C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 334 (2002) 261–266

Combinatoire/*Combinatorics*

S-arrangements avec répétitions

Sylviane R. Schwer

LIPN, UMR CNRS 7030, Université Paris 13, Institut Galilée, 99, avenue Jean-Baptiste Clément, 93430 Villetaneuse, France

Reçu le 3 décembre 2001 ; accepté le 10 décembre 2001

Note présentée par Gilles Kahn.

Résumé Nous étudions les correspondances naturelles entre l'ensemble des arrangements de parties d'un ensemble avec répétitions et des ensembles d'objets rencontrés dans des domaines variés des mathématiques (chemins dans des treillis de dimension n, pré-ordres) et de l'informatique (langages formels, réseaux de Petri, intelligence artificielle), en utilisant le cadre des langages formels. En dimension 2, ces objets sont énumérés par les nombres de Delannoy. ***Pour citer cet article : S.R. Schwer, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 334 (2002) 261–266.*** © 2002 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

S-arrangements with repetitions

Abstract We study natural correspondances between the set of arrangements of subsets with repetitions and families of objects met in various areas of mathematics (walks in lattices, pre-order) and computer science (formal languages, Petri nets, Artificial Intelligence), using the framework of formal languages. For $n = 2$, they are enumerated by Delannoy numbers. ***To cite this article: S.R. Schwer, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 334 (2002) 261–266.*** © 2002 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

Abridged English version

Let us give n colors $(x_1, \ldots, x_n)$ and for each $i \in [n]$, p_i balls x_i colored, and r boxes linearly ordered with $\max(p_1, \ldots, p_n) \leqslant r \leqslant p_1 + \cdots + p_n$. We are interested in finding correspondences with the set $\mathfrak{D}(p_1, \ldots, p_n)$ of solutions of the following problem: placing the balls in the boxes so that each box contains (a) at least one ball and (b) at most one ball per color. Such a solution is called an S-arrangement with repetitions. We note by $D(p_1, \ldots, p_n)$ the cardinality of $\mathfrak{D}(p_1, \ldots, p_n)$.

1. Formal languages framework and enumeration

This problem has a natural translation into the framework of formal languages. Let us set

DEFINITION 1.1. – Let X be an alphabet, an *S-alphabet on* X is a non-vacuous subset of 2^X; an element is an *S-letter*, a finite sequence is an *S-word*, a set of S-words is an *S-language*.

In order to link S-words on X with letters of X, we set

Adresse e-mail : schwer@lipn.univ-paris13.fr (S.R. Schwer).

S1631-073X(02)02258-6/FLA

DEFINITION 1.2. – Let $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ be an n-alphabet and $f \in \widehat{X}^*$. We note $\|f\|_x$ the number of occurrences of $x \in X$ the S-letters of f, and $\|f\|$ the integer $\sum_{1\leqslant i\leqslant n} \|f\|_{x_i}$. The *Parikh vector* of f, denoted $\vec{f}$, is the n-tuple $(\|f\|_{x_1}, \ldots, \|f\|_{x_n})$.

DEFINITION 1.3. – Let X and Y be two disjoint alphabets, $f \in \widehat{X}^*$, $g \in \widehat{Y}^*$. The *S-shuffle* of f and g is the language $f \overline{\mathbb{W}} g = \{h_1 \ldots h_r \mid h_i \in \widehat{X \cup Y}$, with $\max(|f|, |g|) \leqslant r \leqslant |f| + |g|$ and such that there are decompositions of f and g: $f = f_1 \ldots f_k$, $g = g_1 \ldots g_k$, satisfying, $\forall i \in [r]$, $|f_i|, |g_i| \leqslant 1$, $1 \leqslant |f_i| + |g_i|$, and $h_i = f_i \cup g_i\}$.

