7] obtained a characterization of natural exponential families with quadratic variance functions via a reverse martingale property of certain orthogonal polynomials. We extend this result to the multidimensional case yielding a new characterization of natural exponential families with simple quadratic variance functions. ***To cite this article: D. Gutierrez-Rubio et al., C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 334 (2002) 405–409.*** © 2002 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

Abridged English version

Let (X_t) be a d-dimensional process with independent stationary increments such that, $\forall t \in T \subset \mathbb{R}^+$, the distribution of X_t belongs to a natural exponential family, say F_t. By successive derivations of the densities of the distributions in F_t we construct a basis of multivariate polynomials $(Q_{A,n,t})_{n\in\mathbb{N}^d}$ (*see* [11] for more details, and equation (2) below). In this Note we offer a characterization of natural exponential families

Adresses e-mail : davidi@cica.es (D. Gutierrez-Rubio); lopez@cica.es (F. López-Blázquez); pommeret@ensai.fr (D. Pommeret).

S1631-073X(02)02244-6/FLA

with simple quadratic variance functions (*see* [2] for a detailed exposition), extending a recent univariate result in [7].

THEOREM 1. – *Denote by* $\widetilde{Q}_{A,n,t} = Q_{A,n,t}/\|Q_{A,n,t}\|^2$ *the normalized polynomials defined in* (2) *and assume that* $A^{-1}V_{F_1}(m_1)\ {}^tA^{-1}$ *is diagonal. Then the families* $(F_t)_{t\in T}$ *have simple quadratic variance functions if and only if the process* $(\widetilde{Q}_{A,n,t}(X_t,m_t))_{t\in T}$ *is a reverse martingale, i.e.,* $\forall s<t$,

$$\mathbb{E}\big(\widetilde{Q}_{A,n,t}(X_t,m_t)|X_s\big) = \widetilde{Q}_{A,n,s}(X_s,m_s).$$

Remark. – The characterization of all quadratic natural exponential families (including the well-known Wishart family) uses a "pseudo"-reverse martingale property with the following form:

$$\mathbb{E}\big(Q_{A,n,t}(X_t,m_t)|X_s\big) = \sum_{\Sigma k_i=\Sigma n_i} \alpha_k Q_{A,k,s}(X_s,m_s).$$

This result is in preparation.

1. Introduction

Il existe différentes caractérisations des *familles exponentielles naturelles* (FEN) quadratiques sur $\mathbb{R}$ (*voir* [6] pour un développement récent sur ce sujet). En particulier, Feinsilver [4] a montré que les FEN quadratiques sont caractérisées par l'orthogonalité de certains polynômes $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (nous renvoyons le lecteur à [8] et [9] pour des applications statistiques liées à ces polynômes). Shanbhag [12] a proposé une autre caractérisation basée sur la diagonalité des matrices de Bhattacharyya associées aux FEN. Plus récemment, López-Blázquez et Salamanca-Miño [7] ont obtenu une caractérisation des FEN quadratiques sur $\mathbb{R}$ en utilisant une propriété de martingale inverse des précédents polynômes $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Dans cette Note, nous proposons une extension multidimensionnelle de ce résultat en étudiant uniquement la caractérisation des FEN quadratiques simples. Rappelons qu'une FEN sur $\mathbb{R}^d$, notée $F=\{P(m,F);\ m\in M_F\}$, où chaque $P(m,F)$ est une probabilité de moyenne m, est dite quadratique simple si la matrice de variance covariance $V_F(m)$ de $P(m,F)$ peut s'écrire

$$V_F(m) = am\otimes m + B(m) + C, \tag{1}$$

où $a\in\mathbb{R}$, $B:\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}^d$ est linéaire, et où C appartient au groupe des matrices $d\times d$ définies positives, noté $\mathrm{GL}(\mathbb{R}^d)$ (nous renvoyons également à [1] et [3] pour les propriétés des FEN).

Pour toute probabilité dans une FEN sur $\mathbb{R}^d$, Pommeret [10] a associé une base de polynômes multidimensionnels. Nous rappelons brièvement cette construction au paragraphe 2, ainsi que quelques propriétés importantes, et nous en déduisons une nouvelle caractérisation des FEN quadratiques simples au paragraphe 3.

2. Polynômes associés aux FEN sur $\mathbb{R}^d$

Soit μ une mesure de probabilités sur $\mathbb{R}^d$ qui engendre une FEN, notée $F=F(\mu)$. On note k_μ le logarithme de la transformée de Laplace de μ. Soit $(X_t)_{t\in T}$ un processus à accroissement indépendants et stationnaires, avec T sous-ensemble de $\mathbb{R}^+$ ayant au moins deux éléments distincts non nuls. On note $\mu_1=\mu$ la loi de X_1, μ_t la loi de X_t $(t\in T)$, et $F_t=F(\mu_t)$ la FEN engendrée par μ_t. On voit immédiatement (*voir* par exemple [5] pour de nombreuses extensions) que chaque X_t suit une loi $\mu_t=\mu^{*t}$, la convolée t-ième de μ, et ainsi $k_{\mu_t}=tk_\mu$. On peut remarquer également que le processus $(Y_t)_{t\in T}$ défini par $Y_t=\exp(\theta X_t - tk_\mu(\theta))$, est une martingale. Schoutens et Teugels [13] obtiennent une autre propriété de martingale en considérant une base de polynômes associés aux mesures μ_t. Nous rappelons une version multidimensionnelle de ce résultat ici (vois également [11]). Pour cela, remarquons que si m_1 est la moyenne de μ_1 alors la moyenne de μ_t est $m_t = tm_1$. On note $f_{\mu_t}(x, m)$ la densité de $P(m, F_t)$ par rapport à μ_t. La base canonique de $\mathbb{R}^d$ est notée $(e_1, \ldots, e_d)$. Pour chaque valeur de $t \in T$ on peut construire une base de polynômes en dérivant f_{μ_t} de la manière suivante. Pour $A \in \mathrm{GL}(\mathbb{R}^d)$, $n = (n_1, \ldots, n_d) \in \mathbb{N}^d$, $x \in \mathbb{R}^d$, on pose

$$Q_{A,n,t}(x, m) = t^{|n|} \frac{D_A^n(f_{\mu_t})(x, m)}{f_{\mu_t}(x, m)}, \tag{2}$$

où $|n| = n_1 + \cdots + n_d$, et où $D_A^n(f_{\mu_t})$ est la dérivée d'ordre $|n|$ de $m \to f_{\mu_t}(x, m)$ dans les $|n|$ directions Ae_1 (n_1 fois), $\ldots$, Ae_d (n_d fois). Les polynômes $(Q_{A,n,t})_{n\in\mathbb{N}^d}$ forment alors une base de $\mathbb{R}[X_1, \ldots, X_d]$, ceci quelque soit la matrice $A \in \mathrm{GL}(\mathbb{R}^d)$. On a alors le résultat suivant qui généralise [13] :

LEMME 1. – *Avec les notations précédentes on a la propriété de martingale suivante* : $\forall A \in \mathrm{GL}(\mathbb{R}^d)$, $\forall n \in \mathbb{N}^d$, $\forall s < t$:

$$\mathbb{E}\big(Q_{A,n,t}(X_t, m_t)|X_s\big) = Q_{A,n,s}(X_s, m_s).$$

Pour finir, rappelons également (*voir* [10]) que lorsque $A^{-1}V_{F_1}(m_1)\ {}^tA^{-1}$ est diagonale, alors les FEN $(F_t)_{t\in T}$ sont quadratiques simples si et seulement si les polynômes $Q_{A,n,t}$ sont μ_t orthogonaux.

3. Une propriété de martingale inverse

Sur $\mathbb{R}$, López-Blázquez et Salamanca-Miño [7] ont montré que les FEN $(F_t)_{t\in T}$ sont quadratiques si et seulement si le processus (normalisé) $(\widetilde{Q}_{n,t}(X_t, m_t))_{t\in T}$ est une martingale inverse, avec $\widetilde{Q}_{n,t} = Q_{n,t}/\|Q_{n,t}\|^2$. Nous généralisons ce résultat au cas des FEN quadratiques simples. Le cas plus général des FEN quadratiques (dont fait partie la FEN des lois de Wishart par exemple) sera étudié dans un article plus détaillé.

THÉORÈME 1. – *Soit $(F_t)_{t\in T}$ les FEN engendrées par les mesure de probabilité μ_t sur $\mathbb{R}^d$, et soit $(Q_{A,n,t})_{n\in\mathbb{N}^d}$ les polynômes associés en* (2). *Soit $A \in \mathrm{GL}(\mathbb{R}^d)$ telle que $A^{-1}V_{F_1}(m_1)\ {}^tA^{-1}$ soit diagonale. Alors les deux propriétés suivantes sont équivalentes* :

(i) $\forall n \in \mathbb{N}^d$, $\forall s < t$, *il existe des réels $(\alpha_{A,n,s,t})$ tels que*

$$\mathbb{E}\big(Q_{A,n,s}(X_s, m_s)|X_t\big) = \alpha_{A,n,s,t}Q_{A,n,t}(X_t, m_t). \tag{3}$$

(ii) *Les familles F_t sont quadratiques simples, $\forall t \in T$.*

Dans ce cas, en notant $\|Q_{A,n,t}\|^2 = \mathbb{E}(Q^2_{A,n,t}(X_t, m_t))$, on a

$$\alpha_{A,n,s,t} = \frac{\|Q_{A,n,s}\|^2}{\|Q_{A,n,t}\|^2}.$$

Remarque. – La propriété (i) est bien une propriété de martingale inverse pour le processus normalisé $Q_{A,n,t}(X_t, m_t)/\|Q_{A,n,t}\|^2$.