The S-shuffle of two S-languages L and L' written on two disjoint alphabets is the language $L \overline{\mathbb{W}} L' = \bigcup_{f\in L, f'\in L'} f \overline{\mathbb{W}} f'$. For any $\nu = (p_1, \ldots, p_n) \in \mathbb{P}^n$ and any linearly n-alphabet $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$, we note $\overline{\mathbb{W}}\nu$ — or $\overline{\mathbb{W}}\nu_X$ to avoid any ambiguity — $x_1^{p_1} \overline{\mathbb{W}} \ldots \overline{\mathbb{W}} x_n^{p_n}$. The basis result is:

PROPOSITION 1.4. – *For $\nu = (p_1, \ldots, p_n) \in \mathbb{P}^n$ and $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ an alphabet, there are natural correspondences between* (i) $\mathfrak{D}(\nu)$, (ii) $\{f \in \widehat{X}^* \mid \vec{f} = \nu\}$ *et* (iii) $\overline{\mathbb{W}}\nu_X$. *Their number is $D(\nu)$.*

Different expressions of $D(p_1, \ldots, p_n)$ can be given among which the following recurrence, obtained when partitioning the S-words according to their last S-letters. For $p \in \mathbb{P}$, let us set $\widetilde{p} = \{p, p-1\} \cap \mathbb{N}$ and $\mathcal{P}red((p_1, \ldots, p_n)) = \{(\widetilde{p_1}, \ldots, \widetilde{p_n})\} - \{(p_1, \ldots, p_n)\}$, we get

$$D(p_1, \ldots, p_n) = \sum_{\mathcal{P}red(p_1, \ldots, p_n)} D_n\left(\widetilde{p_1}, \ldots, \widetilde{p_n}\right)$$

which is the recurrence for the n-dimensional Delannoy numbers [9]. Sorting accodring to the number of S-letters choosen and denoting $\lambda_\nu(r, n)$ the number of S-words with Parikh vector ν and length r, we get

$$D(p_1, \ldots, p_n) = \sum_{r=\max(p_1, \ldots, p_n)}^{p_1+\cdots+p_n} \lambda_\nu(r, n).$$

Computing $\lambda_\nu(r, n)$ after their last S-letters gives, with $\lambda_\nu(r, 1) = 1$ if $r = p_n$ and 0 otherwise,

$$\lambda_\nu(r, n) = \binom{r}{p_n} \left(\sum_{k=0}^{p_n} \binom{p_n}{k} \lambda_\nu(r - k, n - 1) \right).$$

Alternatively, denoting $\mathcal{V}_r(\nu)$ the set $\{(t_1 S_1, \ldots, t_k S_k) \mid 1 \leqslant k \leqslant r,\ t_i \geqslant 1,\ S_i \in \widehat{X}$, such that $\forall i \in [n]$, $\sum_{k=1}^r t_k \|S_k\|_{x_i} = p_i\}$ a direct numbering gives

$$\lambda_\nu(r, n) = \sum_{(t_1 S_1, \ldots, t_k S_k) \in \mathcal{V}_r(\nu)} \frac{(t_1 + \cdots + t_k)!}{t_1! \cdots t_k!}.$$

2. Correspondences

From the definition of Vector Addition System (VAS) [8], we define the notion of S-VAS setting.

DEFINITION 2.1. – Let $\mathcal{A} = (X, \varphi, \mathbf{a})$ be an n-VAS, where $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ is the alphabet, φ a monoid morphism from $(X^*, \cdot, \varepsilon)$ into $(\mathbb{Z}^n, +, \vec{0})$ and $\mathbf{a}$ is a tuple of $\mathbb{N}^n$. Its associated n-S-VAS is the n-VAS $\mathcal{A}^S = (\widehat{X}, \widehat{\varphi}, \mathbf{a})$ where $\widehat{\varphi}(s) = \sum_{x\in s} \varphi(x)$. Its legal language is defined as $L_{\mathcal{B}_n^S}(\mathbf{a}\downarrow) = \{f \in \widehat{X}^* \mid \mathbf{a} + \widehat{\varphi}(f) = \mathbf{0_n}$ and $(\forall g \in \widehat{X}^*)((\exists h \mid f = gh) \Rightarrow (\mathbf{a} + \widehat{\varphi}(g) \geqslant \vec{0})\}$.

Let $\mathbb{B}_n = \{x_1, \ldots, x_n\}$ be the canonical base of $\mathbb{Z}^n$, $\nu = \{p_1, \ldots, p_n\}$ a tuple of $\mathbb{P}$. Let us define the n-VAS $\mathcal{B}_n = (X, \beta, \nu)$ by setting $\forall i \in [n]$, $\beta(x_i) = -e_i$. The set of tuples of $\mathbb{P}$ which can be reached by $\mathcal{B}_n^S$ is $Q = \{\mathbf{a} \in \mathbb{N}^n \mid \mathbf{0} \leqslant \mathbf{a} \leqslant \nu\}$. The modified Karp and Miller's algorithm [8] provides directly a finite deterministic finite automata $G_{\mathcal{B}_n^S}(\nu\downarrow)$ which generates $L_{\mathcal{B}_n^S}(\nu\downarrow)$. The set of states of $G(\mathcal{B}_n^S)$ is Q and has $\prod_{i=1}^n (p_i + 1)$ elements. Let us draw each state on its place (according to its coordinates) in $\mathbb{N}^n$ and inverse the arrows of each transition, then we obtain the set of minimal paths with diagonal of [9] which is a generalization of the queen walk on a chess-board described by Delannoy in 1889 [4] and that we call *Delannoy paths of order n*. Hence we have

PROPOSITION 2.2. – *There are natural correspondences between* (i) $\mathbb{W}(\nu)$, (ii) $L_{\mathcal{B}_n^S}(\nu\downarrow)$ *and* (iii) *Delannoy paths of order n*.

Let us call a pre-chain a totally transitive and reflexive relation. Associating each color x_i with a chain C_i of p_i elements, and denoting $\mathfrak{P}(p_1,\dots,p_n)$ the set of all pre-chains of $p_1+\dots+p_n$ elements that preserve the n chains $C_1,\dots,C_n$, we get the following.

PROPOSITION 2.3. – *There is a natural correspondence between $\mathfrak{P}(p_1,\dots,p_n)$ and $\mathfrak{D}(p_1,\dots,p_n)$.*

A generalized interval [7] can be modelized with a chain and a qualitative relation between them with a pre-chain, so that our work generalizes to the n-dimension the work of [7] as far as relations are concerned.

1. Introduction

Donnons-nous n couleurs différentes : $(x_1,\dots,x_n)$, et pour chaque $i\in[n]$, p_i boules indiscernables de couleur x_i ainsi que r boîtes alignées, avec $\max(p_1,\dots,p_n)\leqslant r\leqslant p_1+\dots+p_n$. Nous nous proposons d'examiner le problème suivant : placer les boules dans les boîtes de telle façon que (a) toutes les boîtes soient occupées et (b) qu'il n'y ait pas deux boules de même couleur dans la même boîte. Par analogie avec les arrangements avec répétitions [2, p. 25–28], nous appelons *S-arrangement avec répétitions* (S-AR en abrégé) une solution. Notons $\mathfrak{D}(p_1,\dots,p_n)$ leur ensemble et $D(p_1,\dots,p_n)$ leur nombre. Le cas où tous les p_i valent 1 a été étudié par [6] sous le terme d'arrangement préférentiel ; le cas où tous les p_i valent 2 a été étudié en Intelligence Artificielle [3]. Une interprétation combinatoire de ce problème, sans imposer la contrainte (a), est donnée dans [10, p. 291] en termes de coefficients de matrices de changements de base dans l'espace des fonctions symétriques. L'objet de cet article est de montrer l'ubiquité de $D(p_1,\dots,p_n)$ par des correspondances naturelles entre les S-ARs et d'autres familles d'objets rencontrés dans des domaines variés des mathématiques (chemins dans des treillis, pré-ordres) et de l'informatique (langages formels, réseaux de Petri, intelligence artificielle).

2. Les mots pour le dire

Le formalisme de la théorie des langages [1] est bien adapté à ce genre de problème [2], c'est pourquoi nous restons dans ce cadre en généralisant les notions de vecteurs de Parikh [5] (dite spécification dans [2]), d'alphabets, de mots et de langages afin de les adapter à la description des multi-ensembles que sont nos boîtes.