Démonstration. – Pour simplifier la démonstration, nous commençons par un lemme qui découle de la linéarité de l'opérateur de dérivation.

LEMME 2. – *Les deux propriétés suivantes sont équivalentes* :

(i) *Il existe $A \in \mathrm{GL}(\mathbb{R}^d)$ telle que* (3) *soit vérifiée.*

(ii) *Pour tout $A \in \mathrm{GL}(\mathbb{R}^d)$,* (3) *est vérifiée.*

Ainsi, nous pouvons nous placer dans le cas $A = I$, l'identité, et nous noterons $Q_{n,t}$ pour $Q_{A,n,t}$.

Supposons que les FEN $(F_t)_{t\in T}$ sont quadratiques simples et utilisons la propriété de martingale des polynômes $Q_{n,t}$ (lemme 1), ainsi que leur orthogonalité par rapport à μ_t. On a $\forall n, r \in \mathbb{N}^d$, $\forall s < t \in T$,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\big\{Q_{n,t}(X_t,m_t)Q_{r,s}(X_s,m_s)\big\} &= \mathbb{E}\big\{Q_{n,s}(X_s,m_s)Q_{r,s}(X_s,m_s)\big\} = \delta_{nr}\|Q_{n,s}\|^2\\ &= \mathbb{E}\big\{Q_{n,t}(X_t,m_t)\mathbb{E}\big(Q_{r,s}(X_s,m_s)|X_t\big)\big\}.\end{aligned}$$

Notons $f_{r,s,t}(X_t)=\mathbb{E}(Q_{r,s}(X_s,m_s)|X_t)$. On voit que $f_{r,s,t}\in L^2(\mu_t)$ et que l'on peut développer cette fonction dans la base μ_t-orthogonale $(Q_{k,t})_{k\in\mathbb{N}^d}$, soit :

$$f_{r,s,t}(X_t)=\sum_{k\in\mathbb{N}^d}\alpha_{k,r,s,t}Q_{k,t}(X_t).$$

Ainsi

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\big\{Q_{n,t}(X_t,m_t)\mathbb{E}\big(Q_{r,s}(X_s,m_s)|X_t\big)\big\} &= \mathbb{E}\big\{Q_{n,t}(X_t,m_t)f_{r,s,t}(X_t)\big\}\\ &= \sum_{k\in\mathbb{N}^d}\alpha_{k,r,s,t}\mathbb{E}\big\{Q_{n,t}(X_t,m_t)Q_{k,t}(X_t,m_t)\big\}\\ &= \alpha_{n,r,s,t}\mathbb{E}\big(Q^2_{n,t}(X_t,m_t)\big)\\ &= \delta_{nr}\|Q_{n,s}\|^2.\end{aligned}$$

Cette égalité est vrai $\forall n,r$ et $s<t$. On en déduit alors que

$$f_{r,s,t}(X_t)=\frac{\|Q_{r,s}\|^2}{\|Q_{r,t}\|^2}Q_{r,t}(X_t),$$

ce qui est la relation de martingale inverse cherchée.

Réciproquement, montrons maintenant que la propriété de martingale inverse entraîne la propriété « quadratique simple » des FEN $(F_t)_{t\in T}$. Pour cela, utilisons à la fois la propriétés de martingale (toujours vraie) et celle de martingale inverse (supposée). Il vient $\forall s<t$, $\forall n,r\in\mathbb{N}^d$,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\big\{Q_{n,t}(X_t,m_t)Q_{r,s}(X_s,m_s)\big\} &= \mathbb{E}\big\{Q_{n,s}(X_s,m_s)Q_{r,s}(X_s,m_s)\big\} &(4)\\ &= \alpha_{r,s,t}\mathbb{E}\big\{Q_{n,t}(X_t,m_t)Q_{r,t}(X_t,m_t)\big\}. &(5)\end{aligned}$$