DÉFINITION 2.1. – Soit X un alphabet, un *S-alphabet sur X* est une partie non vide de 2^X. Un élément d'un S-alphabet sur X est une *S-lettre*. Un *S-mot* sur X est une suite finie de S-lettres sur X, un ensemble de S-mots sur un S-alphabet est un *S-langage*.

Nous utilisons ici le S-alphabet $\widehat{X}=2^X-\emptyset$, en confondant tout singleton avec sa lettre, ce qui nous autorise à écrire $X\subset\widehat{X}$ et $X^*\subset\widehat{X}^*$. Ses S-lettres sont notées aussi bien horizontalement que verticalement. Ainsi $\widehat{\{a,b\}}=\{a,b,\left\{\begin{smallmatrix}a\\b\end{smallmatrix}\right\}\}$. Les S-alphabets sont des alphabets, on peut donc travailler avec les outils connus de la théorie des langages. Mais il nous faut aussi pouvoir relier les S-mots à l'alphabet de base et non simplement à leur S-alphabet.

DÉFINITION 2.2. – Soit $X=\{x_1,\dots,x_n\}$ un n-alphabet et $f\in\widehat{X}^*$. On note $\|f\|_x$ le nombre d'occurrences de la lettre $x\in X$ apparaissant dans les S-lettres figurant dans le S-mot f, et $\|f\|$ l'entier $\sum_{1\leqslant i\leqslant n}\|f\|_{x_i}$. Le *vecteur de Parikh* de f, noté $\vec{f}$, est le n-uplet $(\|f\|_{x_1},\dots,\|f\|_{x_n})$.

DÉFINITION 2.3. – Soit X et Y deux alphabets disjoints, $f \in \widehat{X}^*$, $g \in \widehat{Y}^*$. Le *S-mélange* de f et g est le langage $f \mathbb{W} g = \{h_1 \dots h_r \mid h_i \in \widehat{X \cup Y}$, avec $\max(|f|, |g|) \leqslant r \leqslant |f| + |g|$ et tel qu'il existe des décompositions de f et g : $f = f_1 \dots f_k$, $g = g_1 \dots g_k$, satisfaisant, $\forall i \in [r]$, $|f_i|, |g_i| \leqslant 1$, $1 \leqslant |f_i| + |g_i|$, et $h_i = f_i \cup g_i\}$.

Ainsi $aa \mathbb{W} bb = \{aabb,\ a\left\{{a \atop b}\right\}b,\ abab,\ \left\{{a \atop b}\right\}ab,\ ab\left\{{a \atop b}\right\},\ \left\{{a \atop b}\right\}\left\{{a \atop b}\right\},\ baab,\ ba\left\{{a \atop b}\right\},\ abba,\ \left\{{a \atop b}\right\}ba,$ $baba, b\left\{{a \atop b}\right\}a, bbaa\} = \{f \in \widehat{\{a, b\}}^* \mid \vec{f} = (2, 2)\}$.

Le S-mélange de deux S-langages L et L' écrits sur des alphabets disjoints est le langage $L \mathbb{W} L' = \bigcup_{f \in L, f' \in L'} f \mathbb{W} f'$. Le S-mélange de langages est une opération associative, commutative et possède comme élément neutre $\{\varepsilon\}$. Pour tout n-uplet d'entiers strictements positifs $\nu = (p_1, \dots, p_n)$ et $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ un n-alphabet ordonné, on note $\mathbb{W}\nu_X$ — ou$\mathbb{W}\nu$ s'il n'y a pas d'ambiguïté — le langage $x_1^{p_1} \mathbb{W} \dots \mathbb{W} x_n^{p_n}$.

Nous pouvons alors énoncer le résultat de base suivant :

PROPOSITION 2.4. – *Etant donné un n-uplet d'entiers positifs non nuls* $\nu = (p_1, \dots, p_n)$ *et un alphabet* $X = \{x_1, \dots, X_n\}$, *il existe des bijections naturelles entre* (i) $\mathfrak{D}(\nu)$, (ii) $\{f \in \widehat{X}^* \mid \vec{f} = \nu\}$ *et* (iii) $\mathbb{W}\nu_X$. *Leur nombre est* $D(\nu)$.

En effet, (ii) reformule (i). D'autre part, tout S-mot de (iii) est un S-mot de (ii) et réciproquement la projection sur $\{x_i\}$ d'un S-mot f de (ii) est le S-mot x^{p_i}, donc f est bien un bien mot de (iii).

Il existe également une bijection naturelle entre l'ensemble des S-lettres $\widehat{X}$ et l'ensemble des contenus possibles des boîtes.

3. Enumérations

Suivant le point de vue adopté, on obtient plusieurs expressions de $D(p_1, \dots, p_n)$.

En particulier, partitionner les S-ARs suivant le nombre de boîtes utilisées conduit à l'expression, en notant $\lambda_\nu(r, n)$ le nombre de S-mots ayant pour vecteur de Parikh ν et de longueur r,

$$D(p_1, \dots, p_n) = \sum_{r=\max(p_1,\dots,p_n)}^{p_1+\dots+p_n} \lambda_\nu(r, n).$$

Le calcul de $\lambda_\nu(r, n)$ peut se faire soit par récurrence sur n (i.e. selon la dernière couleur utilisée) et cela donne

$$\lambda_\nu(r, n) = \binom{r}{p_n} \left(\sum_{k=0}^{p_n} \binom{p_n}{k} \lambda_\nu(r - k, n - 1) \right)$$

avec $\lambda_\nu(r, 1) = 1$ si $r = p_n$ et 0 sinon ; soit directement, en comptant le nombre de S-mots de vecteurs de Parikh ν et de longueur r que l'on peut fabriquer pour chaque sous-ensemble de S-lettres. Apparaissent alors les coefficients multinomiaux généralisant l'expression donnée en [4]. En notant $\mathcal{V}_r(\nu)$ l'ensemble $\{(t_1 S_1, \dots, t_k S_k) \mid 1 \leqslant k \leqslant r,\ t_i \geqslant 1,\ S_i \in \widehat{X}$, tels que $\forall i \in [n]$, $\sum_{k=1}^{r} t_k \|S_k\|_{x_i} = p_i\}$, on a

$$D(p_1, \dots, p_n) = \sum_{r=\max(p_1,\dots,p_n)}^{p_1+\dots+p_n} \sum_{(t_1 S_1,\dots,t_k S_k) \in \mathcal{V}_r(\nu)} \frac{(t_1 + \dots + t_k)!}{t_1! \cdots t_k!}.$$

Une autre démarche consiste à partitionner les S-mots suivant leurs dernières S-lettres. Pour chaque entier p, posons $\widetilde{p} = \{p, p - 1\} \cap \mathbb{N}$. En posant $\mathcal{P}red((p_1, \dots, p_n)) = \{(\widetilde{p_1}, \dots, \widetilde{p_n})\} - \{(p_1, \dots, p_n)\}$, nous obtenons la formule

$$D(p_1, \dots, p_n) = \sum_{\mathcal{P}red(p_1,\dots,p_n)} D_n(\widetilde{p_1}, \dots, \widetilde{p_n})$$

avec $D_1(0) = 1$, $D_n(p_1, \dots, p_{n-1}, 0) = D_{n-1}(p_1, \dots, p_{n-1})$. Ainsi, $D_n(p_1, \dots, p_n)$ est une fonction symétrique de fonction génératrice sur n variables $1/(2 - \prod_{1 \leqslant i \leqslant n}(1 + Z_i))$ ou $1/(1 - \sum_{\emptyset \neq s \subseteq [1,n]} \prod_{i \in s} Z_i)$.

Dans le cas où tous les p_i sont égaux à p on a $D(\underbrace{p,\ldots,p}_{n\ fois}) = \sum_{r=1}^{n} \binom{n}{r} D(\underbrace{p-1,\ldots,p-1}_{r\ fois}, \underbrace{p,\ldots,p}_{n-r\ fois})$.