D'après (4), la quantité (5) ne doit pas dépendre de t. De plus, on voit facilement que $\alpha_{r,s,t}=\|Q_{r,s}\|^2/\|Q_{r,t}\|^2$. Ainsi, en réécrivant (5) pour $r=e_i+e_j$, $|n|=2$, et $n\neq r$, on trouve (après quelques calculs techniques) que la quantité suivante ne doit pas dépendre de t :

$$\|Q_{r,s}\|^2\frac{D^n_I(V_{ij})(m_1)}{tD^r_I(V_{ij})(m_1)+2t}, \tag{6}$$

où V_{ij} représente l'élément (i,j) de la matrice de variance covariance V_{F_1}. Il est clair que (6) est indépendant de t seulement si $D^n_I(V_{ij})=0$, ceci pour $|n|=2$ et $n\neq e_i+e_j$, ce qui signifie que les éléments $V_{ij}(m)$ ne sont pas de degré supérieur à deux en m, sauf éventuellement en m_i et m_j. Un raisonnement identique, mais cette fois-ci quelque soit $|n|=3$ et $r=e_i+e_j$, nous amène à nouveau à l'égalité $D^n_I(V_{ij})=0$, ce qui signifie que les éléments $V_{ij}(m)$ sont des polynômes de degré au plus deux en m. La FEN F_1 est donc quadratique et vérifie $\forall i,j=1,\ldots,d$,

$$V_{ij}(m)=a_{ij}m_im_j+\sum_{l=1}^{d}b^l_{ij}m_l+c_{ij}. \tag{7}$$

On peut alors conclure la démonstration grâce au lemme suivant :

LEMME 3. – *Soit F une FEN quadratique de fonction variance de la forme* (7). *S'il existe $m_0\in F$ tel que $V_F(m_0)$ soit diagonale, alors F est quadratique simple.*

Démonstration du lemme. – Soit X de loi $P(m,F) \in F$ et notons $M_k = \mathbb{E}(X^k)$, pour $k \in \mathbb{N}^d$. En utilisant la relation (7) on montre facilement qu'il existe $\rho_k \in \mathbb{R}$ tel que

$$M_k = \rho_k m^k + R_k(m), \tag{8}$$

où R_k est un polynôme en m de degré $< |k|$. On a alors (en notant pour simplifier Q_n les polynômes associés à F par (2))

$$\begin{aligned}\int Q_n(x,m_0)x^k f_\mu(x,m_0)\,\mathrm{d}\mu &= \int x^k \frac{\partial^{|n|} f_\mu(x,m)}{\partial m^n}\bigg|_{m=m_0}\mathrm{d}\mu \\ &= \frac{\partial^{|n|}M_k}{\partial m^n}\bigg|_{m=m_0} = 0, \quad \text{si } |k| \leqslant |n| \text{ et } k \neq n.\end{aligned}$$

Par linéarité de l'intégrale on a donc $\int Q_n Q_k f_\mu \,\mathrm{d}_\mu = 0$ si $n \neq k$, ce qui montre que les polynômes $\{Q_n\}$ sont $P(m,F)$-orthogonaux, et donc (d'après [10]) que F est quadratique simple.

Remerciements. Les auteurs remercient un rapporteur pour ses remarques qui ont permis de simplifier cette Note.

Références bibliographiques

[1] Barndorff-Nielsen O.E., Information and Exponential Families, Wiley, New York, 1978.
[2] Brown D., Fundamental of Statistical Exponential Families, Lecture Notes – Monograph Series, 1986.
[3] Casalis M., The $2d+4$ simple quadratic natural exponential families on $\mathbb{R}^d$, Ann. Statist. 24 (1996) 1828–1854.
[4] Feinsilver P., Some classes of orthogonal polynomials associated with martingales, Proc. Amer. Math. Soc. 98 (1986) 298–302.
[5] Küchler U., Sφrensen M., Exponential Families of Stochastic Processes, Springer Series Statist., 1997.
[6] Letac G., Lectures on natural Exponential Families and their Variance Functions, Monografias de Matemática, Vol. 50, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Río de Janeiro, Brésil, 1992.
[7] López-Blázquez F., Salamanca-Miño B., A characterization of natural exponential families with quadratic variance functions by a reverse martingale property, Statist. Probab. Lett. 49 (2000) 63–68.
[8] Morris C.N., Natural exponential families with quadratic variance functions, Ann. Statist. 10 (1982) 65–82.
[9] Morris C.N., Natural exponential families with quadratic variance functions: statistical theory, Ann. Statist. 11 (1983) 512–529.
[10] Pommeret D., Orthogonal polynomials and natural exponential families, Test 5 (1996) 77–111.
[11] Pommeret D., Orthogonality of the Sheffer system associated to a Lévy process, J. Statist. Plann. Inference 86 (2000) 1–10.
[12] Shanbhag D.N., Diagonality of the Bhattacharyya matrix as a characterization, Theory Probab. Appl. 24 (1979) 430–433.
[13] Schoutens W., Teugels J.L., Lévy processes, polynomials and martingales, Stochastic Models 14 (1998) 335–349.