Les nombres $D(p_1, p_2)$ sont les nombres de Delannoy [2, p. 93], bien connus comme nombrant l'ensemble des chemins minimaux dans un treillis allant du point $(0,0)$ au point (p_1, p_2) en s'autorisant les pas diagonaux ou les marches de la reine sur l'échiquier [4]. Nous appellerons donc les nombres $D(p_1,\ldots,p_n)$ *les nombres de Delannoy de dimension n.*

4. S-systèmes d'addition de vecteurs et représentations géométriques

La généralisation au treillis de dimension n nous fournit une nouvelle correspondance et une représentation géométrique que nous allons générer avec une certaine famille de Systèmes d'Addition de Vecteurs, ou réseaux de Petri, lesquels constituent un outil largement répandu de modélisation des communications entre processus parallèles. Un n-système d'addition de vecteurs (n-VAS) peut être décrit [8] comme un triplet $\mathcal{A} = (X, \varphi, \mathbf{a})$ où X est un alphabet, φ est un morphisme de monoïdes de $(X^*, \cdot, \varepsilon)$ dans $(\mathbb{Z}^n, +, \mathbf{0_n})$ et $\mathbf{a}$ un n-uplet de $\mathbb{N}^n$. Au n-VAS $\mathcal{A} = (X, \varphi, \mathbf{a})$ sur X est associé le langage $L_{\mathcal{A}}(\mathbf{a}\downarrow) = \{f \in X^* \mid \mathbf{a} + \varphi(f) = \mathbf{0_n}$ et $(\forall g \in X^*)((g$ est facteur gauche de $f) \Rightarrow (\mathbf{a} + \varphi(g) \geqslant \mathbf{0_n})\}$.

DÉFINITION 4.1. – Etant donné un n-VAS $\mathcal{A} = (X, \varphi, \mathbf{a})$, le n-S-VAS *associé* est le n-VAS $\mathcal{A}^S = (\widehat{X}, \widehat{\varphi}, \mathbf{a})$ où $\widehat{\varphi}(s) = \sum_{x\in s} \varphi(x)$.

La construction d'un n-S-VAS fait qu'à chaque S-lettre de X est associé le vecteur traduisant la consommation d'une occurrence de chaque lettre présente dans la S-lettre. Pour consommer p_i occurrences de x_i, il faut utiliser exactement p_i S-lettres contenant x_i.

Soit alors $\mathbb{B}_n = \{e_1,\ldots,e_n\}$ la base canonique de $\mathbb{Z}^n$, soit $\nu = \{p_1,\ldots,p_n\}$ un n-uplet et $X = \{x_1,\ldots,x_n\}$ un alphabet. Définissons le n-VAS $\mathcal{B}_n = (X, \beta, \nu)$ en posant $\forall i \in [n]$, $\beta(x_i) = -e_i$. L'ensemble des n-uplets accessibles de $\mathcal{B}_n^S$ valant l'ensemble fini $Q = \{\mathbf{a} \in \mathbb{Z}^n \mid \mathbf{0_n} \leqslant \mathbf{a} \leqslant \nu\}$, le graphe de couverture de Karp et Miller fournit directement un automate fini déterministe $G_{\mathcal{B}_n^S}(\nu\downarrow)$ générant le langage $L_{\mathcal{B}_n^S}(\nu\downarrow)$.

En suivant les notations de [1, p. 71–75], $G_{\mathcal{B}_n^S}(\nu\downarrow) = \langle \widehat{X}, Q, \nu, \{\mathbf{0_n}\}, \delta\rangle$ tel que $(q, x, q') \in \delta$ si et seulement si $q' = q + \widehat{\varphi}(x)$, $\forall q \in Q$, $\forall x \in \widehat{X}$, en s'autorisant le calcul vectoriel sur les états.

Cet automate $G(\mathcal{B}_n^S)$ possède $\prod_{i=1}^{n}(p_i + 1)$ états. Dessinons chaque état à l'emplacement qui lui correspond dans l'espace $\mathbb{Z}^n$, inversons le sens des flèches des arcs de transitions et nous obtenons une généralisation à la dimension n des chemins de Delannoy ou marches dans un $\mathbb{N}$-treillis avec diagonales [9]. Nous en déduisons les correspondances suivantes :

PROPOSITION 4.2. – *Il existe une correspondance naturelle entre* (i) $\overline{\mathbb{W}}(\nu)$, (ii) $L_{\mathcal{B}_n^S}(\nu\downarrow)$ *et* (iii) *l'ensemble des chemins de Delannoy de dimension n.*

5. Pré-ordres linéaires et intervalles généralisés

Les nombres de Delannoy apparaissent en intelligence artificielle, sans que le lien ait été fait jusqu'alors, dans le comptage des positionnements possibles entre deux intervalles généralisés [7]. Cette notion peut être reformulée en terme de pré-ordre linéaire et liée aux S-ARs.

5.1. Pré-ordres linéaires

Appelons *ensemble linéaire* un ensemble totalement ordonné. Rappelons qu'un *pré-ordre* sur un ensemble E est une relation binaire réflexive et transitive et appelons *pré-ordre linéaire* un pré-ordre dont deux éléments quelconques sont toujours comparables. Nous nous intéressons au problème suivant : étant donnés n ensembles linéaires disjoints $(L_1,\ldots,L_n)$, L_i possédant p_i éléments, $\forall i \in [n]$, combien de pré-ordres linéaires génèrent-ils, c'est-à-dire, combien de pré-ordres linéaires préservant leurs ordres peut-on construire ? Notons $\mathfrak{P}(p_1,\ldots,p_n)$ cet ensemble et $P(p_1,\ldots,p_n)$ le cardinal de celui-ci. En associant à chaque chaîne L_i une couleur x_i et p_i boules, il vient :

PROPOSITION 5.1. – (i) *Il y a une correspondance naturelle entre* $\mathfrak{P}(p_1,\ldots,p_n)$ *et* $\mathfrak{D}(p_1,\ldots,p_n)$;
(ii) $P(p_1,\ldots,p_n) = D(p_1,\ldots,p_n)$.

5.2. Positions relatives d'intervalles généralisés

Dans [7] est introduit l'ensemble de toutes les positions relatives possibles entre une chaîne de longueur p et une chaîne de longueur q d'un ensemble linéaire (assez grand pour contenir au moins $p+q$ éléments. Il y est prouvé que cet ensemble équivaut à un ensemble particulier de suites de $p+q$ entiers $\Pi(p,q)$. Nous généralisons le problème à n chaînes et montrons son équivalence avec les problèmes que nous étudions. Notons $\Pi(p_1,\ldots,p_n)$ l'ensemble de toutes les $(p_1,\ldots,p_n)$-positions.

DÉFINITION 5.2. – Etant donné $(p_1,\ldots,p_n) \in \mathbb{P}^n$, $\Pi(p_1,\ldots,p_n)$ est l'ensemble des fonctions π de $\mathbb{P}^{[p_1+\cdots+p_n]}$ satisfaisant :
(i) $(\exists r \leqslant p_1+\cdots+p_n)$, $\pi[p_1+\cdots+p_n] = [r]$ et
(ii) $(\forall i \in \{1,\ldots,n\})$, $\pi_{|[p_1+\cdots+p_{i-1}+1,\,p_1+\cdots+p_{i-1}+p_i]}$ est strictement croissante.

Ainsi $\Pi(2,2) = \{1234, 1223, 1324, 1213, 1323, 1212, 2314, 2313, 1423, 1312, 2413, 2312, 3412\}$.

$\Pi(p_1,\ldots,p_n)$ représente bien toutes les positions possibles entre n chaînes $(C_1,\ldots,C_n)$, C_i de taille p_i, d'un ensemble linéaire contenant au moins $p_1+\cdots+p_n$ éléments, car chaque suite est un codage associant au $j$ème élément de C_i, de rang k dans le préordre correspondant, le couple $(p_1+\cdots+p_{i-1}+j, k)$. Ainsi, un élément apparaît autant de fois que le nombre de chaînes auxquelles il appartient, ce qui revient bien à travailler sur des chaînes disjointes. Montrons alors la

PROPOSITION 5.3. – (i) *Il existe une une correspondance naturelle entre* $\Pi(p_1,\ldots,p_n)$ *et* $\mathfrak{P}(p_1,\ldots,p_n)$;
(ii) *Le cardinal de* $\Pi(p_1,\ldots,p_n)$ *est* $D(p_1,\ldots,p_n)$.

Démonstration. – (ii) découle de (i) que nous prouvons. Soit $\pi \in \Pi(p_1,\ldots,p_n)$ et $X = \{x_1,\ldots,x_n\}$ une famille — prise comme n-alphabet — de n ensembles linéaires distincts $x_i = x_{i,1} \leqslant \cdots \leqslant x_{i,p_i}$ associée au n-tas $\nu_X = \{x_1^{p_1},\ldots,x_n^{p_n}\}$. Associons à chaque intervalle $[p_1+\cdots+p_{i_1}+1, p_1+\cdots+p_i]$ l'ensemble linéaire $x_i = x_{i,1} \leqslant \cdots \leqslant x_{i,p_i}$ par l'isomorphisme d'ordre de $[n]$ sur $\bigcup_{i=1}^n x_i$ défini par : $\forall i \in [n]$, $\forall k \in [p_i]$, $\varphi(p_1+\cdots+p_{i_1}+k) = x_{i,k}$. Sur $\bigcup_{i=i}^n x_i$ la relation binaire définie par $x \preceq y$ si et seulement si $\pi(\varphi(x)) \leqslant \pi(\varphi(y))$ est un pré-ordre linéaire, d'après les propriétés de π.

Réciproquement, soit un pré-ordre total $\preceq$ sur $\bigcup_{i=i}^n x_i$. Soit l'ordre total $\preceq_\equiv$ induit sur les classes d'équivalence. Notons $r_\preceq$ le nombre de ses classes. Construisons la fonction $\pi_\preceq$ de $[p_1+\cdots+p_n]$ sur $[r_\preceq]$ en posant $\forall i \in [n]$, $\forall k \in [p_i]$, $\pi_\preceq(p_1+\cdots+p_{i_1}+k)$ égale le nombre de classes inférieures ou égales à la classe de $x_{i,k}$. Ainsi, $\pi_\preceq \in \Pi(p_1,\ldots,p_n)$. □

Remerciements. Je remercie Daniel Barsky pour ses encouragements amicaux.

Références bibliographiques

[1] J.-M. Autebert, Langages Algébriques, Masson, 1987.
[2] L. Comtet, Analyse Combinatoire, Tome premier, P.U.F. Collection, SUP, 1970.
[3] M. Dubois, S.R. Schwer, Classification topologique des ensembles convexes de Allen, in : Proc. 12ème congrés Reconnaissance des Formes et Intelligence Artificielle, R.F.I.A., Paris, 2000, pp. 59–68.
[4] H. Delannoy, Emploi de l'échiquier pour la résolution de divers problèmes de probabilité, in : C. R. 18ème session de l'Association Française pour l'Avancement des Sciences, Paris, 1889, pp. 43–52.
[5] S. Ginsburg, The Mathematical Theory of Context-Free Languages, McGraw-Hill, 1966.
[6] O.A. Gross, Preferential arrangements, Amer. Math. Monthly 69 (1962) 4–8.
[7] G. Ligozat, Intervalles généralisés I et II, C. R. Acad. Sci. Paris, Série A 310 (1990) 225–228 et 299–302.
[8] S.R. Schwer, Fine covers of a VAS language, Theoret. Comput. Sci. 95 (1992) 159–168.
[9] K. Shashidhar, R.H. Raghav, Higher dimensional restricted lattice paths with diagonal steps, Discrete Appl. Math. 31 (1991) 279–289.
[10] R.P. Stanley, Enumerative Combinatorics, Vol. 2, Cambridge University Press, 1999.